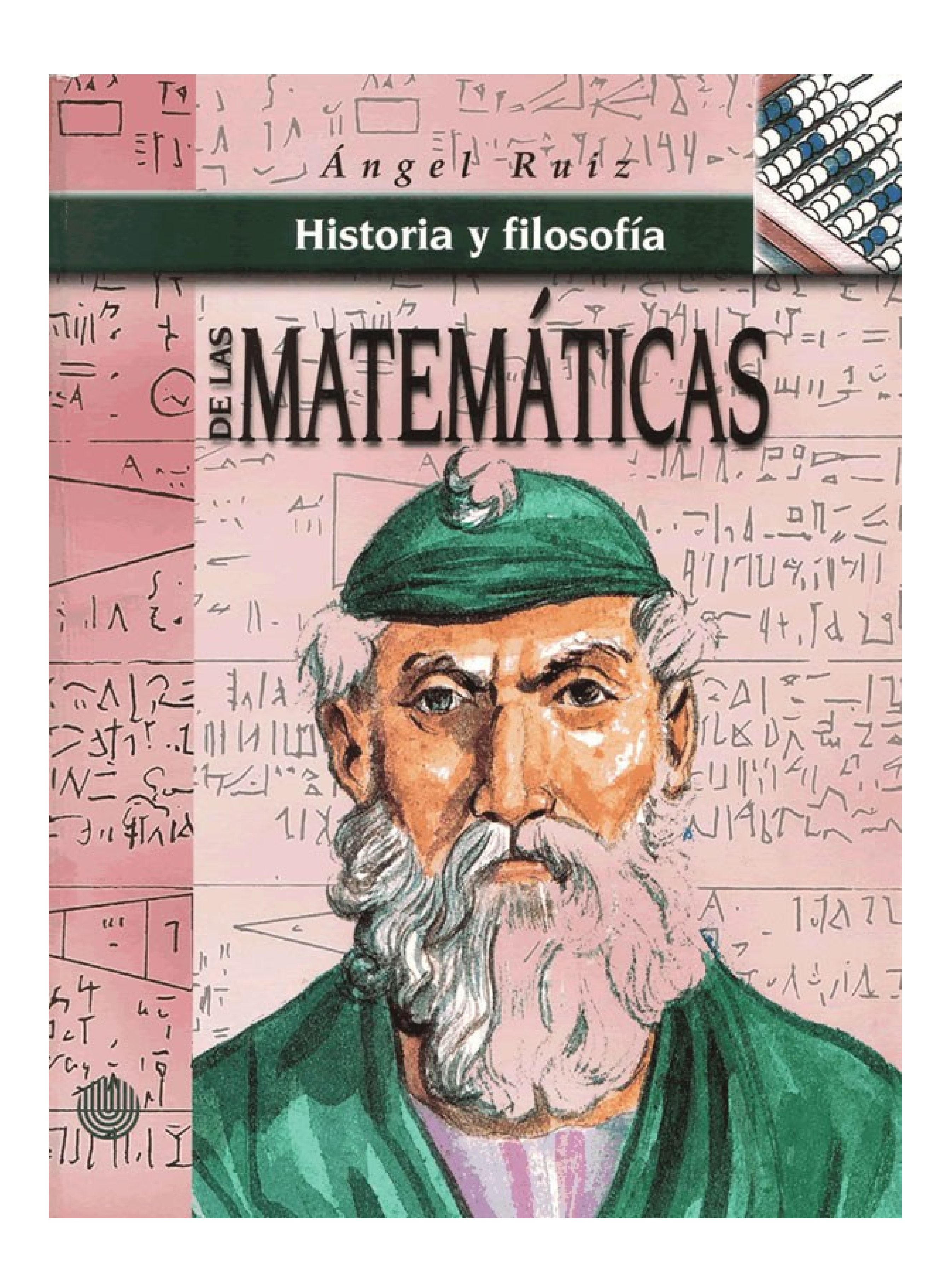

Ángel Ruiz
Historia y filosofía
DE LAS
MATEMÁTICAS

Índice

PREFACIO DEL AUTOR

Estimada amiga, estimado amigo:

El libro que usted tiene en sus manos, busca ofrecer una visión panorámica de la historia y filosofía de las matemáticas. Se trata apenas de una introducción a los múltiples temas que estas disciplinas contienen y provocan. En algunos casos, no obstante, daremos un tratamiento más detallado; en otros buscaremos extraer las implicaciones filosóficas o pedagógicas. Pero en general preservaremos un sentido muy amplio.

¿A quiénes va dirigido? A todo público. Los requisitos teóricos o técnicos son deliberadamente pocos para permitir que esté al alcance de la mayoría de las personas interesadas. No es un libro para especialistas. Tratamos de brindar una perspectiva cultural de la evolución de los quehaceres matemáticos. No obstante, probablemente, los estudiantes, profesores o estudiosos de las matemáticas podrán obtener un provecho mayor de esta obra. Más aún, las secciones de síntesis, análisis e investigación que acompañan cada capítulo permiten realizar profundizaciones importantes para quien así lo desee. Dependerá de los profesores o de las instituciones, o de los deseos de cada cual, el uso que se le dé a esta obra. De hecho, se pueden seguir varias secuencias de lectura o estudio válidas plenamente.

Nuestro libro integra desde el tratamiento propiamente matemático y el histórico de las matemáticas, pasando por la interpretación de entornos sociohistóricos o culturales más amplios, hasta referencias biográficas específicas. Se trata de una obra polifacética y multidimensional.

El libro está dividido en partes, capítulos, secciones y subsecciones, para favorecer la estructura de los contenidos y el manejo didáctico de la obra. No obstante, se puede notar la existencia de asuntos que tocan varios capítulos, aunque dentro de objetivos intelectuales distintos. Pusimos al final dos partes de filosofía, pero, también, debo decirlo, de muchas maneras: hay filosofía en todas partes. Esta obra posee una vocación filosófica.

Hemos querido transmitir una visión de las matemáticas (y de los problemas filosóficos que éstas plantean) estimulante, crítica, y, debemos enfatizarlo, inacabada. Buscamos persistentemente mostrar el carácter humano y social, terrenal, vital, de las matemáticas. En toda la obra, usted encontrará la oportunidad para acompañarnos en este viaje con sus propias opiniones y comentarios.

Espero que nuestro libro pueda ser un valioso instrumento para motivarle en el estudio de las matemáticas, en su enseñanza aprendizaje, y sobre todo en su aprecio por estas disciplinas; las matemáticas son una de las más importantes aventuras intelectuales que ha realizado la humanidad, se trata de un derrotero lleno siempre de avances y retrocesos, angustias, éxitos, fracasos, ilusiones y esperanzas; como todo en la vida.

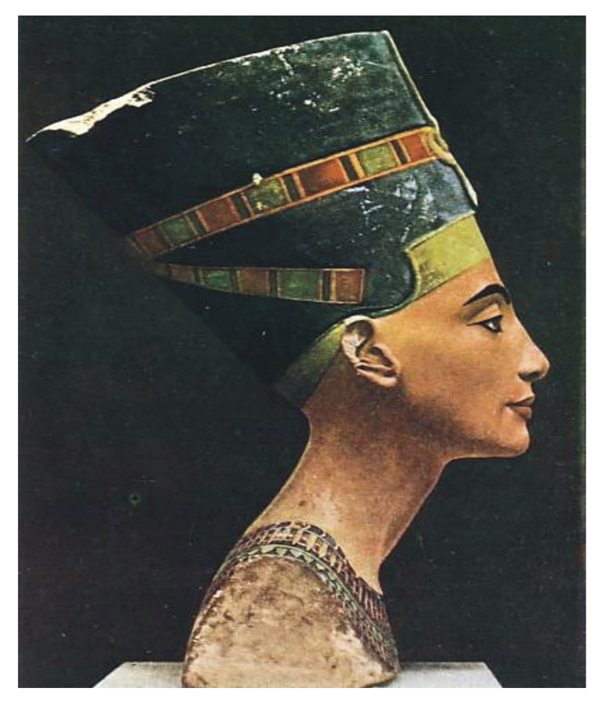
Y, además, espero que esta experiencia pueda ser un diálogo. No dude en comunicarse y conversar conmigo. Aprovechemos el entorno tecnológico que nos proporciona esta compleja y rica época; vivimos un extraordinario escenario que, sin duda, nos aleja precipitadamente de la Modernidad hacia un nuevo universo de posibilidades y retos.

Cordialmente

Ángel Ruiz

PRIMERA PARTE

EN LA ANTUGÜEDAD



En esta primera parte nos interesa hacer un bosquejo de la historia las matemáticas en la Antigüedad.

Vamos a concentrarnos en los aportes de la Grecia Antigua, una gran civilización que constituye un fundamento de la cultura occidental y de la sociedad mundial que vivimos.

Iniciamos con los aportes las características intelectuales y matemáticas de los egipcios y mesopotámicos , cuya influencia en los desarrollos griegos se dará de una forma permanente, aunque con grados distintos en las diferentes etapas de su evolución. Más aún, en las grandes civilizaciones de la Edad del Bronce encontramos los primeros elementos del desenvolvimiento de una visión científica y cultural que constituye una importante herencia para la humanidad.

En lo que se refiere a las matemáticas y las ciencias en general, la civilización griega, ya parte de la Edad del Hierro, representó un salto cualitativo. Un énfasis en la búsqueda de explicaciones naturalistas, fue un primer paso. Actitudes y métodos deductivos y demostrativos en las matemáticas, es otro elemento. Hay que añadir importantes resultados en la mecánica, la cosmología, la hidrostática, la óptica y otras partes del conocimiento. Estos aportes van a estar siempre rodeados de dimensiones religiosas, místicas, ideológicas y filosóficas. En muchas ocasiones, es imposible separar la indagación de carácter científico de aquellas derivadas de otras fuentes de la cultura social.

Concentramos nuestra descripción primeramente en lo que hemos llamado el mundo presocrático . Aquí nos interesa repasar algunas de las actitudes naturalistas jónicas, pero sobre todo, puesto que se trata de la historia de las matemáticas, los asuntos en torno a la escuela pitagórica y la eleática.

En segundo lugar, seguimos a la evolución socio política, histórica, de la civilización griega, y estudiamos las matemáticas en la ciudad -Estado de Atenas. Ésta misma vivió diferentes momentos, lo que a veces no se consigna con precisión. No obstante, lo que nos va a interesar sobre todo van a ser los aportes o las ideas de dos grandes filósofos: Platón y Aristóteles. Nos parece más apropiado en ese contexto inscribir la obra de ese gran matemático llamado Eudoxo.

Para dar fin a esta etapa clásica de la civilización griega no podemos dejar de darle relevancia a los trabajos de Euclides y Apolonio, que de muchas maneras tuvieron un papel paradigmático en torno a la práctica de las matemáticas.

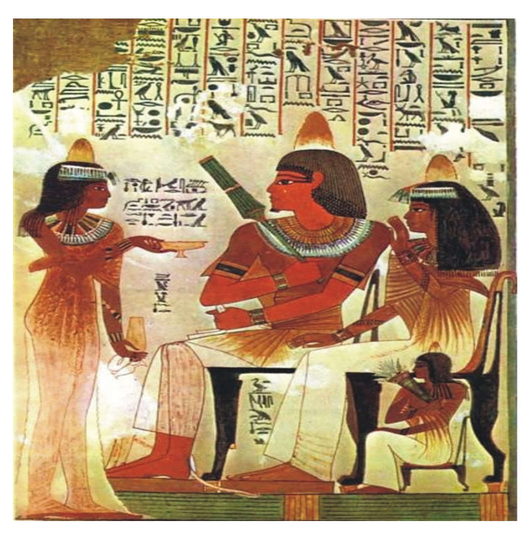
El siguiente periodo es el del mundo alejandrino o helenístico, que emerge después de la conquista macedonia y la muerte de Alejandro el Grande. El interés para las ciencias y las matemáticas nos refiere fundamentalmente a aquella parte del imperio de Alejandro en Egipto, aunque debe mencionarse que en el mundo seléucida se desarrollaron importantes tradiciones culturales. De primera entrada, deberá subrayarse el hecho de que la cultura alrededor de la ciudad de Alejandría se desarrolló exactamente en un lugar que fue el mismo de una gran civilización de la Edad del Bronce. Las influencias interacciones culturales que esto puede suponer son muchas. También, es posible establecer diferentes fase en este período. Son muchas las figuras importantes de las matemáticas de esta época, pero nos concentraremos en la de Arquímedes, Ptolomeo, Diofanto y Pappus. Y, repetimos, queremos trasmitir una visión general de lo que fue el periodo.

Mucho de las matemáticas de la antigüedad griega podría decirse que fue, más que nada, astronomía, tanto por la fuente de sus problemas, sus métodos, sus motivaciones, como por el influjo de las visiones del universo y la realidad que la condicionaron. Tal vez deba hablarse de cosmo matemáticas o astro matemáticas . El énfasis en la geometría haría más bien decir astro geometría o cosmo geometría . Por eso mismo, hemos destinado un capítulo a algunas de las visiones cosmológicas de la antigüedad griega, por supuesto, rematando en ese importante resultado, desde un punto de vista astronómico y matemático, que fue el trabajo de Ptolomeo.

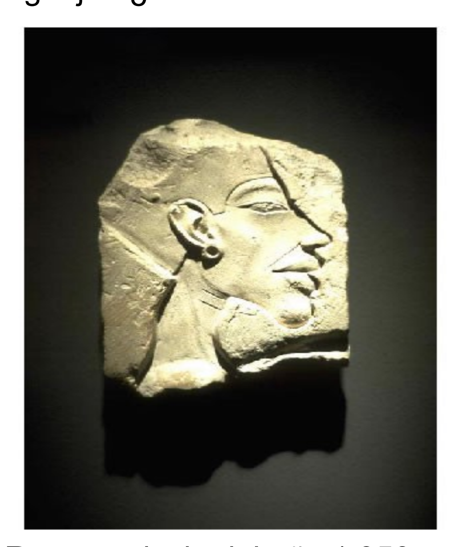
Con la visión que buscamos en esta parte ya podremos entonces empezar el camino intelectual para estudiar la historia de las matemáticas en la sociedad moderna. Antes, sin embargo, tendremos que incursionar en el influjo de otras culturas del planeta y, también, en las características del escenario cultural y matemático de la Europa medieval.

CAPITULO I

MATEMÁTICAS EN EGIPTO Y MESOPOTAMIA



¿Dónde o cómo nacen las matemáticas? Es toda una discusión. Sin embargo, hay una pregunta previa: ¿qué son las matemáticas? Si no se responde ésta última, la otra no se puede contestar con rigor, porque podríamos recorrer historias diferentes según lo que creamos son las matemáticas. Hay múltiples posibilidades. Sin embargo, la respuesta a qué son las matemáticas no es fácil. Reflexione un poco: ¿tratan las matemáticas de los conocimientos obtenidos solamente por deducción lógica u otros recursos se podrían admitir? ¿Sin demostraciones no hay matemática? Y, aun más: ¿qué son demostraciones válidas? ¿Tienen las matemáticas objetos de estudio físicos o mentales? ¿Cómo son y dónde están los objetos de las matemáticas? ¿Son las matemáticas una ciencia natural? ¿Son las matemáticas un lenguaje? ¿Se descubren o construyen las matemáticas?



Rostro egipcio del año 1 350 a. C.

La reflexión y el debate sobre la naturaleza de las matemáticas son muy importantes, pero resulta más apropiado que los realicemos poco a poco a lo largo de todo nuestro libro. La realidad es que, más o menos, todos sabemos a qué se refieren las matemáticas. Y es preferible que primeramente ampliemos nuestra visión sobre estos quehaceres que en la historia se han considerado matemáticos para luego buscar mayor claridad sobre la naturaleza de éstos.

Influjo empírico y práctico en los orígenes de las matemáticas

Podemos decir que las matemáticas en las civilizaciones primitivas, en gran medida, refieren al cálculo de terrenos, a la decoración en cerámica, al comercio más trivial, a los modelos y diseños en la ropa o al recuento del correr del tiempo en la vida cotidiana. Esto no debe, sin embargo, verse con malos ojos. Porque se trata de un sentido íntimo de las matemáticas, imbricadas en la práctica humana, inmersas interactivamente en su entorno.

En relación con las culturas orientales primitivas, señala Struik:

"La matemática Oriental se originó como una ciencia práctica para facilitar el cómputo del calendario, la administración de las cosechas, la organización de trabajos públicos, y la recolecta de impuestos. El énfasis inicial estaba naturalmente en la aritmética práctica y la medición. Sin embargo, una ciencia cultivada durante siglos por un oficio especial cuya tarea no sólo es aplicarlo sino también para instruir en sus secretos, desarrolla tendencias hacia la abstracción. Gradualmente, llegará a ser estudiada en sí misma. La aritmética no sólo evolucionó hacia el álgebra porque permitió cómputos prácticos mejores, pero también porque era el resultado natural de una ciencia cultivada y desarrollada en las escuelas de escribas. Por estas mismas razones, la medición se desarrolló hacia los principios -pero no más- de una geometría teórica.'' [Struik, A Concise History of Mathematics, p. 18]

Muchas de las matemáticas en las culturas orientales deben buscarse en esas realizaciones prácticas precisamente, para evaluar el conocimiento matemático de que disponían.

Dos de las civilizaciones de la Edad del Bronce relevantes para la historia de las ciencias y las matemáticas, importantes nutrientes de las matemáticas griegas, fueron la egipcia y la babilónica, pueblos que ocuparon regiones alrededor de importantes ríos: respectivamente, alrededor del Nilo y alrededor del Tigris y Éufrates. En el caso de estos últimos, es necesario decir que no se trataba de una sola civilización sino, más bien, de varios pueblos alrededor de las regiones mencionadas. A pesar de ello, se considera que, en relación con las matemáticas, hubo cierta continuidad y una tradición desde los tiempos más remotos hasta la conquista de esos territorios por parte de los macedonios.



Nefertiti y familia.

1.1 Egipcios

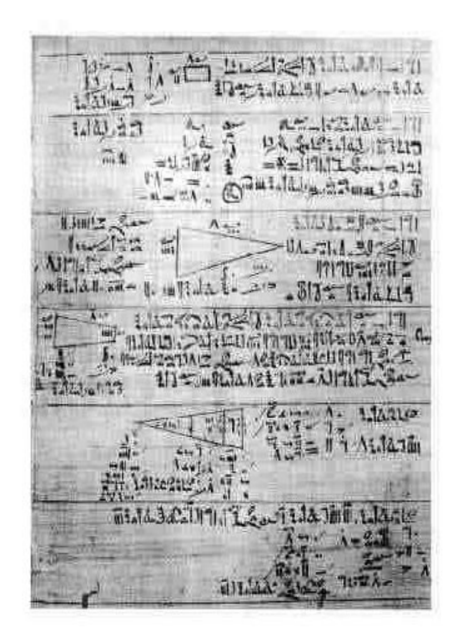
La historia de las matemáticas en Egipto, aunque diferente de la de los babilonios, no trascendió los límites prácticos y la evidencia empírica en sus construcciones teóricas.



Gran pirámide, vista aérea.

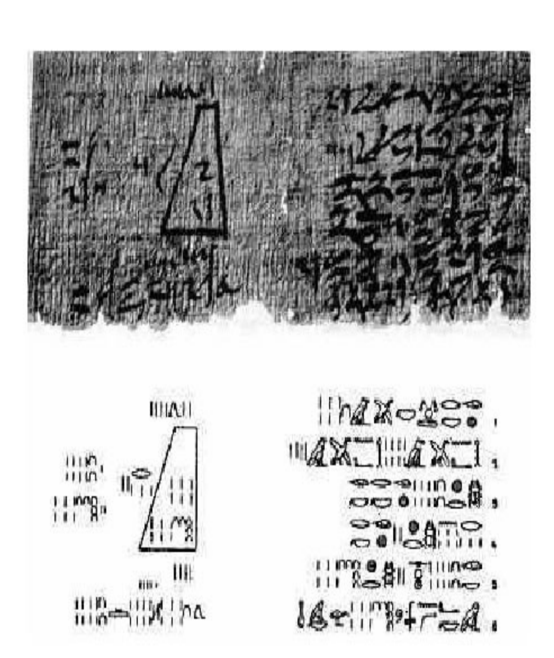
Según la opinión de los historiadores, Egipto nace alrededor del año cuatro mil a.C. y su máximo esplendor se dio alrededor del año 2 500 a.C. Al igual que con Mesopotamia, la civilización siguió un curso que se vería drásticamente alterado solo hasta la conquista macedonia.

Las principales referencias que tenemos en relación con las matemáticas egipcias son documentos escritos sobre papiro, un material frágil, por lo que realmente se tiene muy poca base para una descripción precisa de la naturaleza y los límites de la cultura y las matemáticas de esta civilización.



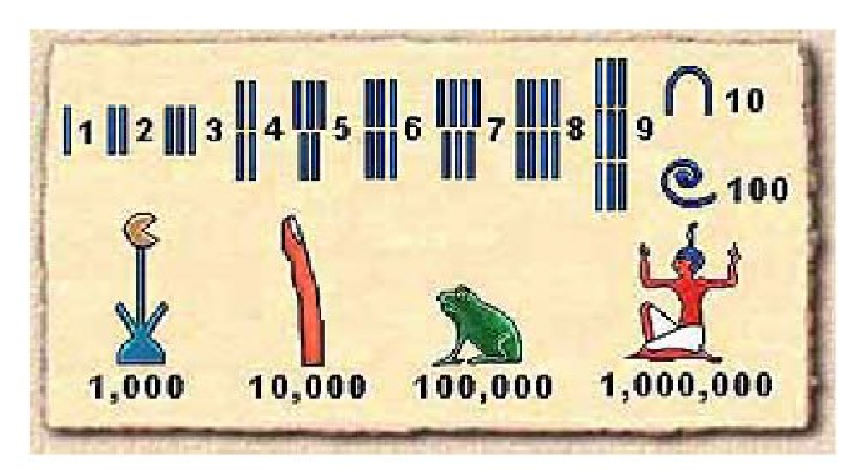
Papiro de Rhind.

Uno de los papiros sobrevivientes es el llamado papiro de Moscú (se encuentra en el Museo de Bellas Artes de Moscú), otro el papiro Rhind -en honor de Henry Rhind- también llamado el papiro Ahmes, el nombre supuestamente del autor (este último en el Museo Británico). Se ha cifrado el año 1 650 a.C. para este último, y 1 850 a.C. para el primer papiro.



Papiro de Moscú.

En relación con el primero, aparecen 87 problemas y sus soluciones, en el segundo 25.



Números en Egipto.

Según la opinión de los historiadores, las matemáticas que aparecen en estos papiros ya eran conocidas por lo menos desde el año 3 500 a.C. Struik hace la siguiente valoración sobre el carácter de estos problemas:

"Estos problemas ya eran erudición antigua cuando los manuscritos fueron compilados, pero hay papiros más pequeños de una fecha mucho más reciente incluso de los tiempos romanos, que no muestran ninguna diferencia en su aproximación. La matemática que ellos profesan es basada en un sistema decimal de numeración con signos especiales para cada unidad decimal mayor, un sistema con el que nosotros estamos familiarizados a través del sistema romano que sigue el mismo principio: $MDCCCLXXVIII = 1\ 878$. Sobre la base de este sistema los egipcios desarrollaron aritmética de un carácter predominantemente aditivo, que significa que su tendencia principal era reducir toda la multiplicación a las sumas repetidas. Por ejemplo, la multiplicación por 13 era obtenida multiplicando primero por 2, luego por 4, entonces por 8, y agregando los resultados de la multiplicación por 4 y 8 al número original." [Struik, D.: A Concise History of Mathematics, p. 20].

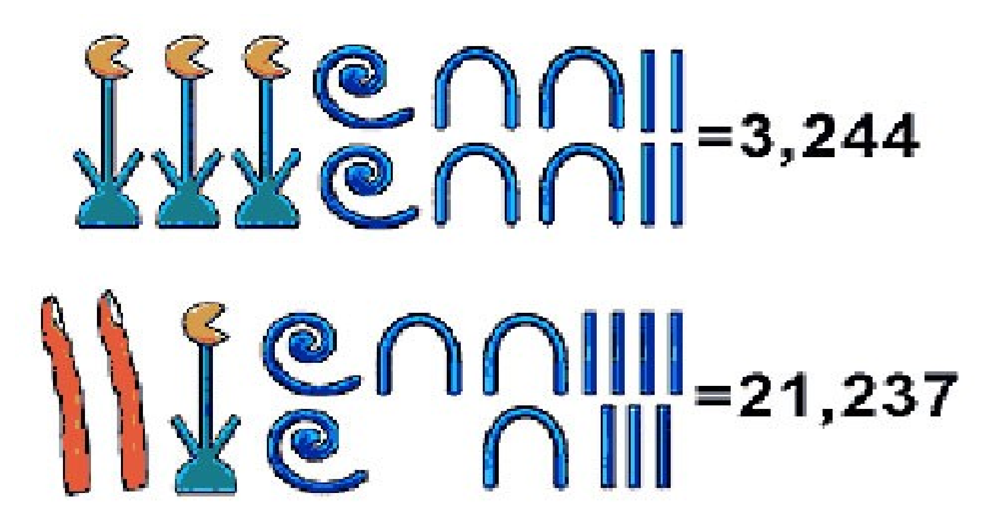


Amenhotep.

Es conocido el hecho de que la escritura egipcia era realizada por medio de los jeroglíficos, lo que también sucedía con los símbolos numéricos. Sin embargo, se puede considerar que usaron 3 sistemas de notación diferentes: jeroglífico, hierático y demótico. El primero mediante imágenes, el segundo simbólico, y el tercero una adaptación de la notación hierática. Se afirma que los dos primeros se usaron desde temprano en la historia egipcia, y precisamente el segundo aparece en los papiros mencionados. La última notación habría sido relevante en los periodos griego y romano de los egipcios.

Los egipcios poseían una aritmética básicamente aditiva, es decir, por ejemplo, reducían la división y la multiplicación a sumas. En la notación jeroglífica usaron símbolos específicos para las potencias de 10. En la hierática, también se usaba las potencias del 10, pero con menos símbolos.

La notación jeroglífica fue sustituida por la hierática.



Números egipcios, ejemplos.

Ahora bien, la multiplicación solo requería conocer la suma y la multiplicación por 2.

Otro detalle interesante es que, salvo en algunos casos, descomponían todas las fracciones en las llamadas fracciones unitarias. Por ejemplo, $\frac{2}{5}$ como $\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$. En el papiro de Ahmes aparece una tabla con la descomposición de fracciones de la forma $\frac{2}{n}$ en fracciones de la unidad. Incluye, entre otros,

$$\frac{2}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18},$$

$$\frac{2}{17} = \frac{1}{12} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68},$$

$$\frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}.$$

A través de esta descomposición los egipcios realizaban operaciones aritméticas con todas las fracciones, en particular multiplicaciones y divisiones. Sin embargo, era un proceso complicado.

Para dividir usaban un método parecido al del mínimo común denominador.

Por otro lado, se piensa que tampoco tuvieron mucha conciencia sobre la naturaleza de los números irracionales.

El método de las fracciones de la unidad permitía ciertas aplicaciones prácticas. En el papiro de Ahmes, en relación con la distribución de panes y al pago a los empleados de un templo.

Los papiros mencionados contenían algo similar a lo que son las ecuaciones lineales en una incógnita. El problema 72 del papiro de Ahmes es:

Si tenemos que intercambiar 100 panes de pesu 10 por un determinado número de panes de pesu 45, ¿cuál es este número determinado?

Hay ecuaciones equivalentes a $x + \frac{1}{4}x = 15.$ Y también sistemas como:

$$x^2 + y^2 = 100$$

$$4x - 3y = 0$$

También situaciones como $cx^2 = d.$

Aunque, debe decirse, siempre expresadas de una manera verbal.

Al igual que con los babilonios encontramos progresiones aritméticas y geométricas.

Sin embargo, no usaron mucho simbolismo.

En relación con la geometría, la opinión más generalizada es que la usaban, al igual que los babilonios, como un instrumento para resolver problemas prácticos. La aritmética y la geometría no aparecían separadas; más bien, lo que se daba era una aplicación de álgebra y aritmética a problemas relacionados con figuras geométricas que emergían en situaciones del entorno.



Museo Egipcio en El Cairo.

Tenían una regla para obtener el área de un círculo; por lo tanto, un método para aproximar π.

Según Herodoto, los resultados geométricos de los egipcios estaban vinculados a asuntos relativos a la propiedad de la tierra creados por las crecidas del río Nilo. Aquí encontramos procedimientos para calcular áreas de rectángulos, triángulos y trapezoides e, incluso, mecanismos para el cálculo del área de un círculo. Se sabe que, también, tenían procedimientos para calcular volúmenes de cubos, cilindros y otras figuras. En particular, un tronco de pirámide cuadrada.

Aparecen tripletes pitagóricos, por lo que alguna familiaridad debían tener con el teorema de Pitágoras.

Mucho de lo que hicieron los egipcios en matemáticas está vinculado a transacciones comerciales, edificaciones, cálculo de superficies, medidas de terrenos, y a diversos asuntos de naturaleza práctica en sociedades asentadas básicamente en la agricultura.



Máscara egipcia.

En relación con la astronomía, la opinión es que su nivel estaba por debajo de los babilonios. No obstante, se reconoce que los egipcios lograron una determinación del año y un calendario bastante útiles. Lo que sí llama la atención es una combinación de astronomía y geometría para la edificación de templos que son hasta nuestros días un símbolo emblemático de esta civilización: las pirámides.

Vamos ahora a incursionar en otra gran cultura.

Números cuneiformes.

1.2 Babilonios

Los registros que se tienen son de naturaleza arqueológica, en arcilla, y, por supuesto, se encuentran limitados de muchas maneras. No nos permiten una visión exacta de las características en que se desarrollaron cultural y matemáticamente. En relación con Mesopotamia, los registros más antiguos datan del 3 500 a.C. y terminan en el 539 a.C, fecha en la que estos territorios fueron conquistados por Persia.



Neoasirios.

Hay alrededor de 500 000 tablillas de arcilla que constituyen las fuentes principales de la cultura babilónica, y entre ellas unas 500 son de interés para las matemáticas. La mayoría de los registros de que se dispone son del periodo llamado Antiguo, más o menos alrededor del 2 500 a.C.

El sistema cuneiforme de escritura fue descifrado a mediados del siglo XIX por George Frederick Grotefend y Henry Creswicke Rawlinson.

La aritmética más desarrollada en la civilización Mesopotámica fue la Acadiana. Dos de las características más importantes de su sistema numérico fueron la base 60 y la notación posicional. No obstante, debe señalarse que los babilonios no usaban solamente la base 60. En ocasiones, aparecía la base 10, pero otras bases también. Al igual que sucede con otras culturas y sistemas numéricos, con los babilonios se dio una forma combinada de sistemas numéricos determinados por circunstancias históricas o incluso regionales. En lo que sí parece haber consenso es que se dio el uso bastante sistemático de la base 60 para todos los cálculos relacionados con la astronomía. Esto debe subrayarse:

"Tanto el sistema sexagesimal como el sistema del valor del lugar han permanecido en posesión permanente de la humanidad. Nuestra división presente de la hora en 60 minutos y 3 600 segundos data de los sumerios, al igual que nuestra división del círculo en 360 grados, cada grado en 60 minutos y cada minuto en 60 segundos. Hay razón para creer que esta opción de 60 en lugar de 10 como una unidad ocurrió en un esfuerzo por unificar sistemas de medida, aunque el hecho de que

60 tiene muchos divisores también puede haber jugado un papel. Acerca del sistema del valor posicional, su importancia permanente se ha comparado con el alfabeto (ambas invenciones reemplazaron un simbolismo complejo por un método fácilmente entendible por muchas personas). Es razonable suponer que hindúes y griegos obtuvieron las rutas de las caravanas hacia Babilonia; también sabemos que los académicos musulmanes lo describieron como una invención india. La tradición babilónica, sin embargo, puede haber influido en la aceptación tardía del sistema posicional." [Struik, A Concise History of Mathematics, p. 26].

No poseían sin embargo el cero, ni tampoco algún símbolo para expresar la diferencia entre la parte entera y la fraccionaria de un número. Estos problemas implicaban cierto nivel de ambigüedad en el sistema numérico. De hecho, se afirma que -aunque lo usaban- no se trataba de un sistema posicional absoluto.

Para los babilonios, los símbolos fundamentales eran del 1 al 10 y los números del 1 al 59 se formaban combinando algunos de estos símbolos.

1/2

1/3

2/3

5/6

Fracciones cuneiformes.

Sumar y restar era un proceso de poner o quitar símbolos.

La multiplicación se hacía más o menos como se hace hoy; de hecho, dividir era multiplicar por el inverso. Usaban tablas para obtener los inversos.

En algunos problemas concretos aparecen las progresiones aritmética y geométrica.

Se sabe también que los babilonios podían expresar cuadrados, cubos, raíces cuadradas, cúbicas; eso sí: a través de tablas. En efecto, por medio de las tablas podían resolver ecuaciones de la forma:

$$ax^3 + bx^2 = c$$

También resolvían la ecuación $ax = c$ como nosotros lo haríamos.

Los babilonios estaban en posesión de la fórmula cuadrática. Resolvían ecuaciones como

$x^2 + bx = c$

$x^2 - bx = c$

siempre con $b > 0$ y $c > 0$.

También hay ejemplos de solución de la general

$$ax^2 + bx = c.$$

Existen otros ejemplos de ecuaciones con 3 incógnitas, pero simples.

$x^2 + y^2 + z^2 = 1\,400,$ con $x - y = 10$ y $y - z = 10.$

No tenían números negativos, por lo tanto, no eran aceptadas las raíces de ecuaciones cuadráticas con soluciones negativas.

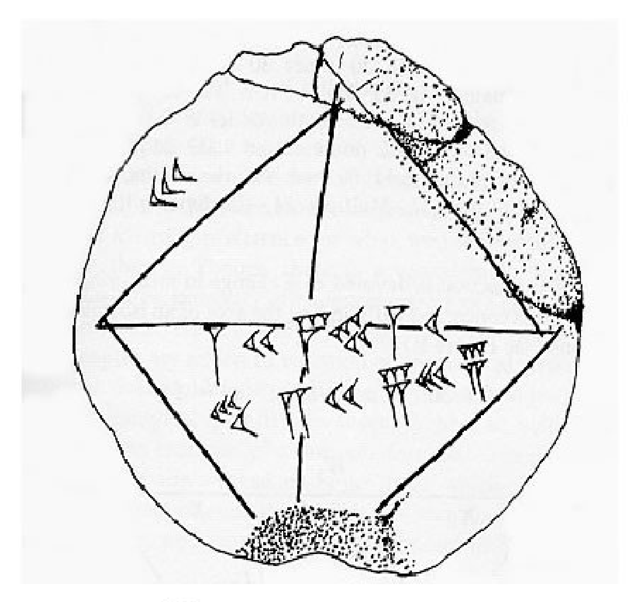
No obstante, se supone que sí podían calcular con números irracionales. De hecho, realizaron un cálculo aproximado asombroso: el de la $\sqrt{2}$. Una tablilla ubicada actualmente en la Universidad de Yale, nos indica que los babilonios lograron desarrollar un algoritmo para determinar aproximadamente el valor de $\sqrt{2}$, mediante la expresión

$$\sqrt{a^2 + b^2} \approx a + \frac{b}{2a}.$$

Este algoritmo permitió obtener la siguiente aproximación:

$$\sqrt{2} \approx 1,24511035.$$

¿De qué manera los babilonios obtuvieron esta expresión? El análisis de las tablillas babilónicas permite conjeturar el procedimiento utilizado.



$\sqrt{2}$ en tablilla babilónica.

Es importante subrayar que los problemas algebraicos sólo podían establecerse y, por supuesto, resolverse, de una manera verbal.

En ocasiones, los babilonios emplearon símbolos para las incógnitas pero sin conciencia sobre el significado de ello.

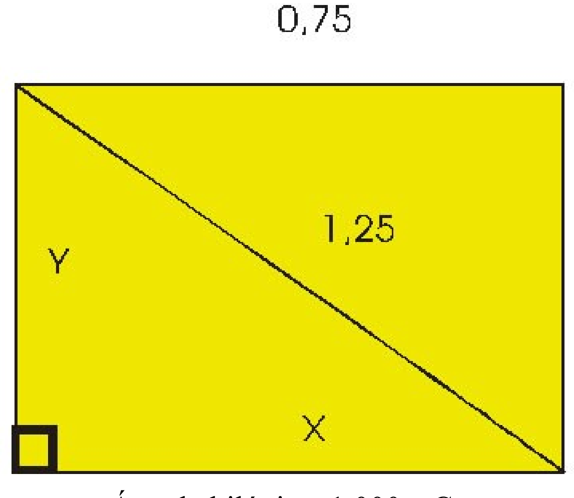
En lo que se refiere a la geometría, para los babilonios ésta no se estudiaba por sí misma, no se consideraba tampoco una disciplina separada, y siempre en relación directa con problemas concretos surgidos del entorno. Sin embargo, conocían las áreas de rectángulos, de triángulos rectángulos, isósceles, trapecios (un lado perpedicular a dos paralelos).

Se conoce el uso de algunos tripletes pitagóricos. Es decir, se puede decir que conocían y usaban el teorema de Pitágoras. Por ejemplo, hay un problema en una tablilla que se encontró en Susa que plantea:

Hallar el radio del círculo circunscrito al triángulo de lados 50, 50 y 60.

La solución usaba el teorema. Hay otro registro más o menos del año 1 000 a.C. en que se ofrece una solución más detallada y con una lógica geométrica innegable:

Hallar la longitud y anchura de la siguiente figura, dadas 0;45 (0,75) y diagonal 1;15 (1,25). [El ";" es la notación del investigador Otto Neugebauer para separar la parte entera de la fraccionaria, nuestra coma, solo que en forma sexagesimal (en su libro Mathematische Keilschrift-Texte).]



Área babilónica, 1 000 a.C.

Tenían conocimiento de algunas propiedades de los triángulos semejantes.

Se dice que conocían el siguiente teorema:

"En un triángulo rectángulo, al trazar una perpendicular desde el ángulo recto hasta la hipotenusa, los triángulos que se forman a cada lado de esta perpendicular son semejantes entre sí y al triángulo entero".



Trapezoide babilonio.

Ese teorema lo consigna Euclides. Algunos autores opinan que sobre esto Euclides tuvo que haber tomado fuentes babilónicas.

De manera general, en las matemáticas babilonias tanto en la aritmética, el álgebra como en la geometría, las reglas eran establecidas por la prueba y el error, con sustento en la experiencia práctica. No hay evidencia de la idea de estructura lógica, o la de la demostración, o de la necesidad de ofrecer una justificación más allá de lo que la práctica o la evidencia física permitían.

Si se posee la mentalidad deductiva y axiomática que impondrá Grecia y que luego permearía Europa, se empujaría una tendencia a considerar este tipo de resultados como elementales o rudimentarios. Sin embargo, aquí hay un debate. Por ejemplo, porque los métodos de demostración que se pueden asumir como válidos no necesariamente deben establecerse solamente por el recurso a la deducción a partir de primeros principios, por más valiosa y necesaria que ésta pueda ser. La repetición sistemática, el uso, la contrastación con ejemplos o la búsqueda de contraejemplos podrían ser alternativas para asegurar la validez de un resultado.

En todo caso, aunque en geometría hay, también, resultados relevantes, en cuanto al álgebra y la aritmética, no se puede negar que poseían una impresionante sabiduría. Como veremos, el álgebra y la aritmética se verían sometidos a criterios más bien de naturaleza ideológica en el mundo griego, debilitando su progreso.

Si queremos resumir las contribuciones de estas dos civilizaciones en las matemáticas, babilonia y egipcia, debemos señalar una aritmética esencialmente de números enteros y de fracciones, aunque hay cálculo aproximado de irracionales, notación posicional, muy poco simbolismo, relevante desarrollo del álgebra y la aritmética en los babilonios, una geometría que consistía esencialmente de fórmulas empíricas, pero que manejaban resultados que luego serían retomados por los griegos (aunque de otra manera). No aparece la idea de prueba o demostración de la forma como la conocemos en la visión occidental y con los ojos de modernidad, o, en general, la preocupación por una estructura lógica, teórica. Esto será importante a la hora de evaluar con justicia la contribución de la civilización griega a las matemáticas y a la ciencia.

1.3 Biografías

Ahmes

Ahmes nació alrededor del año 1680 a. C. en Egipto.

Fue el escriba que hizo el famoso Papiro Rhinds, considerado la base del legado matemático del antiguo Egipto y encontrado por el escocés Alexander Henry Rhinds en 1 858. A pesar de esto, Ahmes nunca se proclamó como el autor del papiro sino sólo como el escriba y además agregaba que el trabajo había sido escrito mucho tiempo antes.

En 1 863, el papiro llegó al Museo Británico y es muchas veces llamado el "Papiro Ahmes", en honor al escriba que murió alrededor del año 1 620 a. C. en Egipto.

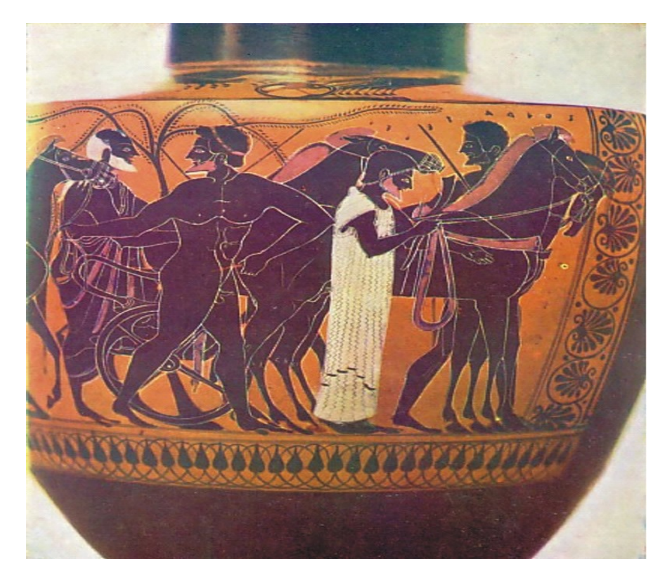
1.4 Síntesis, análisis, investigación

1. Escriba un pequeño ensayo de 2 o 3 páginas explicando lo que usted piensa que son las matemáticas.
2. Obtenga un atlas con los mapas del mundo. Fotocopie los mapas con las regiones que corresponderían a Egipto y a Mesopotamia. Si puede consiga un atlas histórico para estudiar la situación geográfica de las etapas en la evolución de egipcios y mesopotámicos en los albores de la civilización.
3. Investigue la historia de los pueblos asentados en Egipto y Mesopotamia. En no más de tres páginas haga un resumen de las etapas de su historia.
4. Explique la relación entre las crecidas del Nilo y las matemáticas en Egipto.
5. Explique el concepto de fracción unitaria. Dé 3 ejemplos, que no estén en el libro, de fracciones no unitarias que se descomponen en sumas de unitarias.
6. ¿Cómo afectaba las matemáticas babilónicas que no tuvieran símbolo cero y notación para separar la parte entera de la fraccionaria?
7. Explique sintéticamente las ventajas o desventajas de los métodos de prueba-error y deducción para el progreso de las matemáticas.
8. Ha sido opinión persistente la superioridad de las matemáticas mesopotámicas en relación con las egipcias, como lo afirma Struik:

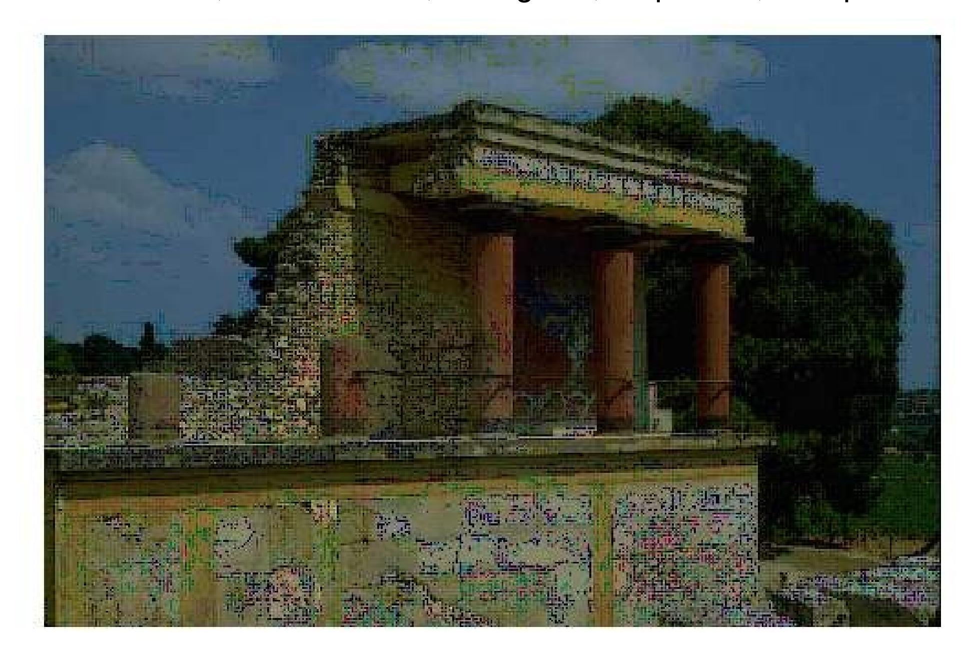
   "La matemática mesopotámica alcanzó un nivel mucho más alto al que la matemática egipcia obtuvo alguna vez. Aquí nosotros podemos descubrir progresos incluso en el curso de siglos. Ya los textos más viejos, desde el último periodo Sumerio (la tercera dinastía de Ur, c. 2 100 a.C.), muestran una habilidad computacional . Estos textos contienen tablas de multiplicar en las que un sistema sexagesimal bien desarrollado de numeración se sobrepuso en un sistema decimal original; hay símbolos cuneiformes que indican 1, 60, 3 600, y también 60^{-1}

CAPITULO II

EL MUNDO GRIEGO PRESOCRÁTICO



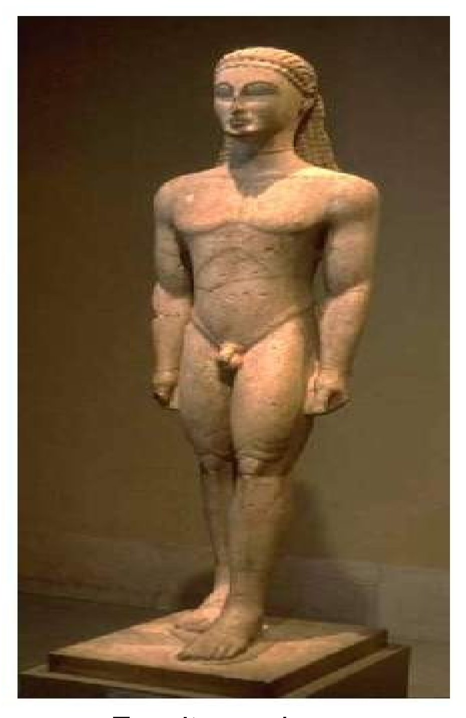
Es imposible negar la gran contribución de la civilización griega a la cultura y la ciencia del mundo; tanto que a veces se subestima el papel jugado por otros pueblos y civilizaciones. El influjo griego es un componente fundamental de la cultura occidental, y de muchas maneras esas contribuciones a lo largo de la historia fueron retomadas, asumidas, sobrestimadas, reconstruidas, corregidas, ampliadas, manipuladas.



Palacio de Minos en Knossos, 16 siglos antes de Cristo.

Para las matemáticas, este influjo es particularmente importante. Primero, porque fueron muchas la contribuciones que en este campo realizaron. Segundo, porque varias dimensiones de lo que son las matemáticas llevan el sello griego: sus concepciones, matices, métodos. De hecho, como sucede en todas las disciplinas cognoscitivas, no son productos aislados al margen de las comunidades específicas, más bien, todo lo contrario: llevan la impronta de sus creadores. Puesto de otra forma: hicieron matemáticas y ayudaron sustancialmente a definir sus límites, sus métodos, sus objetos.

Son varios los momentos y escenarios dentro de la civilización griega que nos interesa considerar. El primero refiere al mundo anterior al filósofo Sócrates, el segundo aquel que gira alrededor de la ciudad de Atenas, el tercero el sumergido en el periodo que abrió Alejandro el Grande: el mundo alejandrino o helenístico. La figura de Sócrates no la usamos como demarcación debido a la relevancia de este filósofo, tantas veces sobrestimada, sino porque simboliza un giro importante en el pensamiento y especialmente en la filosofía griegas, un cambio de objeto: del mundo circundante al hombre y la sociedad. Este giro suele asociarse a circunstancias políticas más generales. Y no siempre los autores coinciden en su signo: positivo o negativo. Para algunos, en una de las etapas, al ser derrotada Atenas por Esparta, se abrió una época de retroceso y conservadurismo, y las ciencias en general se vieron debilitadas. No encontrarían un mejor momento hasta que se inició otra fase, la alejandrina. Para otros, es el apogeo de la filosofía y el pensamiento, un cambio de foco trascendental y decisivo.



Escultura griega.

Sea como sea, usted deberá valorar las opiniones existentes con su propio criterio, hemos decidido usar el corte, por lo demás bastante clásico en la periodización histórica en filosofía, y abordar los asuntos que nos interesan en este libro.

2.1 Los griegos

Se suele establecer el origen de la civilización griega unos 2800 años antes de Cristo, en una región que llegó ocupar el Asia Menor, la Grecia moderna continental, la parte sur de la península italiana, una serie de islas del Mediterráneo y una parte del norte de África.

Unos ocho siglos a.C. los griegos adoptaron el alfabeto fenicio, y tuvieron a su disposición el papiro, con lo que multiplicaron las potencialidades de su construcción literaria y del desarrollo de su conciencia, proyección, e identidad culturales.

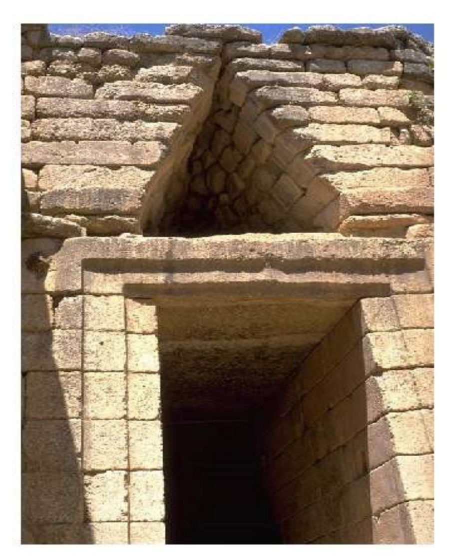
Uno de los elementos importantes de subrayar es una relación comercial muy amplia entre los griegos con los egipcios y babilonios, que permitió la absorción de resultados y tradiciones culturales en un nuevo contexto social, político y económico. La influencia de estas viejas civilizaciones en los pueblos griegos debe tomarse como un punto de partida en la comprensión de los nuevos resultados en el conocimiento y en las matemáticas en particular.

También hay que mencionar el uso del hierro. Como reseña Mason:

"Las nuevas posibilidades que suministraba la introducción del hierro y la escritura alfabética fueron explotadas con la mayor eficiencia por aquellas comunidades que emprendieron un comercio marítimo o bien por quienes emergían directamente de la barbarie, sobrepasando así hasta cierto punto las tradiciones de la civilización de la edad de bronce. Los etruscos y los fenicios, que viajaron hacia el oeste, Asia Menor y el Oriente Medio hasta Italia y el norte de África, eran marinos, pero perpetuaron algunas de las tradiciones de la edad de bronce de su tierra natal, tales como la costumbre de inspeccionar el hígado de los animales sacrificados para fines de adivinación. Los romanos y los hebreos alcanzaron la civilización durante la edad de hierro, pero eran principalmente agricultores, no marinos, y no realizaron notables contribuciones al conocimiento científico. Sólo los griegos constituían un pueblo que había llegado a la civilización de la edad del hierro directamente de la barbarie y que emprendió un comercio marítimo desde el principio." [Mason, Stephen: Historia de las Ciencias 1. La Ciencia Antigua, la Ciencia en Oriente y en la Europa Medieval, pág. 27]

Mileto

Uno de los lugares que tuvo que haber servido como puente entre culturas y pueblos fue Mileto, una ciudad jónica, conectada con los egipcios y fenicios a través del comercio marítimo y con los babilonios a través de caravanas. Jonia fue tomada por los persas en el año 540 a.C. pero Mileto preservó cierta independencia. En el año 494 a.C. los persas aplastaron una rebelión jónica, cuya consecuencia fue una declinación cultural de la región. Años después, en el 479 a.C., Jonia fue recuperada por los griegos, pero nunca se recuperaría el papel cultural que llegó a poseer en la región.



Mycenae, Argolis, Grecia.

La historia griega

Se suele dividir la historia de la civilización griega en dos etapas diferentes: entre los años 600 y 300 a.C., y entre los 300 a.C. y 600 d.C. La primera etapa es la llamada "clásica"; la segunda: la "helenística" o "alejandrina". También es posible hacer una distinción dentro del primer periodo: una subetapa antes del apogeo de Atenas, durante su apogeo, y una etapa posterior. Todo ello se consigna como Antigüedad Clásica, aunque más amplia para algunos autores: "Lo que llamamos Antigüedad clásica -contando de Homero a Damascio- es un periodo de unos catorce siglos." [Sarton, George: Ciencia antigua y civilización moderna, p. 48]

Uno de los problemas más serios para conocer e interpretar los resultados de la civilización griega en las matemáticas y las ciencias son las fuentes, que en general son indirectas: se reducen a algunos códices bizantinos escritos 500 o 1 500 años después, traducciones árabes y versiones latinas basadas en las obras árabes. En todos los casos no puede darse por seguro que los trabajos originales hayan sido preservados y, más bien, es usual la presencia de comentarios críticos, adiciones muchas veces anónimas, y un conjunto parcial, truncado, distorsionado. Esto obliga, de partida, a la prudencia en la consideración del bagaje cultural de la Antigüedad.

Se reconoce como las contribuciones más importantes del periodo clásico los Elementos de Euclides y las Secciones Cónicas de Apolonio. Estas obras fueron escritas de una manera sistemática y deductiva, y han sido asumidas como paradigma de las matemáticas y su construcción. No obstante, adelantando criterios, debe decirse que se trata de obras que no ofrecen una referencia directa a los trescientos años anteriores de construcción matemática, ni a otras fuentes culturales, lo que debilita la naturaleza y los límites de lo que se puede asumir como matemáticas.

Uno de los hechos que debe subrayarse es la forma como se construyeron las ciencias y las matemáticas en ese periodo, y descubrir que tanto en el periodo clásico como en el alejandrino se hicieron a través de mecanismos sociales similares a los que se usan en la ciencia moderna: grupos de investigadores, normalmente pequeños, alrededor de figuras intelectuales dirigentes. Esto se

hizo así en varias ciudades a lo largo del conglomerado griego, y recordamos muchas veces solo las figuras dirigentes, aunque los contextos de descubrimiento y edificación intelectuales deberían ser más amplios.



Diosa serpiente, minoica del 1600 a.C.

No resulta extraño que la primera referencia que nos interesa en las matemáticas griegas la hagamos en Jonia. El gran filósofo Bertrand Russell hace una valoración que nos sitúa en este escenario histórico:

"Homero fue un producto perfecto de Jonia, o sea de una parte del Asia menor helénica y de las islas adyacentes. En cierta época, durante el siglo Vl, hacia al final, los poemas helénicos adquirieron su forma actual. En éste empezaron también la ciencia, la filosofía y las matemáticas griegas. Al propio tiempo ocurrieron acontecimientos de importancia fundamental en otras partes del mundo. Confucio, Buda y Zoroastro (la fecha de Zoroastro es muy hipotética, algunos la sitúan en 1 000 a. C.), si existieron, pertenecen probablemente a dicho siglo. A mediados de él, el Imperio persa fue establecido por Ciro; hacia su final, las ciudades griegas de Jonia, a las que los persas habían concedido una autonomía limitada, iniciaron una rebelión, frustrada, que fue dominada por Darío, y los mejores de sus hombres fueron exiliados." [Russell, Bertrand: Historia de la filosofía Occidental, Tomo I, p. 32]

Se desarrolló en estos territorios una escuela de pensamiento cuya principal característica fue la búsqueda de una explicación naturalista a varios asuntos del mundo circundante. La idea central era que el mundo estaba compuesto por unas pocas sustancias o combinaciones de éstas. Podemos pensar que sus ideas fueron muy primitivas, sin embargo, ¿acaso la química moderna no se basa en algo semejante? Asunto de perspectiva.

Fueron parte de esta "escuela" Thales (c. 640 - c. 546 a.C.), Anaximandro (c. 610 - c. 547 a.C.), Anaxímenes (c. 550 - 480 a.C.), Anaxágoras (c. 500 - c. 428 a.C), y Pitágoras (c. 585 - c. 500 a.C).

El fundador fue Thales de Mileto. Anaximandro y Anaxímenes fueron sus discípulos. Pitágoras que formó su propia escuela al sur de la península itálica recibió formación matemática de parte de Thales directamente. Debe añadirse entre estos intelectuales a Xenófanes de Colofón que fundó un centro en Sicilia del que formaron parte los filósofos Parménides y Zenón, aunque éstos se trasladaron a Elea, dando origen a lo que se suele llamar la escuela eleática.

De acuerdo con Russell:

"La escuela de Mileto es importante, no precisamente por lo que llevó a cabo, sino más bien por lo que inició. Nació del contacto del espíritu griego con Babilonia y Egipto. Mileto era una rica ciudad comercial en la que los prejuicios y supersticiones primitivos estaban atenuados por el trato con muchos otros pueblos. Jonia -hasta que fue dominada por Darío al principio del siglo V- era, desde el punto de vista cultural, la región más importante del mundo helénico. No tuvo apenas contacto con el movimiento religioso de Dionisio y Orfeo; su región era olímpica, pero parece que no le dieron gran importancia. Las especulaciones de Tales, Anaximandro y Anaxímenes se deben considerar como hipótesis científicas, y raras veces señalan intrusiones indebidas de deseos antropomórficos e ideas morales. Los problemas que plantearon eran importantes, y su vigor inspiró a los investigadores posteriores" [Russell, Bertrand: Historia de la filosofía Occidental, Tomo 1, p.48]

Atenas en la Grecia continental constituyó una segunda referencia clave para el conocimiento y las matemáticas. Por un lado, es aquí donde aparecen los sofistas que realizaban una labor de formación y enseñanza a cambio de remuneración económica. Es, también, la ciudad-Estado de Platón y de Aristóteles; el primero fundó la Academia y el segundo el Liceo.

La Academia de Platón ejerció una gran influencia en la filosofía y las matemáticas de la época. De hecho, Aristóteles fue discípulo de la Academia durante muchos años. También estuvo asociado a ésta el gran matemático Eudoxo.

El Liceo tuvo una gran influencia en la siguiente etapa de la civilización griega.

2.2 Escuelas de pensamiento

Thales y la escuela jónica

Varios filósofos presocráticos son parte de esta visión "jónica" de la realidad, que aunque la llamamos así no podemos dejar de afirmar que trababa de individuos más bien aislados.



Thales, estampilla.

La primera referencia que suele ponerse es la de Thales de Mileto, un comerciante que alrededor del siglo VI antes de Cristo se orientó hacia la ciencia. No hay duda de que sus viajes le ofrecieron conocimiento matemático y astronómico de los trabajos de los egipcios y babilónicos.

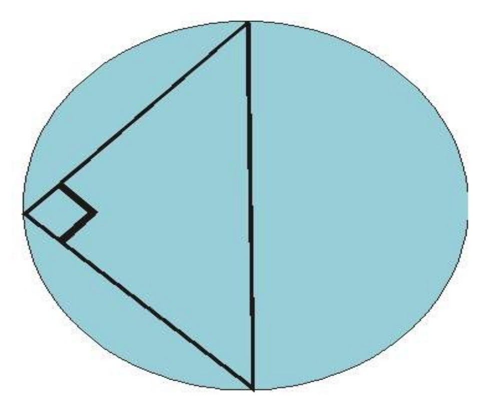
Thales de Mileto nació alrededor del año 624 a.C. en Mileto, Asia Menor, Turquía. Sus padres fueron Examyes y Cleobuline. A pesar de ser ingeniero, parece ser el primer filósofo, matemático y científico griego conocido. Se cree que fue el maestro de Anaximandro y, además, el primer filósofo natural en la Escuela de Mileto.

Se duda la existencia de Thales, porque sus escrituras no sobrevivieron. Se cree que escribió un libro de navegación en donde definió la constelación de la Osa Menor.

Proclus, el último gran filósofo griego escribió que Thales introdujo la geometría en Grecia, proveniente de Egipto.

Thales consideraba que todas las cosas materiales estaban compuestas de agua. Otros, como Anaxímenes de Mileto y Diógenes de Apolonia afirmaron más bien el aire en lugar del agua. Heráclito: el fuego.

A Thales de Mileto se le atribuye la predicción de un eclipse de Sol en el año 585 a.C. Por ello, se le consideró uno de los Siete Sabios de Grecia. También el cálculo de las alturas de las pirámides a través de un método de comparación de sus sombras con la sombra de un palo de conocida altura al mismo tiempo. Es decir, a través del uso de propiedades de los triángulos semejantes.



Semicírculo y ángulo recto.

Un resultado que se le atribuye: dado un punto P en el arco de un semicírculo, subtendido por un diámetro, entonces el ángulo en P es recto. Introducía una demostración basándose en las diagonales de un rectángulo inscrito en un círculo. El asunto planteado es muy sencillo, pero lo relevante habría sido la intención por ofrecer un procedimiento deductivo de prueba. Se afirma precisamente que su principal contribución a la ciencia fue la introducción de demostraciones, aunque se trata básicamente de mostrar las derivaciones lógicas o las evidencias lógicas de unas proposiciones a otras. Esto es importante porque aportaba un requisito o una característica de lo que serían las matemáticas como disciplina.

En los siguientes dos siglos, los filósofos llamados presocráticos continuaron la especulación acerca de la naturaleza del mundo físico. Para Parménides el mundo era inmutable, para Heráclito un lugar lleno de movimiento perpetuo. Se trataba de una dicotomía.

Cosmología

En relación con la cosmología de los jónicos, Rioja y Ordóñez son precisos:

"Lo cierto es que, si bien introducen una manera absolutamente nueva de interrogarse acerca de la naturaleza de las cosas, no se puede considerar que su descripción del mundo suponga un efectivo avance con respecto a babilonios y egipcios (cuyas concepciones muy probablemente conocieron). Cielo en forma de bóveda hemisférica que se erige sobre una Tierra plana o, en lo mejor de los casos, cilíndrica; astros que se encienden al levantarse y se apagan al ponerse; astros ígneos que se dejan ver a través de orificios en el Cielo; etc., todo ello pone de manifiesto una concepción muy primitiva del universo. La extraordinaria innovación que representan sus planteamientos físicos, no tiene su paralelismo en cosmología." [Rioja, Ana y Ordóñez, Javier: Teorías del universo. Volumen I. De los pitagóricos a Galileo, p. 31]



Demócrito, estampilla.

Una cosmología alternativa se supone fue ofrecida por Demócrito. Su teoría atomística afirmaba un vacío sin movimiento, interrumpido solamente por algunas islas de materia. Esta materia era el resultado de una configuración al azar de átomos (sólidos, indivisibles, y eternos). Debido a sus diferentes formas y propiedades, estos átomos producían toda la variedad de las sustancias que existían, además, todas las sensaciones.

Su visión cosmológica se distinguiría de las ideas aristotélicas:

"El universo atomista no es eterno, único, limitado, inmortal, a diferencia del de Aristóteles. Tampoco está gobernado por un principio de orden y de armonía. No tiende teleológicamente a la perfección. Por el contrario, es producto de un juego azaroso, fortuito, ciego, en el que todo es posible porque no obedece a ningún designio o propósito preconcebido (ni siquiera Epicuro y su clinamen o desviación espontánea de la caída vertical de los átomos escapa a esta forma de descripción naturalista). No hay fines, sólo causas mecánicas. En el contexto del pensamiento atomista, la palabra griega cosmos designa algo distinto de lo habitual. En general este término se refiere a la idea de 'mundo ordenado'; de ahí que cosmos se oponga a caos. A su vez la idea de orden conlleva la de jerarquización de las regiones del mundo con arreglo a un criterio de perfección. La fundamental distinción entre Cielo y Tierra, arriba y abajo (en sentido absoluto, no meramente relativo), periferia y centro (centro único, no centros múltiples), es resultado de lo anterior. Pero para que los lugares no sean todos equivalentes, se han de cumplir dos condiciones: primero, que el universo sea finito y, segundo, que sea heterogéneo." [Rioja, Ana y Ordóñez, Javier: Teorías del universo. Volumen I. De los pitagóricos a Galileo, p. 90]

Pitágoras

Al darse las guerras médicas, los desarrollos en ciencia y filosofía se estancaron drásticamente. Durante ellas, en un ambiente más tranquilo, en Italia meridional, en Crotona, se creó la escuela pitagórica: una sociedad o secta científica y religiosa, también política (con un signo conservador, ligada a grupos de filiación aristocrática). Era monástica, pero aceptaba hombres y mujeres con iguales derechos. No había obligación de celibato. El conocimiento generado debía ser considerado una obra colectiva.



Pitágoras, estampilla.

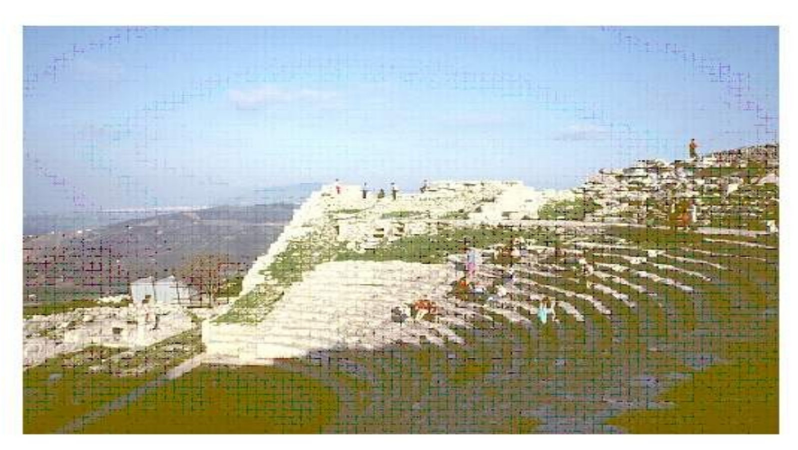
Existía un nivel de secreto en sus enseñanzas. Con el tiempo, despertaron el celo y rechazo políticos en la región, y se vieron obligados a trasladarse a Tarento. Sus ideas penetrarían luego en Atenas.

Russell hace una valoración que debemos tener en cuenta en todo esto:

"Los filósofos del sur de Italia y de Sicilia se inclinaron más al misticismo y a la religión que los de Jonia, que fueron enteramente científicos y escépticos en sus tendencias. Pero las matemáticas, bajo la influencia de Pitágoras, florecieron más en la Magna Grecia que en Jonia; sin embargo, los matemáticos de aquel tiempo mezclaron el misticismo con su ciencia. Parménides estuvo influido por Pitágoras, pero el alcance de esta influencia es mera conjetura." [Russell, Bertrand: Historia de la filosofía occidental, Tomo I, p. 68]

John Bernal hace una valoración dual:

"La escuela de Pitágoras señaló un cambio de rumbo en el desarrollo de la ciencia griega, tanto en la teoría como en la práctica. De ella provienen dos sistemas de pensamiento muy diferentes. Sus aspectos más abstractos y lógicos fueron tomados por Parménides y, entremezclados con muchos ingredientes místicos, se convirtieron en el fundamento del idealismo platónico. En un sentido opuesto, la teoría de los números de Pitágoras recibió un contenido materialista en la teoría atómica de Leucipo de Mileto (745 a. n. e.) y Demócrito de Abdera (420 a. n. e.)." [Bernal, John D.: La Ciencia en la Historia, pp. 195-196]



Teatro griego en Sicilia.

Pitágoras, nacido en la isla de Samos, fundó su escuela en Crotona en el sur de Italia. Todas las referencias que tenemos acerca de los pitagóricos se tienen a través de terceros: Platón, Herodoto, etc. En general, se supone que los trabajos de los pitagóricos fueron desarrollados entre los años 585 a.C. y 400 a.C. Dos miembros relevantes de esta escuela fueron Filolao y Arquitas. Pitágoras en algún momento huyó a Metaponto, donde fue asesinado, se supone, en el año 497 a.C.

Se suele atribuir a los pitagóricos el primer reconocimiento del carácter abstracto de las matemáticas. Su más famosa idea, tal vez, fue el considerar los números como elementos constituyentes de la realidad. Algo así como que los números eran los átomos del mundo.

También, más allá de Thales, buscaron partir de primeras premisas para deducir lógicamente las proposiciones de las matemáticas. Otro elemento central para la definición de las matemáticas.

Ahora bien, los historiadores de las matemáticas piensan que es importante considerar diferentes momentos en las ideas y resultados de los pitagóricos. En las primeras etapas esta consideración de los números como constituyentes de la realidad era prácticamente literal, de hecho para los pitagóricos los números eran puntos o nudos geométricos (números triangulares, etc.). En las siguientes etapas hay una mayor persistencia de problemas abstractos. Eudemo afirma que Pitágoras fue el creador de las matemáticas puras. Aunque, debe tenerse en mente, muchos griegos expresamente afirmaron que el origen de las matemáticas estaba en Egipto; por ejemplo, el mismo Aristóteles.

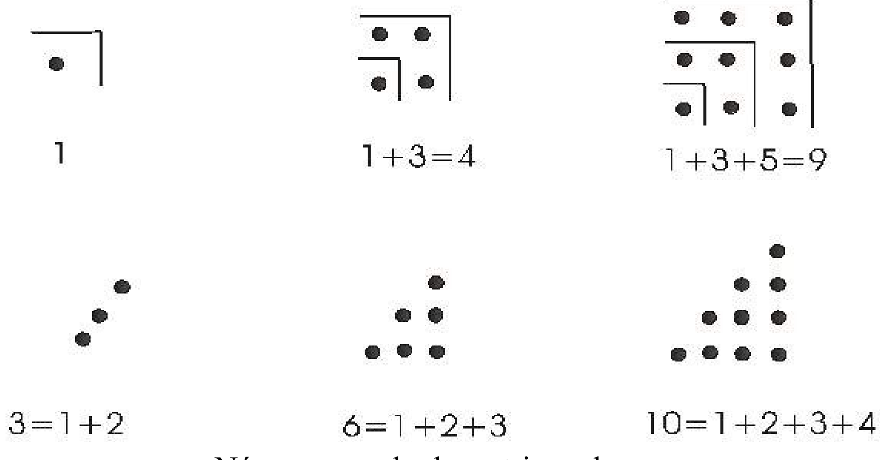
No pueden considerarse totalmente definitivos los límites de la comprensión de la naturaleza de las matemáticas por parte de los pitagóricos; es un hecho, sin embargo, su manejo de los números de acuerdo a la forma como se arreglaban visualmente. Los números 1, 3, 6 y 10 se llamaron triangulares porque se podían organizar en forma de triángulos. Los números 4 y 10 eran favoritos. Los números 1, 4, 9, 16, etc. eran llamados números cuadrados porque se podían acomodar de manera que formaran cuadrados. Los números no primos que no podían ser cuadrados perfectos eran llamados oblongos.

Es interesante señalar que de la forma de acomodar los números se podía extraer algunas propiedades: por ejemplo, que la suma de 2 números triangulares consecutivos es un número cuadrado. Los pitagóricos también trabajaron con números pentagonales, hexagonales y otros más. Un número que era la suma de sus divisores incluyendo el 1 pero no el número mismo era llamado perfecto. Por ejemplo, 6, 28, 496. Aquellos números mayores que la suma de sus divisores eran

llamados excesivos, los menores se llamaban defectuosos. Dos números eran llamados amigables si cada uno era la suma de los divisores del otro. En la figura siguiente, tenemos una fila con números cuadrados:

$$n^2 = \sum_{k=1}^{n} (2k - 1).$$

En la segunda fila, números triangulares. Dos números triangulares sucesivos dan un cuadrado. Un número piramidal es la suma de varios números cuadrados.



Números cuadrados y triangulares.

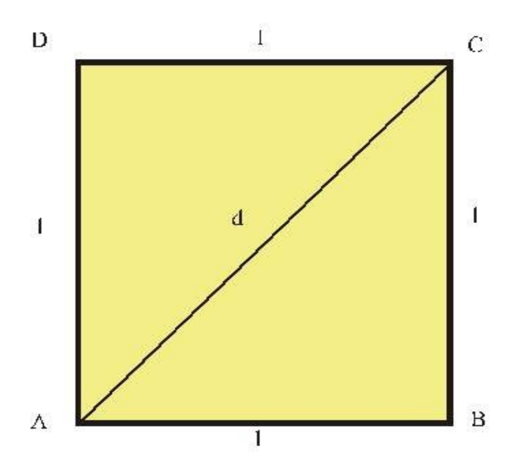
Como conocían la forma de encontrar tres números enteros que podían ser los lados de un triángulo rectángulo, se asume que conocían el teorema de Pitágoras, y de ahí precisamente el nombre de ese famoso teorema. Los pitagóricos también estudiaron números primos, progresiones, razones y proporciones.

Los pitagóricos le dieron mucha importancia a los sólidos regulares, por ejemplo: tetraedro, octaedro, hexaedro, icosaedro etc. Esta "afición" ha perdurado en la historia de las matemáticas.

Ahora bien, un asunto importante, que define el carácter de las matemáticas griegas es la conmensurabilidad de los números. Los pitagóricos solo aceptaban los números enteros. Por ejemplo, las fracciones no eran números. Para ellos, se trataba de una razón entre 2 números enteros, y no una entidad numérica en sí misma. Y aquí es donde entran los irracionales.

Veamos este asunto. Medir un segmento de recta o una figura lineal significa que existe una unidad tal que multiplicada un número entero de veces da la longitud considerada. Una vara de 5 metros es el resultado de multiplicar la unidad metro por 5. Ahora bien, si usted tiene dos varas una con 5 metros y otra con 7 metros, se establece una razón entre las dos varas $5 : 7$. Las longitudes son entonces conmensurables. El asunto clave es si dadas dos longitudes, dos varas, siempre es posible encontrar una unidad que permita establecer ese tipo de razón. Se podría pensar que, haciendo cada vez más pequeña la unidad, se encontrará lo deseado y entonces se podrá asegurar la conmensurabilidad de dos longitudes. Pero eso no es cierto. Los mismos pitagóricos descubrieron que hay longitudes que no son conmensurables. Es decir, los pitagóricos encontraron razones que

no podían ser expresadas como razones entre números enteros. Por ejemplo, aquella entre la hipotenusa y un cateto en triángulos rectángulos. O la razón entre el lado de un cuadrado y su diagonal. La demostración de la inconmensurabilidad de estas longitudes es muy conocida.



Diagonal y lado de un cuadrado.

Un primer testimonio griego escrito sobre la existencia de los números irracionales fue publicado en un Diálogo de Platón, Teetetes o de la Ciencia. Aquí Teodoro de Cirene demuestra que las raíces cuadradas de $3, 5, 7, \ldots, 17$ son irracionales. Teodoro inició con $\sqrt{3}$, pues en la demostración de su irracionalidad presume la irracionalidad de $\sqrt{2}$ (o la inconmensurabilidad de la diagonal de un cuadrado de lado 1), lo que se había realizado anteriormente.

Se supone que estas razones inconmensurables fueron descubiertas por Hipaso de Metaponto, quien pagó con su vida el descubrimiento. Según Aristóteles, los pitagóricos suministraron la prueba de que la raíz cuadrada de dos es inconmensurable, utilizando un método que se llama de reducción al absurdo: un método lógico indirecto.

En nuestro libro Elementos de Cálculo diferencial. Historia y ejercicios resueltos, hacemos esta demostración de la siguiente manera:

"La razón de la diagonal d de un cuadrado y su lado l no es conmensurable (es irracional).

"La demostración que d no es racional se puede hacer de manera "indirecta", considerando lo contrario. Se busca llegar a una "contradicción". Si se llega a una contradicción, lo contrario no es cierto, y se establecería lo que se desea. En términos lógicos: si queremos demostrar la proposición P, asumimos que "no P" es cierta. Mediante deducciones lógicas a partir de "no P" llegamos a una contradicción. Entonces se concluye que "no P" no es cierta y, por lo tanto, P debe ser verdadera. Este método se llama también de reducción al absurdo.

"Vayamos a la demostración: suponga que $\frac{d}{l}$ (la razón de la diagonal y el lado del cuadrado) es conmensurable. Entonces:

$$\left(\frac{d}{l}\right) = \frac{a}{b}$$

donde a y b son conmensurables (enteros) y no tienen factores en común (lo que modernamente se llama ser "primos relativos"). Por el teorema de Pitágoras se tiene

$$d^2 = l^2 + l^2 = 2l^2$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{l^2} = 2 \qquad \Rightarrow \left(\frac{d}{l}\right)^2 = 2.$$

"Por la hipótesis y la ecuación anterior:

$$\left(\frac{d}{l}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2.$$

"Entonces:

$$\frac{a^2}{b^2} = 2$$

$$\Rightarrow \quad a^2 = 2b^2.$$

"Esto significa que

a^2 es par y, por eso, a es también par. Note que b no puede ser par porque si a y b fueran pares, tendrían factores en común (lo que se supuso no era el caso). Entonces b es impar. Por ser par, $a = 2k$ (para algún k entero) y sustituyendo en la ecuación

$$(2k)^2 = 2b^2$$

$$\Rightarrow \quad 4k^2 = 2b^2$$

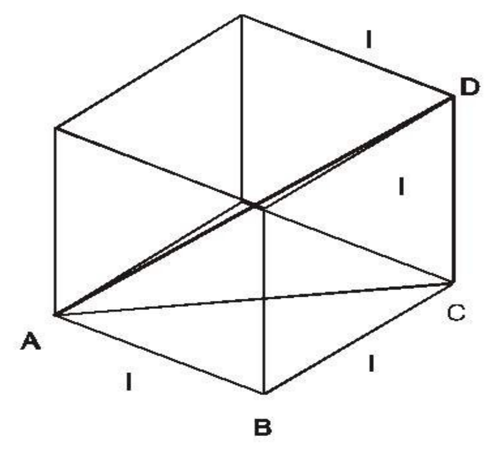
$$\Rightarrow \quad 2k^2 = b^2$$

$\Rightarrow \quad b^2$ es par y, también, b es par. Pero b no puede ser par e impar a la vez.

Por lo tanto, la hipótesis de que $\frac{d}{l}$ era conmensurable nos lleva a contradicción. Entonces $\frac{d}{l}$ no es conmensurable.

"El cálculo de la razón de la diagonal de un cubo y su lado también da un inconmensurable: $\sqrt{3}$.

"Considere el siguiente cubo donde hemos señalado algunos puntos (esquinas): $A,\ B,\ C,$ y $D.$



Diagonal y lado de un cubo.

"Por el teorema de Pitágoras:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$$

$$\overline{AC}^2 = l^2 + l^2 = 2l^2.$$

"Para calcular la diagonal d del cubo, se debe encontrar el segmento $\overline{AD}$. Note que la respuesta está en el triángulo rectángulo

$$d^2 = \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2$$

(por el teorema de Pitágoras otra vez)

$$\Rightarrow \quad \overline{AD}^2 = 2l^2 + l^2 = 3l^2$$

$$\Rightarrow \quad d^2 = 3l^2 \text{ y } \frac{d^2}{l^2} = 3$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{d}{l}\right)^2 = 3 \Rightarrow \quad \frac{d}{l} = \sqrt{3}$$

que resulta ser un irracional". [Ruiz, A. & Barrantes, H.: Elementos de Cálculo diferencial. Historia y ejercicios resueltos, pp. 8-11]

Es interesante señalar que las razones inconmensurables, los números irracionales, fueron utilizados por los babilonios, quienes los aproximaban. Al parecer tanto los babilonios como los egipcios no tenían conciencia de la naturaleza diferente de estos números, aunque los utilizaban. Los griegos, desde los pitagóricos, siempre reconocieron el carácter distinto de los irracionales en relación con otros números.

Una de las consecuencias de la no aceptación de los irracionales por parte de los pitagóricos fue la pérdida de la identificación de los números con la geometría: mientras que en la geometría era válido considerar longitudes, áreas, y diversos tipos de razones, a la hora de establecer relaciones numéricas solo se admitieron aquellas conmensurables. Eso redujo las potencialidades de la geometría, de la aritmética y del álgebra. La geometría griega no era una geometría realmente métrica.

Los pitagóricos obtuvieron resultados sobre triángulos, líneas paralelas, polígonos, círculos, esferas y poliedros, y, por supuesto, el teorema de Pitágoras. Se reconoce que sabían que la suma de los ángulos de un triángulo es 180 grados.

Los historiadores consideran que el concepto de prueba en los pitagóricos solo estuvo presente hacia el final de la evolución de esta sociedad, alrededor del año 400 a.C., y que en los periodos anteriores no era así.

Desde una perspectiva más general se puede mencionar un elemento adicional, que refiere a la cosmología:

"En definitiva es mérito de Pitágoras y sus seguidores haber aproximado la astronomía a la aritmética y a la geometría, pasando por la música (disciplinas todas ellas que integrarán el Quadrivium siglos después). Desde luego aún no se dispone de una astronomía cuantitativa capaz de predecir con exactitud los movimientos celestes. Sin embargo, el papel que se concede a la matemática es muy distinto del que se le atribuía entre babilonios y egipcios. Allí se trataba de realizar ciertas actividades de medición para poder establecer divisiones del tiempo útiles a la agricultura o la navegación; pero lo que no se encuentra es el menor atisbo de relación entre la estructura del mundo y la matemática. O dicho de otro modo, el mundo no obedecía a las propiedades de los números y las figuras sino al designio caprichoso de los dioses. La noción de ley, aplicada a los cuerpos celestes, es una conquista del espíritu griego." [Rioja, Ana y Ordóñez, Javier: Teorías del universo. Volumen I. De los pitagóricos a Galileo, p. 33]

La teoría pitagórica de los números tuvo importantes implicaciones en el desarrollo de las matemáticas, pero, además, al haber asumido un universo ordenado y simétrico también tuvo injerencia en la cosmología: al tratar de descubrir la forma de la tierra y comprender la naturaleza del movimiento de los astros celestes.

¿Por qué las matemáticas eran tan importantes en esta escuela-secta? Una de sus ideas pilares era que Dios no podía crear un mundo imperfecto, y por eso la esfera de los sentidos ofrecía solamente la ilusión. Es decir, apreciamos en los pitagóricos una idea que subestima el papel de la experiencia sensorial y la relación con el mundo empírico, y que busca la certeza y la verdad en la razón, es decir en el examen interno de la mente. Había que buscar la perfección por medio de la introspección (contrapuesta a la observación). Esto es relevante. Es probable que la opinión, ideológica o religiosa, que afirma que es en la mente donde se debe buscar verdad, certeza, y perfección dirigiera a los miembros de esta secta hacia las matemáticas. El éxito obtenido en las

matemáticas habría potenciado su percepción sobre el papel de la introspección frente a la experiencia sensible.

En lo que se refiere a las matemáticas, aunque se conducía a una visión abstracta de éstas y desligada del entorno, el asunto no era tan grave. De hecho, apuntalaba la creación de matemáticas, vista como la actividad que sí aportaba conocimiento. No obstante, si bien afirmaba la geometría deductiva, debilitaba el lugar de las disciplinas matemáticas que requieren más la heurística y la experiencia empírica y social, como la aritmética y el álgebra. El problema más importante con ese enfoque, sin embargo, reside en la ciencia física en general. Con este tipo de ideas se empujaba el criterio de que para descubrir las leyes de la naturaleza bastaba con la introspección sin acudir a la experiencia empírica. Las matemáticas en sí mismas podían dar cuenta del mundo. Sus proposiciones o resultados no eran recursos teóricos por contrastar en el mundo por medio de la observación y la experiencia, sino verdades, y además absolutas y eternas.

Esta tendencia, cuyos orígenes podemos atribuirlos a los pitagóricos, fue retomada y ampliada teóricamente por uno de los más influyentes filósofos de todos los tiempos: Platón.

A la hora de hacer un balance de los pitagóricos, sumas y restas, no se puede evadir la existencia de una combinación de misticismo, religiosidad, sectarismo, rechazo a lo empírico, y sobrestimación de las matemáticas.

Se afirma que Pitágoras viajó a Egipto y Mesopotamia, e incluso llegó tan lejos como la India; lo que explicaría, por ejemplo, la convergencia de algunos aspectos de filosofía y religión que existían entre pitagóricos e hindúes.

La escuela eleática

Parménides de Elea (alrededor de 460 a.C.) fundó una escuela filosófica contraria a los pitagóricos, que afirmaba que el ser era unidad y permanencia. Por eso, nada cambia, todo es permanente. Entonces: no hay diversidad sino unidad.

Sobre Parménides resume Russell:

"La doctrina de Parménides se expone en un poema: Sobre la naturaleza. Consideró los sentidos como engañadores y condenó multitud de cosas sensoriales como mera ilusión. El único ser verdadero es el Único, infinito e indivisible. No es, como en Heráclito, una combinación de contrastes, puesto que no hay tales cosas opuestas. Parece que pensó, por ejemplo, que frío significa solamente no caliente, y oscuro únicamente no claro. El Único no lo concibe Parménides como nosotros a Dios; parece haberlo imaginado material y extenso, porque habla de él como de una esfera. Pero no puede ser dividido, porque el conjunto está presente en todas partes." [Russell, Bertrand: Historia de la filosofía occidental, Tomo I, pgs. 68, 69]

Zenón de Elea fue discípulo de Parménides en el siglo V a. C.



Zenón de Elea.

Zenón nació alrededor del año 490 a.C. en Elea, Lucania, Italia. Se dice que este filósofo fue hijo de Teleutágoras. Se conoce acerca de Zenón por el diálogo Parménides escrito por Platón. Fue alumno y amigo del filósofo Parménides en Elea. Enseñó en la Escuela Eleática, fundada por Parménides, quien tuvo una gran influencia sobre Zenón. De hecho, se afirma que viajaron juntos a Atenas alrededor del año 450 a.C. En su visita a Atenas Zenón fue aclamado debido a sus escritos. Actualmente no se conoce ninguno. Se cree que al volver a Elea de su viaje a Atenas, murió en un intento heroico de luchar contra un tirano para sacarlo de la ciudad.

Murió alrededor del año 425 a.C. en Elea.

Zenón formuló cuatro paradojas: la de la Dicotomía, la de Aquiles, la de la Flecha y la del Estadio.

La primera la incluyó Aristóteles en la Física. La idea es la siguiente:

Un corredor debe recorrer una distancia $\overline{AB}$.

Para lograrlo debe recorrer la mitad de esa distancia

$$\frac{\overline{AB}}{2},$$

y también la mitad de esa mitad, que es

$$\frac{\overline{AB}}{4}$$

luego, la siguiente distancia:

$$\frac{\overline{AB}}{8}, \qquad \frac{\overline{AB}}{16}$$

y así se sigue.

¿Conclusión? Nuestro corredor debe recorrer un número infinito de distancias : $\frac{\overline{AB}}{2}, \frac{\overline{AB}}{4}, \frac{\overline{AB}}{8}, \frac{\overline{AB}}{16} \ldots$

¿Problema? Lo tiene que hacer en un tiempo finito.

Luego: nunca podrá recorrer esa distancia, no hay, entonces, movimiento. ¿Qué sucede?

El problema es el concepto de infinito, en particular realizar una división de manera infinita.

En nuestros tiempos, todo se reduce a calcular la serie:

$$S = \frac{\overline{AB}}{2} + \frac{\overline{AB}}{4} + \frac{\overline{AB}}{8} + \frac{\overline{AB}}{16} + \cdots.$$

que, sabemos, es convergente. Puesto de otra manera:

$$S = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{AB}}{2^k} = \overline{AB}.$$

Existe un vínculo entre el descubrimiento de los inconmensurables y la relación entre lo discreto y lo continuo. Mientras que los números enteros representan objetos discretos, la mayoría de las longitudes no son discretas, en decir no son conmensurables: son continuas. Es esta relación la que abordó Zenón de Elea a través de 4 paradojas. Si bien su objetivo era negar la posibilidad del movimiento (rechazaba que espacio y tiempo eran infinitamente divisibles, con un movimiento sería continuo y suave), también, buscaba atacar la idea de la realidad compuesta de unidades indivisibles (contra el movimiento como una sucesión de saltos), en particular dirigir sus baterías contra los pitagóricos que hacían de los puntos de la geometría unidades indivisibles.

2.3 Los 3 problemas de la Antigüedad

Tres de los retos matemáticos del mundo griego refieren a tres problemas clásicos de construcción: la construcción de un cuadrado igual en área a un círculo dado, la construcción del lado de un cubo cuyo volumen es el doble de un cubo de lado dado, y la trisección de cualquier ángulo. Todos estos problemas por resolver solamente con regla y compás.



Venus Anadiomene, alrededor del 500 a.C.

El tema de la construcción geométrica utilizando solamente regla y compás es altamente relevante para la historia de las matemáticas. Esta restricción, que se añadía a la utilización exclusiva de razones conmensurables, introdujo límites extraordinarios a las matemáticas de la Grecia Antigua. La opinión más generalizada es que la regla y el compás son los análogos físicos de la línea recta y el círculo, figuras privilegiadas en la civilización griega. Debe colocarse este hecho, sin embargo, en una perspectiva relativa: la fuerza de la restricción no pudo haber sido la misma a lo largo de todas las diferentes etapas de la evolución griega. Es decir, en algunos momentos fue mayor que en otros. No pareciera poderse excluir la influencia de la filosofía en todo esto, en particular, como veremos, de Platón.

El intento más viejo para resolver algunos de los famosos problemas clásicos se supone fue hecho por el jónico Anaxágoras. Otro por Hippias, un sofista, contemporáneo de Sócrates, que en su intento de lograr la trisección de un ángulo inventó una curva nueva: la cuadratriz, que no es construible por medio de regla y compás exclusivamente.

Otro resultado fue dado por Hipócrates de Quíos quien se supone aportó la idea de la derivación de unos teoremas a partir de otros más simples, es decir de una manera que luego sería codificada por Euclides como método de organización matemática. Se supone también que este matemático aportó el método indirecto de prueba.

Estos aportes, ideas, especulaciones, teorías, métodos, prejuicios que se plantearon en lo que hemos llamado el mundo presocrático fueron elementos importantes que serían manipulados, respondidos, expandidos, recreados o rechazados en un escenario diferente: el mundo ateniense. Ese es el tema de nuestro siguiente capítulo.

2.4 Biografías



Pitágoras de Samos

Pitágoras de Samos nació alrededor del año 569 a.C. en Samos, Ionia.

Es frecuentemente descrito como el primer matemático puro. Los primeros años de su vida los habitó en Samos.

Se cree que viajó mucho con su padre y es posible que, en uno de éstos viajes, haya visitado entre otros lugares Tiro y que ahí haya sido enseñado por los caldeos y otros hombres sabios de Siria. Sin duda alguna, Pitágoras tuvo una buena educación: aprendió a tocar la lira, aprendió poesía y a recitar a Homero. Entre sus maestros de filosofía estuvo Pherekydes, quien al parecer influyó

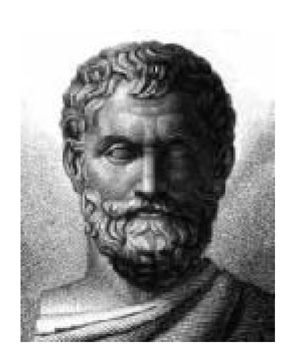
mucho en el trabajo de Pitágoras. También se afirma que tuvo por profesores a Thales y a Anaximandro, ambos de Mileto, quienes contribuyeron al interés de Pitágoras hacia la astronomía, geometría y cosmología.

Aproximadamente en el año 535 a. C. Pitágoras viajó a Egipto y visitó muchos de los templos. Allí, tomó parte de las discusiones efectuadas por los sacerdotes.

En 525 a. C. Cambises II, el rey de Persia, invadió Egipto y Pitágoras fue capturado y llevado a Babilonia como prisionero. Cinco años después Pitágoras fue liberado y regresó a Samos donde fundó una escuela que se llamó Semicírculo. Aproximadamente en al año 518 a. C. Pitágoras se fue a Italia donde fundó una escuela filosófica y religiosa en Croton, en la que eran aceptados tanto hombres como mujeres.

Sus doctrinas influyeron fuertemente a Platón.

Murió alrededor del año 475 a. C.



Thales de Mileto

Thales de Mileto nació alrededor del año 624 a. C. en Mileto, Asia Menor, Turquía. Sus padres fueron Examyes y Cleobuline. A pesar de ser ingeniero, parece ser el primer filósofo, matemático y científico griego conocido. Se cree que fue el maestro de Anaximandro y además el primer filósofo natural en la Escuela de Mileto.

Se duda la existencia de Thales, porque sus escrituras no sobrevivieron. Se cree que escribió un libro de navegación en donde definió la constelación de la Osa Menor. Proclus, el último gran filósofo griego escribió que Tales introdujo la geometría a Grecia, proveniente de Egipto.

Fue una figura de gran prestigio, al ser el único filósofo anterior a Sócrates que perteneció a los Siete Sabios. Estuvo involucrado en política, abogaba por unir los estados separados de Jonia.

Se dice que predijo un eclipse de sol el 28 de mayo de 585 a. C y que supo la altura de las pirámides al medir la sombra de éstas y compararla con la suya.

Murió alrededor del año 547 a. C. en Mileto, Asia Menor.

Leucipo de Mileto

Leucipo de Mileto nació alrededor del año 480 a. C. en Mileto, Asia Menor.

Leucipo fue el creador de la filosofía científica, que posteriormente fue asociada con la ciudad de Mileto; ciudad también conocida por ser un lugar próspero y políticamente miembro de la Liga Delian.

Se conoce muy poco acerca de su vida, pero se cree que fue el fundador de la Escuela de Abdera, en la costa de Tracia cerca del Río Nestos. Algunos filósofos como Protágoras y Epicuro dudaban de la existencia de Leucipo porque afirmaban que nunca habían oído de él.

Por el contrario Aristóteles lo menciona en repetidas ocasiones en sus escritos y además menciona algunas de las citas de sus trabajos. Al parecer, el pensamiento de Leucipo fue influido por las ideas de Zenón de Elea y por Parménides, pero lo que nunca quedó claro fue si Leucipo tuvo a alguno de estos dos filósofos como su maestro.

Demócrito fue el alumno más importante que tuvo Leucipo, a ambos se les atribuye la creación de la teoría atómica.

Murió alrededor del año 420 a. C.

Empédocles de Akragas

Empédocles nació alrededor del año 492 a. C. en lo que es conocido hoy en día como Agrigento, en la costa sur de Sicilia, Italia. Nació en una de las ciudades más bellas de la antigua Grecia, hasta que fue destruida por los cartagineses en el año 406 d.C. Nació en una familia aristocrática con gran poder económico.

Viajó por todo el mundo griego y surgió en él un deseo singular por el aprendizaje.

Fue poeta casi la mayor parte de su vida, en sus poemas afirmaba que la materia de las cosas estaba compuesta por cuatro elementos originales: agua, aire, tierra y fuego.

Fue discípulo de los filósofos griegos Pitágoras y Parménides, de la escuela presocrática de la filosofía griega. Sus ideas, aunque tuvieron una pequeña influencia en el desarrollo de la ciencia, fueron vistas como un importante paso hacia el conocimiento científico actual.

Murió alrededor del año 432 a. C. en Peloponeso, Grecia.



Democrito de Abdera

Democrito nació alrededor del año 460 a. C. en Abdera, Thrace, Grecia. Es muy poco lo que se conoce de Demócrito, su teoría atómica es por la que es reconocido. Leucipo fue su profesor. Es casi un hecho que visitó Atenas siendo muy joven, con el motivo de visitar a Anaxágoras. Su visita no fue grata, debido a que Anaxágoras se negó a verlo y nadie sabía de él ahí. Russell escribe que también visitó diferentes tierras en busca de conocimiento, entre ellas Egipto y Persia. Hay quienes sugieren que también visitó Babilonia, India y Etiopía.

Se conocen sus ideas en física y filosofía gracias a escritos de Aristóteles y de Epicuro. Además escribió tratados de ética. Su aporte a las matemáticas es poco conocido, debido a que ninguna de sus obras ha sobrevivido. A pesar de esto, algunas de sus ideas son conocidas por escritos de Diógenes Laertius y Plutarco.

Murió alrededor del año 370 a. C.

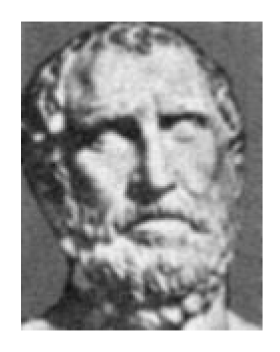


Arquitas de Tarento

Arquitas de Tarentum nació alrededor del año 428 a. C. en Tarentum (ahora Tarento), Italia. Fue matemático, estadista y filósofo. Durante el siglo V a. C. Tarentum se encontraba bajo el control griego, pero siendo la cuidad una fortaleza, Arquitas se convirtió en comandante en fuerzas por siete años, a pesar de que ese puesto no era permitido mantenerlo por más de un año. Fue durante este tiempo que Arquitas adquirió una estrecha relación con Platón, y se cree que Arquitas le salvó la vida a Platón, cuando Dionisio quiso matarlo en Sicilia.

Arquitas fue alumno de Philolaus y fue creyente de la filosofía de Pitágoras. Como pitagórico sus estudios se basaron siempre en las matemáticas. Mas tarde se convertiría en filósofo político y ético, pero siempre basando sus ideas en conceptos matemáticos. Es conocido también como el fundador de la mecánica.

Murió alrededor del año 350 a. C.



Zenón de Elea

Zenón de Elea nació alrededor del año 490 a. C. en Elea, Lucania, Italia. Se dice que este filósofo fue hijo de Teleutagoras.

Se conoce acerca de Zenón por el diálogo Parménides escrito por Platón. Fue alumno y amigo del filósofo Parménides; demás, estudiaba con él en Elea.

Enseñó en la Escuela Eleática, fundada por Parménides, el cual fue una gran influencia grande para Zenón. Viajaron juntos a Atenas alrededor del año 450 a. C. En su visita a Atenas, Zenón fue aclamado debido a sus escritos. Actualmente no se conoce ninguno.

Se cree que al volver a Elea de su viaje a Atenas, murió en un intento heroico, al luchar con un tirano para sacarlo de la ciudad.

Murió alrededor del año 425 a. C. en Elea, Lucania, Italia.



Anaxágoras de Clazomenae

Anaxágoras de Clazomenae nació en el año 499 a. C. en Clazomenae, Lydia, Turquía. Vivió la primera parte de su vida en Ionia en donde estudió filosofía y se interesó por el estudio científico del mundo. Provenía de una familia rica, pero renunció a su riqueza para dedicarse a lo que realmente le interesaba: la ciencia.

Es famoso por ser el que introdujo a Atenas la filosofía, cuando se mudó ahí alrededor del año 480 a. C. En su estadía en Atenas, Pericles asumió el poder del imperio ateniense y se volvieron bueno amigos, pero la amistad tuvosus inconvenientes cuando los oponentes políticos de Pericles se volvieron en contra de Anaxágoras también.

Alrededor del año 450 a. C. Anaxágoras fue encarcelado por afirmar que el sol no era un dios y que la luna reflejaba la luz del sol; así como poco después explicaría correctamente como sucedían los eclipses de sol y de luna. Anaxágoras fue liberado de la cárcel con la ayuda de Pericles, pero tuvo

que abandonar Atenas. Regresó a Ionia en donde fundó una escuela en Lampsacus.

Murió en el año 428 a. C. y su aniversario de muerte significó una celebración para los niños de la escuela que fundó.

2.5 Síntesis, análisis, investigación

1. Con ayuda de un mapa del mar Mediterráneo, investigue dónde estaban las siguiente ciudades: Mileto, Esparta, Atenas, Éfeso, Samos, Quíos, Abdera, Clazómenas.
2. ¿Entre cuáles siglos se movieron respectivamente los periodos clásico y alejandrino de la civilización griega?
3. ¿Cómo resumiría usted la característica fundamental de los pensadores jónicos en relación con el conocimiento?
4. Mencione dos contribuciones de Thales al conocimiento.
5. Explique la noción de inconmensurabilidad.
6. En su opinión, ¿cuáles son las principales diferencias entre la visión desarrollada por los pitagóricos sobre el mundo y la que poseían los babilonios y egipcios?
7. Explique la relación que existe entre conmensurabilidad y aquella entre lo discreto y lo continuo.
8. Investigue qué significa construir un cuadrado igual en área a un círculo dado. Use bibliografía adicional.
9. Comente la relación entre introspección y experiencia empírica en la metodología cognoscitiva de los pitagóricos.
10. Estudie con cuidado la siguiente cita de gran filósofo del siglo XX Karl Popper:

    "Heráclito fue el filósofo que descubrió la idea de cambio. Hasta esa época, los filósofos griegos, bajo la influencia de las ideas orientales, habían visto al mundo como un enorme edificio, en el cual los objetos materiales constituían la sustancia de que estaba hecha la construcción. Comprendía ésta la totalidad de las cosas, el cosmos (que originalmente parece haber sido una tienda o palio oriental). Los interrogantes que se planteaban los filósofos eran del tipo siguiente: '¿de qué está hecho el mundo?', o bien: ¿cómo está construido, cuál es su verdadero plan básico?' Consideraban la filosofía o la física (ambas permanecieron indiferenciadas durante largo tiempo) como la investigación de la 'naturaleza', es decir, del material original con que este edificio, el mundo, había sido construido. En cuanto a los procesos dinámicos, se los consideraba, o bien como parte constitutiva del edificio, o bien como elementos reguladores de su conservación, modificando y restaurando la estabilidad o el equilibrio de una estructura que se consideraba fundamentalmente estática. Se trataba de procesos cíclicos (aparte de los procesos relacionados con el origen del edificio; los orientales, Hesíodo y otros filósofos se planteaban el interrogante de '¿quién lo habrá hecho?'). Este enfoque tan natural aun para muchos de nosotros todavía, fue dejado de lado por la genial concepción de Heráclito.

Según ésta, no existía edificio alguno ni estructura estable ni cosmos. 'El cosmos es, en el mejor de los casos, una pila de basuras amontonadas al azar', nos declara Heráclito. Para él, el mundo no era un edificio, sino, más bien, un solo proceso colosal; no la suma de todas las cosas, sino la totalidad de todos los sucesos o cambios o hechos. 'Todo fluye y nada está en reposo'; he ahí el lema de su filosofía". [Popper, K. R.: La sociedad abierta y sus enemigos, pp. 26, 27.]

Explique en qué se diferenciaba la posición de Heráclito en relación con los filósofos previos.

11. Considere las siguientes dos citas sobre la escuela eleática:

"Parménides fue el filósofo de la razón pura. Atacó violentamente a la ciencia observacional y experimental en su conjunto, proclamando que tales estudios sólo podrían dar lugar a opiniones inciertas, debido a la falibilidad de los sentidos, en tanto que las verdades relativas al número y apreciadas por la razón pura, eran absolutas. La exigencia de que la verdad absoluta y la certeza no se encuentran en los sentidos falibles -en 'los ojos ciegos, en los oídos resonantes de ecos'-, expresa la profunda necesidad de asirse a algo estable, cosa que se presenta siempre en épocas de perturbación, habitualmente en quienes llevan las de perder." [Bernal, John D.: La Ciencia en la Historia, pp. 196-197]

"El discípulo de Parménides, Zenón, atacó el fundamento mismo de las matemáticas y la teoría física de Pitágoras, planteando cuatro ingeniosas paradojas que parecen probar lógicamente que el tiempo y la distancia no pueden ser continuos ni discontinuos. Si el espacio es continuo, entonces el corredor nunca puede llegar a la meta. Si se halla a la mitad del recorrido, tardará cierto tiempo en recorrer la mitad de la distancia que le falta, y así ad infinitum. Si el espacio es discontinuo, entonces la flecha jamás se podrá mover, ya que tendrá que estar en un punto o en el siguiente, sin que haya nada entre ambos puntos. Las paradojas de Zenón no fueron enteramente inútiles, ya que con ellas empezó la exigencia de buscar el rigor en las matemáticas. Dichas sutilezas eran tomadas como prueba de que el mundo visible no podía existir realmente, pero también vinieron a servir para mostrar que la razón pura puede ser más necia y vana que cualquier invención de los sentidos." [Bernal, John D.: La Ciencia en la Historia, pp. 197-198]

Explique cuáles son las ideas de Parménides según el texto. Explique las pretensiones de Zenón con sus paradojas y sus implicaciones en las matemáticas.

12. El siguiente pasaje es de una novela recientemente escrita por un filósofo español y refiere al infinito, a las paradojas y a la visión que tenía Aristóteles sobre ellas. Estudie con cuidado el pasaje.

"Quizá la labor mas lograda de los tiempos de Estagira, la que menos trabajos posteriores ha requerido, fue la recogida en los libros físicos. Quedé satisfecho de mi teorización del infinito, el cual puede ser pensado mediante la suma o mediante la división. En la naturaleza todo es infinitamente divisible, aunque nada está dividido en acto en infinitas partes. Sólo así podemos resolver la famosa aporía de Aquiles y la tortuga. Sabrás, Antípatro, que los filósofos gozamos jugando con experimentos mentales. Pues bien, algunos han puesto a competir a Aquiles, el de los pies alados, el más veloz guerrero de la Ilíada, con una lenta tortuga, y resulta -en la mente de estos filósofos, claro- que si el guerrero otorga la más

mínima ventaja al animal, jamás podrá alcanzarle de nuevo. Según ellos, es maravilloso, sorprendente, inexplicable, lo que de hecho ven nuestros ojos, es decir, que cualquiera puede adelantar a una tortuga. Y lo es porque nuestra mente -más bien la suya- dice que este adelantamiento debería ser imposible. A ver -razonan-, ¿no es verdad que cuando Aquiles quiera llegar a la altura de la tortuga ésta ya habrá recorrido una distancia, por corta que sea?, ¿y no es cierto que cuando Aquiles haya cubierto esta nueva separación la tortuga ya se habrá distanciado otro trecho, más corto, pero apreciable aún, y así hasta el infinito? En resumen, el guerrero veloz se irá acercando más y más a la tortuga, pero jamás le dará alcance, pues cada vez que llega al punto en el que estaba la tortuga, ésta se habrá distanciado ya un mínimo de él, y así hasta el infinito. A esta dificultad extravagante se llega por pensar que la distancia que separa a ambos corredores está dividida de hecho en infinitas partes. No es así aunque es cierto que es infinitamente divisible, no está infinitamente dividida en acto. Así pues, el homérico soldado no tiene que acercarse al quelonio por infinitos pasos infinitamente pequeños, sino a zancadas más veloces y amplias que las del torpe animal. Ni siquiera el tiempo en que se produce la carrera está en acto dividido en infinitos instantes. No habría tiempo, Antípatro, si no corriese Aquiles, si no girasen los astros o las bestias de carga, si no latiese velocísimo el corazón de los pájaros, si no se sucediesen los inviernos, las floraciones, las generaciones. Sin movimiento no habría tiempo, como tampoco lo habría sin una mente que lo compute. Hay que contar las vueltas de la Luna, los giros de los bueyes, los golpes del corazón, los inviernos -sesenta y pocos inviernos-, las flores de las flores, las generaciones. Sin memoria, sin contador que numere el número de las ocasiones, no hay tiempo. El tiempo es, pues, esa peculiar relación entre lo que sucede y quien lo cuenta, entre la realidad y su memoria. Mienten los magos que hablan del eterno retorno; nada sucede dos veces, pues la segunda es segunda porque en algún rincón del cosmos algo o alguien ha cambiado y se acuerda de que hubo una primera y la tiene delicadamente registrada en la memoria, en su cambiante memoria. Si nadie cuenta no hay veces, hay una sola y quieta nada. El tiempo transcurre, pues, no como en una línea sin fin, sino al modo en que se suceden los aros de los árboles el último incluye a todos los demás; el último, el actual, lo es todo y la memoria de todo. Y cuando la muerte llega, es el primero en recibir el golpe seco del hacha." [Marcos, Alfredo: El testamento de Aristóteles, memorias desde el exilio, págs. 202-203]

Explique cuál es la respuesta que ofrece Aristóteles a la paradoja de Zenón sobre el movimiento.

CAPITULO III

ATENAS



En las guerras contra los persas, las ciudades griegas dispersadas en el Mediterráneo encontraron en Atenas una ciudad dirigente política y culturalmente. Durante unos 150 años fue un centro formidable para la expansión de la cultura y el pensamiento. Al acabar las guerras, Pericles gobernó durante más de 30 años (c. 466 - 428 a.C.), con una voluntad que nutrió la literatura, la filosofía, las ciencias y las artes. Es la ciudad asociada a los nombres de Sócrates, Platón, Aristóteles, Epicuro. También del arquitecto y escultor Fidias. Allí estaban Esquilo, Sófocles, Eurípides y Aristófanes. No nos podemos olvidar de Herodoto, el gran historiador. ¿Y en las matemáticas? Hipócrates de Quíos, Eudoxo, Anaxágoras. No todos eran atenienses, es más, la mayoría -debe decirse- eran de fuera. Pero Atenas era su plataforma cultural de base.

A pesar de la derrota que sufriría en manos de los espartanos, en las guerras del Peloponeso (431 - 404 a.C.), Atenas continuó siendo un vigoroso centro de referencia para todo el mundo heleno. Esto llegaría a cambiar solamente hasta las conquistas macedónicas (Alejandro el Grande), abriendo el mundo alejandrino, cuando sería sustituida por Alejandría en Egipto. Pero volvamos a las matemáticas y la filosofía.

La especulación de los presocráticos enfatizaba las hipótesis físicas. Esta tendencia va a ser contrastada por Sócrates, quien afirmaba que lo importante era enfocar la reflexión hacia el hombre en lugar del universo.

Entonces, con esa perspectiva, el objetivo fundamental en la indagación cognoscitiva debería ser asuntos como la verdad, la justicia, y la virtud en la conducta humana.

Aunque se suele atribuir a Sócrates este giro, hay investigaciones y autores que afirman una interpretación distinta, incluso ofreciendo al filósofo Jenófanes un papel especial. Popper señala:

"Jenófanes era poeta y rapsoda, así como historiador, tal vez el verdadero padre de la historia. Como pensador de enorme creatividad, usualmente crítico y único por su autocrítica, se convirtió en el fundador de la ilustración griega. Desarrolló la cosmología de Anaximandro al defenderla en contra de Anaxímenes. Su originalísima teología racionalista estaba íntimamente ligada a la cosmología, a la que puede haber llegado al final de su vida por influjo de los descubrimientos astronómicos de Parménides. Era un crítico literario, quizá el primero, y un moralista. Fue el fundador de lo que hoy se considera geología y meteorología. Era un crítico agudo, una vez más el primero, de la sociedad y las instituciones sociales. Y, lo que resulta de importancia crucial para la ciencia y la filosofía de Occidente, fue el fundador de la epistemología, la teoría del conocimiento. Sin embargo, la mayoría de estas grandes contribuciones a nuestra civilización, si no todas, se han atribuido a otros, se han ignorado, se han olvidado o sencillamente se han entendido equivocadamente". [Popper, Karl R.: El mundo de Parménides. Ensayos sobre la ilustración presocrática, p. 55, 56]

Y, además:

"Podemos decir que la teoría de Jenófanes acerca del conocimiento humano contiene los siguientes puntos:

1. Nuestro conocimiento consta de enunciados.

2. Los enunciados son o bien verdaderos o bien falsos.

3. La verdad es objetiva. Es la correspondencia del contenido de un enunciado con los hechos.

4. Aunque expresemos la verdad más perfecta, no podemos saberlo; esto es, no podemos saberlo con certeza. Nunca podremos tener razones suficientes.

5. Dado que, en el sentido usual de la palabra, 'conocimiento' significa 'conocimiento cierto', no puede haber conocimiento. Sólo puede haber conocimiento conjetural, 'pues todo no es sino una maraña de sospechas'.

6. Mas en nuestro conocimiento conjetural puede haber progreso hacia algo mejor.

7. Un conocimiento mejor es una mejor aproximación a la verdad.

8. Pero siempre será conocimiento conjetural, una "maraña de sospechas". [Popper, Karl R.: El mundo de Parménides. Ensayos sobre la ilustración presocrática, p. 74]



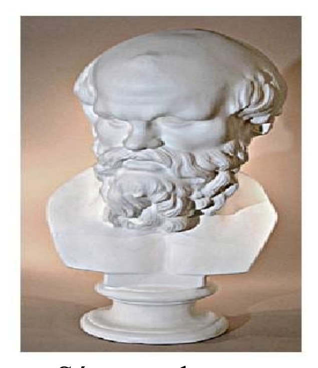
Templo de Poseidón, Grecia, 460 a.C.

3.1 Los sofistas y Sócrates

A pesar de que el nombre ha cambiado de sentido con la historia, incluso provocando cierto desprecio, la realidad es que los sofistas fueron simplemente maestros que recibían paga por sus servicios educativos: en la retórica, la gramática, la dialéctica, moral y también en la geometría, astronomía y filosofía. No debe dejarse de decir que afirmaban la utilización de las matemáticas como un mecanismo para comprender el mundo.

Bell, por ejemplo, es positivo en su valoración:

"En el siglo V, los sofistas griegos de Elea en Italia apenas sí constituyeron una escuela matemática, pero, sin embargo, fueron de una importancia fundamental para el desarrollo de todo el pensamiento matemático. Por medio de sus ingeniosas paradojas sobre la divisibilidad infinita, Zenón (495?-435?) arroja algunas dudas sobre una parte del razonamiento de sus predecesores y a él se debe en parte el curso característico griego que adoptaron las matemáticas con la escuela siguiente y después. La sublevación de los sofistas contra el razonamiento especioso, señala, pues, uno de los puntos cardinales en la historia de las matemáticas." [Bell, E .T.: Historia de las matemáticas, p. 66]



Sócrates, busto.

Se afirma que el papel de los sofistas debe entenderse en el escenario de una Atenas que se había convertido en un centro cultural en el que las diversas teorías, hipótesis, y especulaciones tanto en lo que se refiere a la naturaleza, al cosmos, como a la sociedad. Los sofistas se dedicaron a la comparación y crítica de las ideas y sistemas propuestos, y a guiar a la población sobre las

doctrinas. En ese arte muchas veces rayaron en el escepticismo. Ahora bien, su actitud fue pragmática, colocaron la utilidad como criterio por encima de la verdad. No se trataba tanto de avanzar el conocimiento como de tener éxito tanto en la vida, la política como los negocios. Además, sus enseñanzas no eran gratuitas.

Estas últimas cosas generaron una reacción adversa en algunos, como el mismo Sócrates, quien los despreciaba, y no cobraba por sus enseñanzas. Sócrates concentraba muchos de sus ataques contra los sofistas y contra los políticos (en la democracia ateniense). Pero Sócrates también asumió posiciones escépticas, en particular sobre la ciencia. Consideraba que la ciencia era una pérdida de tiempo. En su lugar cultivó un método especulativo, aunque orientado a los asuntos de la moral y la estética. ¿Conclusión? Se puede criticar el pragmatismo de los sofistas, o incluso su escepticismo general. Pero eso no eximía de ofrecer un método para la ciencia y el conocimiento en general (lo que no hizo Sócrates). Sócrates tuvo una influencia negativa sobre el progreso de la ciencia, apuntaló la separación entre la filosofía y las ciencias, y potenció el método especulativo.

3.2 Platón

El principal discípulo de Sócrates fue Platón, quien también afirmaba que la filosofía moral era más importante que la ciencia, aunque no en el caso de las matemáticas. Estuvo también influenciado por la visión de Parménides que niega a los sentidos la posibilidad de generar conocimiento, y también por los pitagóricos, tanto en la epistemología como en su valoración sobre los números. Esto último se puede ver por ejemplo en la cosmología que desarrolla en el Timeo.

Podemos decir que una combinación de tanto la visión heredada de Sócrates como la influencia de Parménides y Pitágoras se encuentra a la base de la "teoría de las formas" desarrollada por Platón, tema que luego ampliaremos.

Después de los sofistas, fueron Platón (427 - 347 a.C.) y sus discípulos los que asumieron un papel decisivo en la Atenas antigua. Se presume que Teodoro de Cirene (c. 470 a.C.) y Arquitas de Tarento (428 - 347 a.C.), ambos pitagóricos, enseñaron matemáticas a Platón. Esta influencia específica debe ser tomada en cuenta a la hora de interpretar la historia de la filosofía y las matemáticas griegas.

Platón estableció con claridad el carácter abstracto de las matemáticas y sus entidades, y las vinculó a otras como la justicia y bondad, y, también, afirmó las matemáticas como una preparación para la filosofía y para el conocimiento de un mundo ideal que era considerado el único verdadero.

Platón distinguió entre los objetos físicos y los entes abstractos como en las matemáticas, declaró que el mundo físico era imperfecto, más bien, una realización imperfecta de un mundo ideal perfecto: el único que vale la pena estudiar. El conocimiento infalible solo puede serlo sobre ese mundo ideal, cuyos entes y relaciones son permanentes, incorruptibles y eternas.

Es en este contexto intelectual que se deben explicar dos de los supuestos aportes de la escuela platónica: el método analítico y el método de reducción al absurdo. En el primero se busca de partir de lo que se trata de demostrar y para extraer consecuencias hasta encontrar una verdad o una contradicción. Si se llega a una contradicción, lo que se supuso se asume como demostrado que era falso. Si se llega a una verdad, hay demostración de verdad, y solamente se revierte el proceso hacia atrás, para llegar a lo supuesto. El método indirecto de reducción al absurdo, ya lo mencionamos, se atribuye también a Hipócrates de Quíos.

Para Platón, el conocimiento debe organizarse de manera deductiva. Podemos decir que fue este filósofo quien sistematizó estas reglas para la demostración rigurosa. Es decir: organización deductiva a partir de verdades conocidas. Esto es realmente importante. Puede dársele todo el crédito a Platón o no, aquí y para toda la historia de la ciencia y las matemáticas, la realidad es que se estaba estableciendo una metodología para la creación del conocimiento matemático. Pero de una manera en que se eliminaban procedimientos y hechos aceptados en las matemáticas desde siglos antes de los griegos, que hacían referencia a la heurística, la intuición, la inducción, la exploración sensorial, la vinculación con lo empírico, etc.

Entonces, a partir de premisas filosóficas específicas se estaban definiendo los límites y los métodos de las matemáticas: es éste un ejemplo de una auténtica construcción social, histórica, de una disciplina cognoscitiva, con todos los factores que suelen participar.

Ahora bien, la pregunta que emerge es acerca de la razón para este extraordinario énfasis en la deducción. Es uno de los temas más apasionantes de la filosofía de las matemáticas.

Una opinión que se suele ofrecer es la relación estrecha entre filósofos y matemáticos, los primeros en busca de obtener verdades, es decir, resultados libres del error, de lo probable, de lo simplemente aproximado. La deducción permitía obtener resultados verdaderos, seguros. La inducción o la experimentación no lo permitían.

Otra razón que tuvo que haber jugado un papel es el descrédito que se creó en torno a las actividades prácticas y mecánicas. En la época de Platón las prácticas materiales ordinarias, comerciales, artesanales, eran colocadas en una posición social menos relevante. Una ideología favorecida en un momento político y cultural dominado por visiones aristocráticas, elitistas, en una Atenas recién derrotada por Esparta en las guerras del Peloponeso.

Puede decirse que a partir de este momento se estableció la deducción como el método exigido, exclusivo, de las matemáticas. Y es esta situación la que, podemos decir, creó una distinción específica en la naturaleza de las matemáticas.

Entonces, algunos de los límites y las características propias de la construcción matemática en estos términos fueron un producto del llamado periodo clásico de la civilización griega; aquí la influencia filosófica ejercida por la escuela de Platón, sin haber sido la única, tuvo una especial relevancia.

Un detalle importante refiere más bien a la astronomía en Platón, que subrayó el valor del círculo y la esfera, como consignan Rioja y Ordóñez:

"Si los movimientos de los astros son susceptibles de ser conocidos racionalmente y la astronomía como ciencia es posible, entonces quiere decirse que sus movimientos son ordenados, aunque la observación directamente no lo ponga de manifiesto. Luego, bajo los movimientos irregulares aparentes ha de ser posible encontrar los verdaderos movimientos regulares. En el Cielo ni hay ni puede haber astros errantes, que recorran cada vez un camino distinto. El Sol, la Luna y los planetas, aunque en apariencia describan trayectorias sin figura precisa, en realidad se hallan sometidos a la necesidad de una ley inalterable, como inalterables son las propiedades de las figuras geométricas.

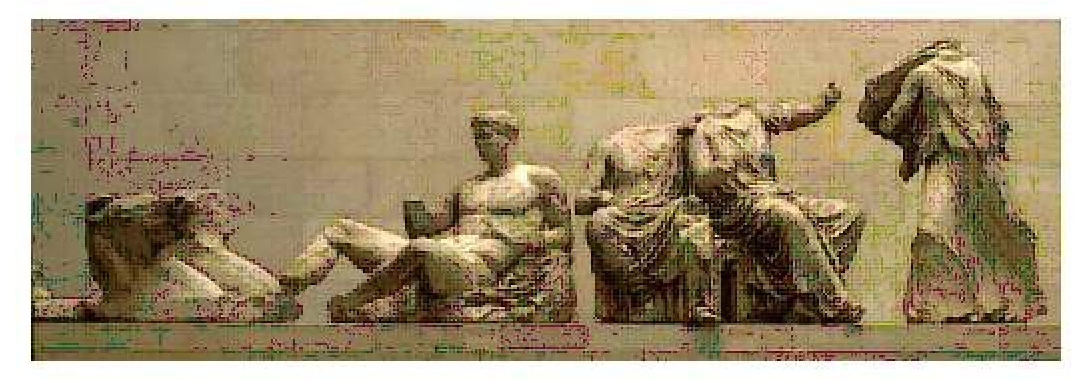
La astronomía está estrechamente emparentada con la geometría. Su objeto es el estudio de los sólidos en movimiento. El problema que se plantea es cuál sea la figura más adecuada a dichos sólidos y al movimiento que realizan. La respuesta no puede ser otra que la figura más simétrica, es decir, la más capaz de no verse alterada cuando es sometida a ciertas transformaciones como, por ejemplo, el giro. Y esa figura es desde luego la esfera (en tres dimensiones) y el círculo (en dos). En definitiva, la figura perfecta es la esfera y el movimiento perfecto es el circular." [Rioja, Ana y Ordóñez, Javier: Teorías del universo. Volumen I. De los pitagóricos a Galileo, pp. 35-36]

Más aun, siempre para Platón:

"... los fenómenos terrestres (a diferencia de los celestes) no parecían esconder la menor regularidad, el más mínimo orden y, por tanto, no eran susceptibles de ser conocidos racionalmente. De la Tierra no podía haber ciencia. La física, a diferencia de la astronomía geométrica, no era una ciencia porque no es posible conocer lo que está en incesante cambio." [Rioja, Ana y Ordóñez, Javier: Teorías del universo. Volumen I. De los pitagóricos a Galileo, p. 36.]

Platón consideraba las observaciones y los experimentos sin valor o incluso dañinos. Sin embargo, él consideraba que las matemáticas ofrecían una certeza que permitía integrar las ideas puras; las matemáticas resultaban un instrumento pedagógico esencial para la mente, permitía potenciar el razonamiento abstracto necesario para comprender las formas. Esto es relevante.

La colocación de las matemáticas en esta posición privilegiada en la actividad científica fue un factor que extendió la influencia pitagórica en torno a las matemáticas griegas y, eventualmente, contribuiría al papel jugado por las matemáticas en la ciencia moderna.



Partenón , detalle.

3.3 Eudoxo de Cnido

Eudoxo fue el principal matemático de la Academia de Platón. No sólo se dedicó a las matemáticas sino también a la ciencia en general. Algunos piensan que la estimación de Aristóteles de que la circunferencia de la Tierra era unos 400 000 estadios (40 000 millas) se debía a Eudoxo. Se afirma que fue el mejor de los matemáticos del periodo clásico y sólo superado por Arquímedes en toda la Antigüedad. Su contribución más importante a las matemáticas fue la llamada teoría de las proporciones. El objetivo de esta teoría fue evitar el uso de los irracionales como números sin dejar de hacer geometría.

Eudoxo siguió la tradición pitagórica de la exclusión de los inconmensurables.

Lo que hizo fue, en esencia, introducir la noción de magnitud, que no era un número pero servía para tratar ángulos, segmentos, áreas, volúmenes, que variaban de una manera continua. Mientras que los números eran discretos, se podía pasar de uno a otro, las magnitudes eran continuas. Las magnitudes, por definición, no podían tener valores cuantitativos. Para Eudoxo, una razón de magnitudes era una proporción, es decir una identidad de dos razones fueran conmensurables o no. Tanto el concepto de razón como de proporción sólo tenían sentido en la geometría, no en la aritmética, porque no trataba de números.

Esta teoría abría posibilidades de trabajo en la geometría sobrepasando los aspectos críticos e "inaceptables" de los irracionales. Sin embargo, como comentaremos luego, generaron serias limitaciones a las matemáticas griegas. Por ejemplo, en primer lugar, redujo el uso de los irracionales sólo a la geometría.

Sobrevaloró históricamente el campo de la geometría, durante siglos, la que se afirmó teórica e incluso filosóficamente como la única disciplina matemática capaz de tener un fundamento lógico riguroso.

Para Bell:

"La teoría eudoxiana de la proporción dio validez indirectamente a la regla empírica de los egipcios para el volumen de un tronco de pirámide y completó el trabajo de los pitagóricos sobre los números similares. Certificó también el método del 'agotamiento' y, después de Dedekind (1 872), el uso del cálculo integral en la determinación de longitudes, áreas y volúmenes. En resumen, proporcionó una base para el sistema de los números reales de análisis matemático." [Bell, E.T.: Historia de las matemáticas, p. 74]

Es curioso mencionar que, aunque Eudoxo seguía la tradición de Pitágoras, la teoría de las proporciones creaba un énfasis en las matemáticas griegas: se diera un giro hacia la geometría y no hacia la aritmética y los números, que, recuérdese, para los pitagóricos eran el componente fundamental de la realidad. Hay un cambio radical.

Una segunda consecuencia de esta seria separación entre geometría y aritmética, con privilegio de la primera, fue el debilitamiento de la aritmética y el álgebra en el mundo griego. Todas aquellas situaciones aritméticas o algebraicas que generaran irracionales eran convertidas en problemas geométricos.

En la Grecia clásica, con un distanciamiento de lo empírico, lo práctico, de la inducción, la experimentación, y con el predominio de visiones que afirmaban a las matemáticas como parte de un mundo ideal, alejado del entorno, se dio, consecuentemente, una separación entre las matemáticas y los requerimientos prácticos en el comercio o la agrimensura. Las matemáticas perdieron una motivación social para el desarrollo de la aritmética y el álgebra.

Debe decirse, sin embargo, como un elemento histórico y cultural fundamental, que esta separación tendería a desaparecer o por lo menos a disminuir en el periodo alejandrino, que colocó en otra perspectiva el conocimiento cuantitativo, las artes y las técnicas, la vida práctica, y por lo tanto el desarrollo del álgebra y la aritmética.

Eudoxo fue creador del famoso método de exhausción, que luego sería utilizado ampliamente por Arquímedes. Fue el mismo Arquímedes quien atribuyó el origen de este método a Eudoxo. Los matemáticos previos a Eudoxo de Cnido (alrededor de 408 - 355 a.C.) sabían que era posible inscribir y circunscribir figuras rectilíneas a una curvilínea y aumentar el número de lados o caras indefinidamente. Pero, precisamente, ahí estaba el problema: el infinito.

Se reconoce que Eudoxo al introducir las magnitudes, como un mecanismo para poder utilizar inconmensurables en la geometría, tuvo que subrayar la importancia de la deducción a partir de axiomas explícitos. Es decir, manipular razones inconmensurables era un asunto muy delicado desde el punto de vista lógico, y obligaba a precisiones y a un manejo deductivo muy cuidadoso. Esto indicaría que los trabajos de Eudoxo debieron ejercer una influencia decisiva en una obra clásica que afirmó la axiomática y el método deductivo en las matemáticas: los Elementos de Euclides.

Ahora bien, en lo que se refiere a la cosmología, ofreció una teoría planetaria: la de las "esferas homocéntricas", basada en estos cuerpos geométricos. Se suele valorar como la primera teoría planetaria propiamente. Ya volveremos sobre esto.

También se debería citar en este contexto a Menecmo (375 - 325 a.C.), quien formó parte de la escuela de Eudoxo e, incluso, se sabe, que fue preceptor de Alejandro el Grande. Es el primero en ocuparse de las secciones cónicas, usando tres tipos de conos: de ángulo recto, obtuso y agudo, cortando cada uno por un plano perpendicular a un elemento. En aquel momento, sólo una rama de la hipérbola era aceptada.

3.4 Aristóteles

El más distinguido discípulo que tuvo la Academia de Platón fue Aristóteles, pero se convirtió en el más importante crítico de la doctrina platónica de las formas así como de sus ideas en relación con las matemáticas. Como Sócrates y Platón, Aristóteles afirmó la importancia del razonamiento correcto en la obtención de conocimiento verdadero. Sin embargo, a diferencia de sus predecesores, reemplazó la dialéctica con una lógica silogística (aquella que obtiene conclusiones a partir de postulados asumidos), y esto se convirtió en el corazón del método deductivo desarrollado por Aristóteles.



Escultura de Éfeso.

¿Cómo era su ciencia? Cualitativa, fuertemente enraizada en el sentido común y donde la presencia de las matemáticas era muy reducida. Igualmente importante, Aristóteles distinguía entre los planos terrestres y celestiales. El segundo plano no podía ser aprehendido por la experiencia humana; el primero se podía organizar en un sistema que incluía todo el conocimiento desde la biología y psicología, hasta la política y la metafísica. De hecho, y a manera de ejemplo, en el terreno de la historia natural es donde hizo muchos de sus mejores aportes, ofreciendo una clasificación y estudio de animales y plantas, y también hizo estudios de embriología. Se dice que es el creador de la anatomía comparada y el iniciador de una clasificación a partir de las estructuras de los seres vivos. Por ejemplo, distinguía entre animales con sangre y aquellos sin sangre. Los primeros se subdividían en mamíferos, reptiles, aves y peces.

Nacido en Estagira, Macedonia, Aristóteles (384 - 322 a.C.) fue discípulo de Platón en la Academia durante más de 20 años, y luego fundó su propia escuela: el Liceo.

Es bastante conocido que entre el 343 y 340 a.C. fue tutor de Alejandro el Grande, quien establecería una nueva época en la civilización griega.

Su producción escrita, realizada y consignada de una manera extraordinariamente sistemática, incluye física, lógica, política, filosofía, meteorología, botánica, psicología, lógica, economía, aunque, sin embargo, no incluye prácticamente matemáticas.

A diferencia de Platón, Aristóteles no consideraba que hubiera un mundo de "formas" o ideas independientes que constituyera la realidad. Sí creía en lo que suele llamarse "universales", como la dureza, rojez, amarillez, anchura, esfericidad, que él creía características de los objetos reales: los universales no podían vivir en sí mismos al margen de los objetos de la realidad.

Para Aristóteles, los números y las formas geométricas también son propiedades de los objetos reales y se accede a ellos a través de la abstracción y la generalización. ¿Qué son, entonces, las matemáticas para Aristóteles? Básicamente, refieren a conceptos abstractos derivados de propiedades de los objetos del mundo físico.

Es interesante que Aristóteles posee una visión de la "definición" que se considera bastante moderna, básicamente como un nombre para un conjunto de palabras, y que debe darse en términos de algo previo a lo que se pretende definir. Por eso mismo, afirma la necesidad de la existencia de términos indefinidos. También es relevante la distinción entre el significado de algo y su existencia. El mecanismo para probar la existencia de un ente sería, para Aristóteles, la construcción a través de regla y compás. Es el método que también asumiría Euclides y casi todo el mundo griego.



Escultura de Éfeso. Periodo romano.

En relación con la estructura lógica de las matemáticas, Aristóteles separó los axiomas y las nociones comunes de los postulados: los primeros aplicables a todas las ciencias y los postulados sólo a una ciencia cualquiera. Los postulados no requieren ser autoevidentes, aunque se necesita afirmar su verdad a través de las consecuencias que se deriven de ellos. Los axiomas, según Aristóteles, se obtienen de la observación de los objetos del mundo físico.

Hay otros asuntos acerca de las matemáticas que pueden mencionarse: Aristóteles establece una diferencia cualitativa entre el punto y la recta, que refiere directamente a la distinción entre lo discreto y lo continuo. Lo primero apunta a la aritmética y lo segundo a la geometría.

Es interesante que Aristóteles considera que la aritmética es previa a la geometría y, además, que la aritmética es más precisa.

Otra distinción aristotélica es sobre el infinito: admite sólo el potencial.

Uno de los principales logros de Aristóteles se dio en la lógica. Sistematizó las reglas para el razonamiento lógico correcto, como la ley del tercero excluido, la ley de la contradicción, etc., a partir, sin duda, de las matemáticas que se habían producido en el mundo griego hasta ese momento.

Aristóteles enfatizaba la deducción en la prueba matemática, es decir el establecimiento de la verdad de las proposiciones matemáticas. Aquí hay una diferencia con Platón, para quien la prueba es secundaria, porque lo principal es una relación directa, intuitiva racionalmente, con un mundo ideal de formas fuera de la realidad física.

Ya volveremos sobre estos temas. Ahora vamos a ir a dos de los principales exponentes de las matemáticas del periodo clásico: Euclides y Apolonio.

3.5 Biografías



Platón

Platón nació alrededor del año 427 a. C. en Atenas, Grecia. Se dice que su nombre original fue Aristocles y Platón su sobrenombre. Platón fue el hijo menor de Aristón y Perictione, ambos provenían de familias adineradas. Cuando era muy joven, su padre murió y su madre se volvió a casar con Pirilampes. Aparentemente fue alumno de Crátilo, que era estudiante de Heracleito.

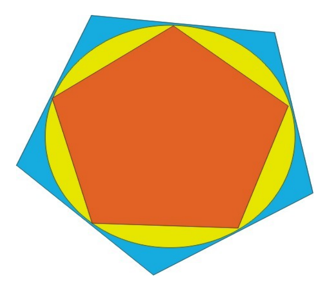
Fue amigo muy cercano a Sócrates.

Platón fue parte del servicio del ejército en la Guerra del Peleponeso, conflicto entre Atenas y Esparta durante los años 431 a. C. al 404 a. C., aunque, en realidad, lo que deseaba era una carrera política antes que militar. Cuando la guerra terminó, se unió a la oligarquía de los Treinta Tiranos en Atenas, pero sus actos eran tan violentos que Platón los abandonó rápidamente.

En el 399 a. C., Sócrates murió, envenenado con cicuta, lo que produjo que Platón decidiera no formar parte de los procesos políticos en Atenas.

Después, Platón viajó a Egipto, Sicilia e Italia. En Egipto conoció el reloj de agua y lo introdujo en Grecia. En Italia aprendió del trabajo de Pitágoras y apreció las matemáticas. En su regreso a Atenas, aproximadamente en el año 387 a. C., fundó la Academia, una escuela que se dedicó a la enseñanza de las ciencias y la filosofía, fue cerrada en el año 529 a. C., por el Emperador Cristiano Justiniano.

Murió alrededor del año 347 a. C. en Atenas, Grecia.



Eudoxo de Cnido

Eudoxo nació en el año 408 a. C. en Cnido (ahora Turquía). Hijo de Aischines. Propuso la primera explicación sistemática de los movimientos del sol, la luna, y los planetas. Viajó a Tarento (en Italia), donde estudió con Arquitas, seguidor de Pitágoras. Arquitas le motivó el interés hacia el problema de duplicar el cubo, además de la teoría de números y la música. Visitó Sicilia, donde estudió medicina con Filistón.

Después de salir de Atenas se fue a Egipto a estudiar astronomía y luego viajó a Cízico en Asia Menor, en donde estableció una escuela que fue muy popular y tenía muchos seguidores. Regresó a Atenas acompañado por varios seguidores.

Se cree que la relación que tuvo con Platón fue de poco respeto en lo que se refiere a las capacidades analíticas de este último, y es probable que no existiera mutua influencia entre las ideas de ambos.

Construyó un observatorio en Cnido y de allí observó la estrella Canopus. Aparte de su contribución a las matemáticas Eudoxo también escribió un libro de geografía que, aunque perdido, se conoce bastante de él por diferentes citas de varias fuentes. En él citaba aspectos políticos, historia y territorio. Además, escribió acerca de Egipto y su religión.

Murió en el año 355 a. C. en Cnidus, Asia Menor.

Menaechmus

Menaechmus (Menecmo) nació alrededor del año 380 a.C. en Alopeconnesus, Turquía, Asia Menor. Posiblemente, fue estudiante de Eudoxo y se cree que trabajaba cerca de su ciudad.

Se dice que Menaechmus fue tutor de Alejandro el Grande, lo cual no es del todo imposible, pues Aristóteles pudo haber sido el enlace entre ellos. También, se dice que fue el director de la Escuela en Cyzicus.

De lo que sí se tiene certeza, es de que resolvió el problema del cubo con base en las secciones cónicas. Platón no estaba de acuerdo con las soluciones mecánicas de Menaechmus porque creía que con estas soluciones lo único que lograba era rebajar el estudio de la geometría.

Aún así, el trabajo de Menaechmus se centró en el desarrollo de la geometría, e hizo un estudio en donde discutió la distinción entre teoremas y problemas, a pesar de que muchos habían dicho que eran diferentes. Aún así, Menaechmus sostuvo que no existía ninguna diferencia fundamental.

Murió alrededor del año 320 a. C.

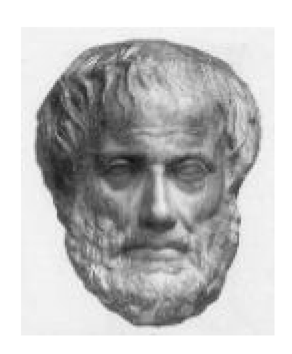
Eudemo de Rodas

Eudemo nació alrededor del año 350 a. C. en Rodas, Grecia. Fue el primer historiador matemático; sus estudios los hizo con Aristóteles y sus escritos se ven claramente influenciados por él.

Aristóteles tuvo otro gran seguidor aparte de Eudemo, Teofrasto de Lesbos al cual escogió como su sucesor cuando sus días llegaban al final. Después de este acontecimiento Eudemo sale de Atenas y decide fundar su propia escuela en Rodas.

De sus escritos encontramos Historia de Geometría, Historia de Aritmética, e Historia de Astronomía. De los tres el más significativo fue el primero, que a pesar de la pérdida del texto original se conoce su trabajo por diferentes autores que lo siguieron.

Eudemo de Rodas murió alrededor del año 290 a. C.



Aristóteles

Aristóteles nació el año 384 a. C. en Estagira, Macedonia, Grecia. Sus padres fueron Nicomachus, un médico de la cuidad y Phaestis. Su padre partió a Macedonia y empezó a trabajar como el médico del Rey Amyntas III, Rey de Macedonia. Aristóteles entabló una estrecha relación con Philip, el hijo del rey.

A la edad de diez años su padre murió y al parecer su madre murió cuando él era muy joven también, así que fue criado por su tío Proxenus de Atarneus, quien le enseñó griego, retórica y poesía, lo que se complementó a la enseñanza que le había dado su padre en medicina. En el año 367 a. C. a la edad de diecisiete años, ingresó a la Academia de Platón en Atenas, que al parecer se encontraba involucrada en asuntos políticos lo que más tarde influiría en la vida de Aristóteles.

Después de estudiar en la academia con profesores como Eudoxus de Cnidos, Speusippus y Xenocrates de Chalcedon; se convirtió en profesor de la academia y mantuvo este puesto por veinte años. Cuando Philip asumió el cargo de Rey de Macedonia, Aristóteles formó parte de la corte.

Partió a Assos y ahí se casó con Pythias, la hija adoptiva de Hermias y tuvieron una hija también llamada Pythias, pero el matrimonio no duró mucho ya que diez años más tarde ella murió. Regresó a Macedonia a tomar su puesto en la corte durante siete años. No se volvió a casar pero se sabe que tuvo una relación con Herpyllis con quien tuvo un hijo llamado Nicomachus en honor a su padre. En el año 335 a. C. fundó su propia escuela conocida como el Liceo en Atenas.

Murió el año 322 a. C. de un problema estomacal en Calci, Eubea, Grecia.

Teeteto de Atenas

Theaetetus (Teeteto) de Atenas nació alrededor del año 417 a. C. en Atenas, Grecia. La mayoría de lo que se conoce de Theaetetus es por medio de dos escritos de Platón: Theaetetus y Los Sofistas. El primer libro consistía en una discusión entre Sócrates, Teeteto y Teodoro de Cyrene. Por Platón, se sabe también, que el padre de Theaetetus fue Euphronius de Sunium, un hombre adinerado, que dejó mucho dinero, el cual fue mal gastado por sus conocidos. Teeteto es descrito por Platón como un hombre muy caballeroso y de mente hermosa. Se cree que algunos libros de los Elementos de Euclides están basados en las investigaciones de él.

Participó en la batalla entre Atenas y Corinto en el año 369 a. C. Distinguido en la guerra, fue herido y enviado de regreso a Atenas, en donde contrajo disentería y murió ese mismo año a causa de la enfermedad.

Teodoro de Cyrene

Teodoro de Cyrene nació en el año 465 a. C. en Cyrene, Libia. Teodoro no sólo vivió en Cyrene sino que pasó mucho tiempo de su vida en Atenas, al parecer en los mismos años en que Sócrates vivía ahí. Platón pasó tiempo con Teodoro en Egipto.

Fue alumno de Protágoras y tutor de Platón y de Theaetetus (Teeteto). Trabajó en matemáticas, astronomía, aritmética, música y asuntos educativos. Su mayor contribución fue en el desarrollo de los números irracionales. Perteneció a la sociedad de Pitágoras.

Además, fue uno de los principales filósofos de la escuela de filosofía moral en Cyrene. Creía que ni los placeres ni los dolores eran buenos ni malos y que la alegría y la sabiduría eran suficientes para alcanzar la felicidad.

Murió en el año 398 a. C. en Cyrene, Libia.

3.6 Síntesis, análisis, investigación

1. Investigue las ideas y aportes intelectuales que -se supone- propuso Jenófanes. Escriba un documento de aproximadamente una página de extensión.
2. Investigue: ¿qué fueron las 'guerras Médicas'? Descríbalas en un par de páginas. Use bibliografía adicional.
3. Mason hace un resumen del escenario histórico e intelectual en que se movía Atenas. Estudie el texto siguiente.

   "Atenas no floreció en época tan temprana como las ciudades griegas de Jonia y de la Italia meridional, si bien su cultura resultó ser más estable y duradera. Las ciudades jonias fueron subyugadas por Persia en el 530 a.C., resultando Mileto completamente destruida unos cuantos años más tarde. Atenas se benefició indirectamente del eclipse de los jonios, ya que cayó en sus manos el comercio con las colonias griegas de la costa del mar Negro. Políticamente Atenas detentaba el mando de las ciudades griegas contra los persas, quienes resultaron derrotados en tierra el año 490 a.C., en Maratón, y en el mar diez años después. Las artes florecieron en Atenas, especialmente desde los tiempos de Solón, c. 639 - 559 a.C., quien decretó, según Plutarco, que un hijo no tenía por qué sostener a su padre a menos que éste le hubiese enseñado un oficio. Esta fue la época en que, según se dice, vivieron los inventores griegos; personas como Anarcarsis el Escita, a quien se atribuye la invención de los fuelles y la mejora del ancla y de la rueda de alfarero, o como Teodoro de Sarrios a quien se atribuye la invención del nivel, el cartabón, el torno, la regla y la llave. Era además una época en la que la palabra griega 'sofía' aún significaba habilidad técnica y no sabiduría intelectual. Tras la victoria sobre los persas, Atenas inició su período de prosperidad y grandeza." [Mason, Stephen: Historia de las Ciencias 1. La Ciencia Antigua, la Ciencia en Oriente y en la Europa Medieval, págs. 40-41]

   Explique la relación entre progreso ateniense y descenso jonio.

4. Investigue y consigne por escrito quién era y cuáles fueron los logros principales de Pericles.
5. Investigue y explique qué fueron las Guerras del Peloponeso.
6. Explique las posiciones de Sócrates y los sofistas en relación con el conocimiento.
7. ¿Qué es el método analítico que se atribuye a Platón?
8. Exlique la importancia de Platón en la definición de los límites y métodos de las matemáticas.
9. ¿Por qué Platón escogió la esfera y el círculo como las figuras claves de la astronomía?
10. ¿Cuál era el objetivo esencial de la teoría de las magnitudes desarrollada por Eudoxo?
11. ¿Cuál era el mecanismo, según Aristóteles, para asegurar la existencia de un ente en matemáticas?
12. Explique la diferencia entre axiomas y postulados, según Aristóteles.
13. ¿Qué quiere decir infinito potencial? Explique.
14. Lea cuidadosamente el siguiente texto.

    "Estos criterios de tipo matemático-estético van a traer consigo la adopción de compromisos muy precisos, que influirán decisivamente en el desarrollo de la astronomía desde el siglo IV a. C. hasta el siglo XVII. Resumidamente pueden ser expresados como sigue:

    1- Tanto los cuerpos celestes como la Tierra tienen forma de esfera (hay también argumentos empíricos a favor de la esfericidad de la Tierra que se expondrán en otro momento).

    2- El cosmos tiene forma esférica y, por tanto, es finito.

    3- La esfera de la Tierra se halla en el centro de la esfera cósmica.

    4- Todos los movimientos celestes son circulares.

    5- La velocidad angular (el término es moderno) de los cuerpos celestes es invariable (algunos autores niegan en la actualidad que Platón formulara explícitamente este requisito).

    6- El sentido de los movimientos circulares planetarios es siempre el mismo; no hay inversiones de sentido.

    A partir de Platón la astronomía se moverá dentro de los límites que marcan estas proposiciones. Para romperlos será preciso aguardar al heliocentrismo de Copérnico, a las leyes de Kepler, a la ley de inercia de Descartes y Newton. La esfera y el círculo perderán su posición privilegiada, pero lo que no desaparecerá es la extraordinaria importancia de la geometría, o mejor, de la matemática en general en la explicación de la Naturaleza. Muy al contrario su aplicabilidad se extenderá con Galileo del Cielo a la Tierra, abarcando un ámbito de fenómenos que habían sido excluidos por Platón de la posibilidad de matematización." [Rioja, Ana y Ordóñez, Javier: Teorías del universo. Volumen I. De los pitagóricos a Galileo, pp. 35-36]

Exprese en sus palabras las consecuencias de adoptar el círculo y la esfera en la explicación cosmológica. ¿Por qué piensa usted que Platón privilegió esas figuras?

15. El siguiente pasaje de la novela de Alfredo Marcos nos retrata al personaje Eudoxo.

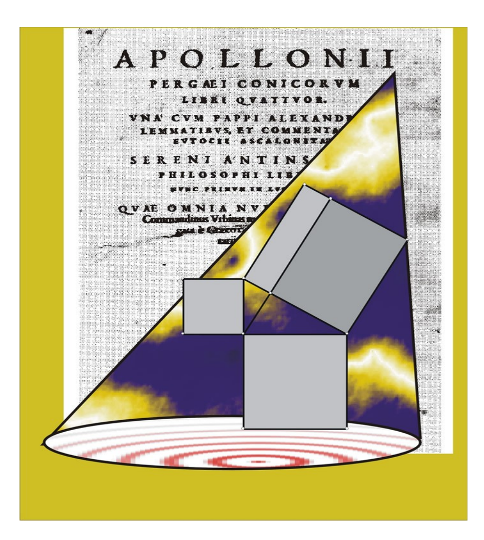
"La Academia había sido encomendada por Platón a Eudoxo Cnido, quien se había unido a la escuela junto con algunos discípulos suyos de Cízico. Eudoxo era entonces un hombre joven, en poco sobrepasaba los treinta, pero ya tenía reputación, de estudioso en muchas materias, de sabio en varias, de honrado y de gran conocedor del mundo. Había aprendido números y música con el mismo Arquitas de Tarento, medicina con Filistón y filosofía con Platón, y había vivido más de un año en Heliópolis, entre los sacerdotes astrónomos de Egipto, a cuyo país llegó como embajador de Esparta. Podía hablar con conocimiento sobre cosmología, meteorología o teología, pero sus lecciones de matemáticas, astronomía y geografía eran las más seguidas. Su discurso era ameno y con frecuencia nos transportaba a tierras lejanas. Hablaba con preferencia de Sicilia y de Egipto, de las costumbres de los pitagóricos de Tárenlo o de las gentes del Nilo. Pero también tenía conocimiento de muchas partes de Grecia, de la península Itálica y del Asia, y no sólo de las tierras y las aguas, sino también de las formas de vida de los hombres.

Eudoxo había puesto escuela en Cízico, pero, debido a la proximidad de los persas, nunca se sintió allí seguro, lo que le llevó a mantener siempre un hilo de conexión con Atenas, y a buscar a veces refugio para él y los suyos en esta ciudad. Por otra parte, a Platón le agradaba que sus discípulos pudiesen oír a los más sabios. En la Academia hablaron filósofos y geómetras, como es bien sabido, pero también astrónomos, geógrafos, físicos y médicos. Platón pensaba que aquellos jóvenes destinados a regir la ciudad debían formarse en los más sólidos saberes, y no sólo en el arte de la retórica. Los platónicos acostumbraban a reunirse en los jardines dedicados al héroe Academo, junto al río Cefiso, al norte de la ciudad, ya fuera de la muralla. Este paraje ha sido cuidado desde antaño como lugar de paseo; los atenienses lo han embellecido con árboles, estatuas, palestras y altares al menos desde tiempos de Cimón." [Marcos, Alfredo: El testamento de Aristóteles, memorias desde el exilio, págs. 144-145]

Describa el escenario social que constituía la Academia de Platón. Resuma la personalidad de Eudoxo, según este autor.

CAPITULO IV

EUCLIDES Y APOLONIO



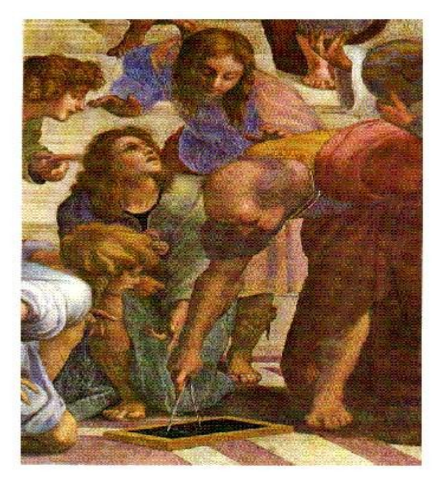
Alejandría en Egipto reemplazó a Atenas como el centro de la ciencia. Este cambio fue facilitado por los mismos gobernantes ptolomeos de Egipto.

Se afirma que en Alejandría se alcanzó la época dorada de la geometría. Tanto los Elementos de Euclides como las Secciones Cónicas de Apolonio se desarrollaron allí. Incluso la ciencia desarrollada fuera de Alejandría, como fue la geometría y la mecánica de Arquímedes, fueron producto de hombres que estudiaron o estuvieron influenciados por lo que se desarrollaba en Alejandría. De igual manera, en la astronomía fue relevante Alejandría: por ejemplo, con Aristarco de Samos que estableció una visión heliocéntrica del universo y, por supuesto, ya en el siglo II después de Cristo, con Ptolomeo.

4.1 Euclides

Euclides nació alrededor del año 325 a.C. en Alejandría, Egipto. Fue uno de los más prominentes matemáticos de la Edad Antigua. Su vida se conoce muy poco. Enseñó matemáticas la mayor parte de su vida en Alejandría y fue en esta ciudad donde fundó su escuela. Al no conocerse mucho de su vida, ha habido diferentes opiniones acerca de él; autores árabes creen que era hijo de Náucrates y que nació en Tiro. Otros insisten en que Euclides no era más que un ser ficticio y que se le han atribuido muchos tratados que no le corresponden. En lo que concuerdan diferentes autores es que era un hombre justo y dispuesto a que las matemáticas avanzaran en cualquier circunstancia. Murió aproximadamente en el año 265 a.C. en Alejandría.

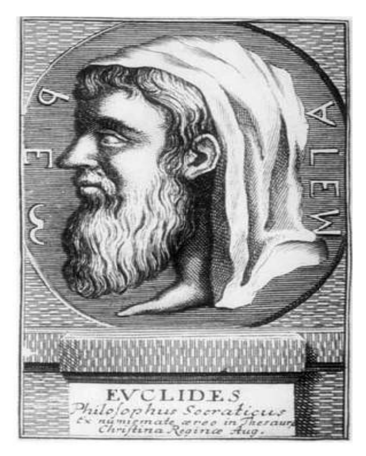
La formación de Euclides estuvo asociada a la Academia de Platón, y esto es un punto de referencia esencial para entender la naturaleza y los límites de su obra matemática.



Euclides, detalle pintura de Rafael.

Es interesante que tanto Euclides como Apolonio (todos los expertos consideran su trabajo fundamental en las Secciones Cónicas, esencialmente por su método, como parte del periodo clásico) serían considerados paradigmas de las matemáticas clásicas griegas, y sin embargo vivieran en la época cronológica alejandrina.

Esto de las relaciones genéticas y las influencias entre los diferentes intelectuales griegos es un asunto muy interesante. Thales fue maestro de Pitágoras. Existió una relación entre los pitagóricos y Zenón y Parménides. Los pitagóricos ejercieron la suya sobre Platón, que a su vez fue maestro de Aristóteles. Eudoxo fue influenciado por las ideas de Platón directamente en la Academia. Euclides se educó en la Academia de Platón y varios discípulos de Euclides, luego, ejercieron su influencia sobre Apolonio.



Euclides.

Esto hace referencia a los métodos de la construcción del conocimiento, tanto de sus contenidos, como de su naturaleza y fronteras: hay lazos, puentes, conexiones como en toda actividad humana. No es un mundo abstracto absoluto infalible, impoluto, al que se llega por vías solo racionales, protagoniza y concurre lo social y lo histórico con todas sus poderosas propiedades.

La relación de Euclides con los platónicos ha sido firmemente establecida: en los Elementos, según Proclus, Euclides incluyó varios resultados de Eudoxo, así como de Teeteto, vinculados a la Academia.

Todos los escritos que tenemos de Euclides han tenido que ser reconstruidos a partir de recensiones, comentarios, críticas u observaciones de otros escritores.

Los Elementos

Euclides y los Elementos son referencias inseparables.

Bien dice Sarton: "Euclides es como Homero; así como todo el mundo conoce la Ilíada y la Odisea, del mismo modo todo el mundo conoce los Elementos. ¿Quién es Homero? El autor de la Ilíada. ¿Y Euclides? El autor de los Elementos." [Sarton, George: Ciencia antigua y civilización moderna, p. 29]. Es aquí donde Euclides plantea 5 postulados y cinco nociones comunes, estas últimas llamadas por Proclus axiomas.

Proclus llegó afirmar, esto es interesante, que todas las matemáticas son hipotéticas.

A lo largo de la historia, las matemáticas después de Euclides, tanto los postulados como las nociones comunes fueron considerados verdades infalibles. Esta escogencia de postulados es relevante:

"La parte más asombrosa del Libro I es la selección de postulados que hizo Euclides. Por supuesto, que el maestro de Euclides en esta materia fue Aristóteles; éste había prestado mucha atención a los principios matemáticos, demostrando cómo no se puede prescindir de los postulados y probando la necesidad de reducirlos a un mínimo; pero la selección de los postulados es obra de Euclides." [Sarton, George: Ciencia antigua y civilización moderna, p. 33]

Es interesante que Euclides en este libro establece que la existencia de algunos de los conceptos a utilizar se garantiza por la posibilidad de construir rectas y círculos (regla y compás). Es decir, no hay identidad entre definición y existencia, hay que asegurar la existencia a través de un mecanismo: la construcción.

Los Elementos contiene trece libros o capítulos (aunque se le añadieron 2 libros más escritos por autores posteriores). Los primeros 6 son sobre geometría plana, los tres siguientes sobre teoría de números, el décimo sobre inconmensurables, y los tres últimos sobre geometría de sólidos.

Los Libros del I al IV consideran las propiedades de las figuras rectilíneas y los círculos.

El Libro I, por ejemplo, incluye teoremas sobre congruencia, rectas paralelas, el teorema de Pitágoras, construcciones elementales, figuras equivalentes y paralelogramos.

El libro empieza con 23 definiciones, dos de las cuales son:

- "un punto es lo que no tiene parte",
- "una recta es una longitud sin anchura".

Los postulados de Euclides también se encuentran en el Libro I. Se suele hacer una distinción entre postulados y nociones comunes o axiomas.

Postulados

1. Se puede trazar una recta desde un punto a otro cualquiera.

2. Es posible extender un segmento de recta continuamente a una recta.

3. Es posible describir un círculo con cualquier centro y cualquier radio.

4. Que todos los ángulos rectos son iguales.

5. Que si una línea recta corta a otras dos rectas formando con ellas ángulos interiores del mismo lado menores que dos ángulos rectos, las dos líneas rectas, prolongadas indefinidamente, se cortan del lado por el cual los ángulos son menores que dos ángulos rectos.

Nociones comunes

- 1. Cosas que son iguales a la misma cosa son iguales entre sí.
- 2. Si iguales se suman a iguales, los resultados son iguales.
- 3. Si iguales se restan de iguales, los restos son iguales.
- 4. Cosas que coinciden una con otra son iguales entre sí.
- 5. El todo es mayor que la parte.

Euclides sigue a Aristóteles: mientras que las nociones comunes se aplican a todas las ciencias, los postulados solo a la geometría.

Los dos primeros postulados son abstracciones derivadas de nuestra experiencia con una regla.

El tercer postulado se obtiene de nuestra experimentación con un compás.

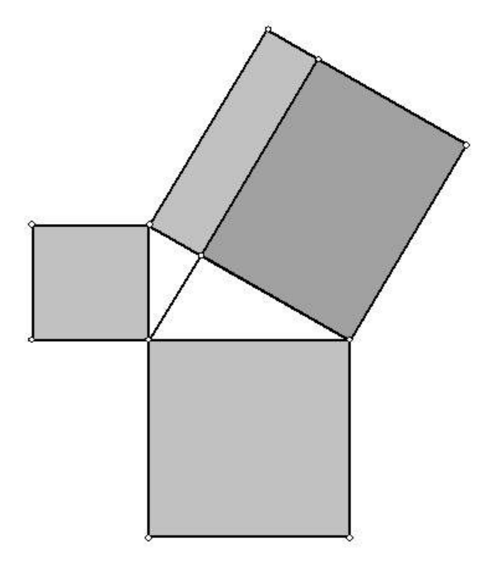
El cuarto postulado es tal vez menos obvio y más abstracto, pero se deduce de nuestra experiencia midiendo ángulos con un transportador (donde la suma de ángulos suplementarios es 180, tal que ángulos suplementarios son congruentes entre sí).

La noción cuarta se refiere a la "superposición" de figuras y es geométrica en su carácter; por eso debería Euclides haberla colocado más bien como un postulado.

En el Libro I de los Elementos de Euclides se consigna el Teorema de Pitágoras:

En todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al cuadrado construido sobre la hipotenusa.

Esto se realiza con base en la siguiente figura.



Teorema de Pitágoras.

La demostración del Teorema de Pitágoras que aparece en el Libro I de los Elementos de Euclides, muestra la igualdad entre las áreas sombreadas.

El Libro II es de álgebra geométrica.

El Libro III tiene 37 proposiciones, inicia con definiciones sobre círculos, luego cuerdas, tangentes, secantes, ángulos inscritos y centrales, y esos conceptos de la geometría básica que se enseña en escuelas y colegios. Con base en una traducción al español que ofreció la UNAM de México [Euclides: Elementos de Geometría III, IV y V], vamos a citar los principales resultados de los Libros III, IV y V.

El Libro III inicia con las siguientes definiciones:

D.III.1. Círculos iguales son aquellos cuyos diámetros son iguales o cuyas (líneas) desde el centro son iguales.

D.III.2. Dícese que una recta es tangente al círculo, cuando toca el círculo y prolongada no lo corta.

D.III.3. Dícese que los círculos son tangentes mutuamente, cuando se tocan mutuamente y no se cortan mutuamente.

D.III.4. En el círculo dícese que las rectas distan igualmente del centro, si las perpendiculares trazadas desde el centro a las mismas son iguales.

D.III.5. Dícese que dista más aquella sobre la cual cae la perpendicular mayor.

D.III.6. Segmento del círculo es la figura limitada por una recta y por la periferia del círculo.

D.III.7. Ángulo del segmento es el limitado por una recta y por la periferia del círculo.

D.III.8. Ángulo en el segmento es el limitado por las rectas trazadas desde un punto de la periferia del segmento a los extremos de la recta que es base del segmento.

D.III.9. Cuando las rectas que forman el ángulo cortan alguna periferia, dícese que el ángulo consiste en ella.

D.III.10. Sector del círculo es la figura limitada por las rectas que limitan el ángulo construido en el centro y por la periferia comprendida por ellas.

D.III.11. Segmentos circulares semejantes son los que abarcan ángulos iguales o aquellos en que los ángulos son iguales.

Y contiene, por ejemplo, los siguientes teoremas:

Teorema III.1

Encontrar el centro de un círculo dado.

Teorema III.2

La línea trazada entre dos puntos, tomados al acaso sobre la periferia del círculo, caerá dentro del círculo.

Teorema III.3

Si una recta por el centro del círculo divide a otra (que) no (pasa) por el centro en dos partes iguales, también la corta en ángulos rectos, y, si la corta en ángulos rectos, también la corta en dos partes iguales.

Teorema III.4

Si en un círculo se cortan dos rectas que no pasan por el centro, no se cortan en dos partes iguales.

Teorema III.5

Si dos círculos se cortan entre sí, no tienen el mismo centro.

El Libro IV tiene 16 proposiciones. Aquí hay figuras inscritas y circunscritas en círculos. Sus definiciones:

D.IV.1. Dícese que una figura rectilínea está inscrita en otra figura rectilínea, cuando cada uno de los ángulos de la figura inscrita tiene el vértice en cada uno de los lados de la figura en que se inscribe.

D.IV.2. Análogamente se dice que una figura está circunscrita alrededor de otra figura, cuando cada lado de la figura circunscrita toca a cada uno de los vértices de los ángulos de la figura alrededor de la cual se circunscribe.

D.IV.3. Dícese que una figura rectilínea está inscrita en un círculo, cuando cada ángulo de la figura inscrita toca la periferia del círculo.

D.IV.4. Dícese una figura rectilínea está circunscrita alrededor de un círculo, cuando cada lado de la figura circunscrita es tangente de la periferia del círculo.

D.IV.5. Análogamente dícese que un círculo está inscrito en una figura, cuando la periferia del círculo toca a cada uno de los lados de la figura en la cual se inscribe.

D.IV.6. Dícese que un círculo está circunscrito a una figura, cuando la periferia del círculo toca a cada uno de los ángulos de la figura alrededor de la cual se circunscribe.

D.IV.7. Dícese que una recta está adaptada en un círculo cuando los extremos de la misma están sobre la periferia del círculo.

El Libro V está basado en el trabajo de Eudoxo, y se considera el principal resultado de la geometría euclidiana. Incluye la teoría de las proporciones con las razones inconmensurables, por supuesto, evitando los números irracionales. Mientras que los Libros del I al IV evitan las magnitudes inconmensurables, el Libro V las incluye a partir de la teoría de la magnitud atribuida a Eudoxo.

Este libro comienza con las siguientes definiciones:

D.V.1. Entre dos magnitudes, la menor se llama parte (alícuota) de la mayor, cuando la mide (exactamente).

D.V.2. Una magnitud es múltipla de la menor cuando es medida por ella (exactamente).

D.V.3. Razón es cualquier relación entre dos magnitudes del mismo género según su cantidad.

D.V.4. Dícese que dos magnitudes tiene razón entre sí, cuando cada una puede ser multiplicada en modo de superar a la otra.

D.V.5. Dícese que la razón de una primera magnitud a una segunda es igual a la de una tercera a una cuarta, cuando las primeras y las terceras igualmente multiplicadas o al mismo tiempo superan, o al mismo tiempo son iguales o al mismo tiempo son inferiores que las segundas y cuartas igualmente multiplicadas.

D.V.6. Las magnitudes que tienen la misma razón se llaman proporcionales.

D.V.7. Cuando entre (cantidades) igualmente multiplicadas, el múltiplo de la primera supera al múltiplo de la segunda, pero el múltiplo de la tercera no supera al múltiplo de la cuarta, se dice que la primera tiene a la segunda una razón mayor que la tercera a la cuarta.

D.V.8. La proporción mínima es entre tres términos.

D.V.9. Cuando tres magnitudes son (continuamente) proporcionales, se dice que la primera con la tercera tiene una razón duplicada de la que tiene con la segunda.

D.V.10. Si cuatro magnitudes son (continuamente) proporcionales, se dice que la primera tiene a la cuarta una razón triplicada de la que tiene a la segunda, y siempre del mismo modo en adelante, cualquiera que sea la proporción.

D.V.11. Se llaman homólogos los antecedentes con los antecedentes y los consiguientes con los consiguientes.

D.V.12. La razón se llama conmutada cuando se toma el antecedente con el antecedente y el consiguiente con el consiguiente.

D.V.13. La razón se llama inversa cuando se toma el consiguiente en lugar del antecedente y el antecedente en lugar del consiguiente.

D.V.14. Componer la razón es tomar el antecedente junto con el consiguiente como una sola cosa para el mismo consiguiente.

D.V.15. Substraer la razón es tomar el exceso del antecedente sobre el consiguiente al mismo consiguiente.

D.V.16. Convertir la razón es tomar el antecedente con la diferencia que hay entre el antecedente y el consiguiente.

D.V.17. Dícese razón igual cuando, dado un número cualquiera de magnitudes, de tal manera que de dos en dos sean respectivamente proporcionales a otras magnitudes, en las primeras magnitudes la primera es a la última como también en las segundas la primera es a la última; o, de otra manera, cuando se consideran los términos exteriores sin considerar los medios.

D.V.18. Razón perturbada se llama cuando, dadas tres magnitudes y otras tres, en las primeras magnitudes el antecedente está al consiguiente como en las segundas el antecedente está al consiguiente, y como en las primeras el consiguiente es a otra cosa en las segundas otra cosa es al antecedente.

Sus teoremas son relevantes, los citamos todos al final de este capítulo, para beneficio del lector. Aquí mencionamos los dos primeros.

Teorema V1

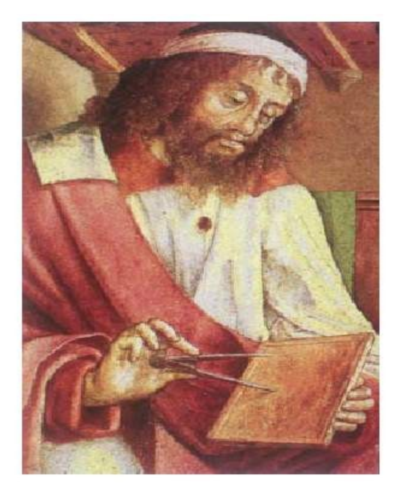
Dado un número cualquiera de magnitudes, que sean respectivamente equimúltiplos de otras magnitudes cualquiera, cuantas veces es múltiplo una magnitud de otra, otras tantas lo serán todas de todas las otras.

Teorema V2

Si una primera magnitud es múltiplo de una segunda el mismo número de veces que una tercera es múltiplo de una cuarta y una quinta es múltiplo de la segunda el mismo número de veces que una sexta es múltiplo de la cuarta, entonces también la primera y la quinta juntas serán múltiplos de la segunda el mismo número de veces que la tercera y la sexta lo son de la cuarta.

Algunos se han preguntado si esta teoría de las magnitudes y proporciones era suficiente para sostener lógicamente una teoría de los números reales, a pesar de que la mayor parte de matemáticos a lo largo de la historia de las matemáticas sólo la concibió como un fundamento para la geometría. La opinión más generalizada es negativa y tiende a subrayar que el Libro V y su teoría de las proporciones no podía servir como sustento más allá de la geometría.

Los Libros VII, VIII, y IX, tratan de la teoría de números o, mejor dicho, acerca de las propiedades de los números enteros y de las razones de números enteros. Sólo estos libros de los Elementos tratan la aritmética. Si bien Euclides usa segmentos de recta para representar números y rectángulos para el producto de los números, sus resultados no dependen enteramente de la geometría.



Euclides.

En ningún momento hay rastro en esta obra, debe decirse, de simbolismo.

El Libro X de los Elementos trata de clasificar diferentes tipos de números irracionales, o sea magnitudes inconmensurables. Los Libros X, XI, y XIII tratan de la geometría sólida y del método de exhausción. Este último libro contiene 18 teoremas sobre áreas y volúmenes, en especial de figuras curvilíneas o acotadas por superficies. Sobre el Libro X, nos comenta Sarton:

"Los algebristas babilónicos no conocían las cantidades irracionales, en tanto que el Libro X de los Elementos (el más extenso de los trece, todavía más que el Libro I) está dedicado exclusivamente a ellas. En este caso, una vez más, Euclides edificó sus teorías sobre cimientos más antiguos, pero éstos, ahora, fueron únicamente griegos. Podemos creer el relato que atribuye a los primitivos pitagóricos el conocimiento de las cantidades irracionales y el amigo de Platón, Teeteto (IV-1 a.C.), formuló una amplia teoría de ellas, así como de los cinco sólidos regulares. Nada prueba mejor el genio matemático griego (opuesto al babilónico) que la teoría de las irracionales tal como fue expuesta por Hipaso de Metaponto, Teodoro de Cirene, Teeteto de Atenas y, finalmente, por Euclides. Es imposible decir con exactitud qué parte del Libro X se debe a Teeteto y cuál a Euclides." [Sarton, George: Ciencia antigua y civilización moderna, p. 39]

La idea básica del método de exhausción es, por ejemplo, para probar relaciones entre áreas de círculos, inscribir polígonos regulares en los círculos y utilizar las propiedades o verdades de los polígonos para demostrar las de los círculos. Se trata de inscribir sucesivamente polígonos con un mayor número de lados, de tal manera que se aproxime mejor el área de los círculos.

El término "exhausción" fue consignado hasta el siglo XVII.

Un asunto muy importante es que este método da la impresión de un acercamiento casi completo al concepto de límite, como un método de aproximación. La realidad es que no es así. En todas estas pruebas, al final, en algún momento de los procedimientos usados para la demostración, todo descansa en el método indirecto, sin utilizar elemento alguno en la dirección del concepto de límite.

Es curioso que, desde el punto de vista de la deducción lógica, el trabajo de Euclides en torno a las áreas y volúmenes es más riguroso que el de Newton y Leibniz (más bien basado en el álgebra y los sistemas numéricos que en la deducción geométrica).

Los Elementos de Euclides contienen 467 proposiciones. Los Libros XIV y XV tratan de sólidos regulares, pero no fueron escritos por Euclides. El XV es poco claro e impreciso, el XIV se supone escrito por Hipsicles (c. 150 a.C.) y algunas de sus partes escritas en el siglo VI d.C.

En general, se sabe que la presentación de las proposiciones en los Elementos no es original de Euclides, pero la forma de presentación de toda la obra aparentemente sí es original (axiomas, definiciones explícitas, cadena de teoremas y la estructura lógica de lo simple a lo complejo en los teoremas). Hay, además, una selección, un escogimiento deliberado, de los teoremas.

Nadie puede negar el magistral trabajo de ordenamiento, sistematización, organización lógica, que aparece en los Elementos de Euclides. Hay un orden lógico decisivo: "Este orden es lo que constituye la esencia y la grandeza de los Elementos, pero los sabios medievales no vieron esto, o al menos no lo vieron hasta que los comentaristas musulmanes les abrieron los ojos." [Sarton, George: Ciencia antigua y civilización moderna, p. 43]

Sin embargo, este modelo de rigor que fue asumido como paradigma durante toda la historia de las matemáticas, poseía algunos problemas que son importantes de mencionar. Por ejemplo, según señalan algunos historiadores, el uso de la superposición, así como las explicaciones en busca de significados en las definiciones iniciales de punto, línea y superficies (las que son innecesarias puesto que, en esencia, se trata de términos indefinidos).

Debe mencionarse que, a pesar de la organización lógica y comprensiva de los contenidos de los Elementos, estos 13 libros no forman una unidad, más bien se trata de una compilación de libros previos. De hecho, hay resultados que se repiten en varios libros. Algunos historiadores consideran que los Libros X, XI y XII fueron escritos más bien por Teeteto.

Aunque a veces no se conoce el hecho, Euclides escribió otros libros además de los Elementos: la Óptica, la Catóptrica, los Datos, Pseudaria, Sobre las divisiones, Porismas, los Fenómenos y Superficies-Lugares.

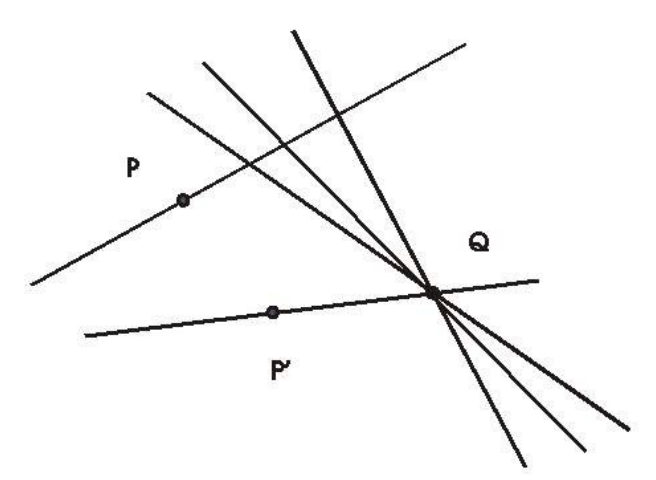
¿Cómo valorar la obra de Euclides? Sarton nos ofrece un juicio bastante equilibrado:

"Si tuviéramos en cuenta, como deberíamos, la obra de los egipcios y de los babilonios, veríamos que los Elementos de Euclides representan la culminación de un esfuerzo de más de mil años. Se podría objetar que Euclides merece ser llamado el padre de la geometría por otra razón. Aun concediendo que se hicieron muchos descubrimientos antes que él, Euclides fue el primero que reunió en una síntesis todos los conocimientos alcanzados por los demás y por él mismo, y que puso a todas las proposiciones conocidas en un sólido orden lógico. Esta afirmación no es enteramente verdadera. Algunas de esas proposiciones habían sido demostradas antes de Euclides y se habían establecido ya series de ellas. Además, Hipócrates de Quío (V-1 a.C.) León (IV-1 a.C.) y Teudio de Magnesia (IV-2 a.C.) habían escrito 'Elementos' antes que Euclides. El tratado de Teudio, que Euclides conocía muy bien, había sido preparado para la Academia y es posible que en el Liceo estuviese en uso uno semejante. Sea como fuere, Aristóteles conocía la teoría de las proporciones de Eudoxo y el método exhaustivo, que luego Euclides amplió en los Libros V, VI y XII de los Elementos. En resumen, bien consideremos los teoremas particulares, o los métodos, o el orden de los Elementos, Euclides rara vez fue un completo innovador; hizo mucho mejor y en mayor escala lo que otros geómetras habían hecho antes que él." [Sarton, George: Ciencia antigua y civilización moderna, pp. 31-32]

4.2 Apolonio

Nacido en Perga, Apolonio (c. 262-190 a.C.) se educó en Alejandría con discípulos de Euclides. Un vínculo directo con los métodos y las premisas intelectuales desarrolladas por el autor de los Elementos. Aunque se reconoce su trabajo en las Secciones Cónicas como su principal logro, sin embargo, escribió sobre otros temas. Un libro perdido de Apolonio, Repartos rápidos, trataba de métodos para efectuar cálculos rápidos, donde había, se supone, una aproximación de π mejor que la que ofreció Arquímedes. Otras obras, todas perdidas: Secciones en una razón dada, Secciones en un área dada, Secciones determinadas, Tangencias (o Contactos), Inclinaciones y Lugares planos. Muchas de las referencias del trabajo de Apolonio se encuentran en Pappus (en su Colección Matemática). Su obra fue tan relevante que se le llegó a conocer como el "gran geómetra".

Sin certeza completa, y con base en descripciones de otros autores, se puede señalar los temas que trataron algunas de estas obras. Por ejemplo, Secciones en una razón dada trataba casos del siguiente asunto: si se tienen dos rectas cada una con un punto sobre ellas, el problema es trazar otra recta por otro punto de tal manera que al cortar a las otras rectas se determinen segmentos que se encuentren en un proporción dada; los segmentos son las longitudes entre los puntos sobre cada recta. Vea la figura siguiente.

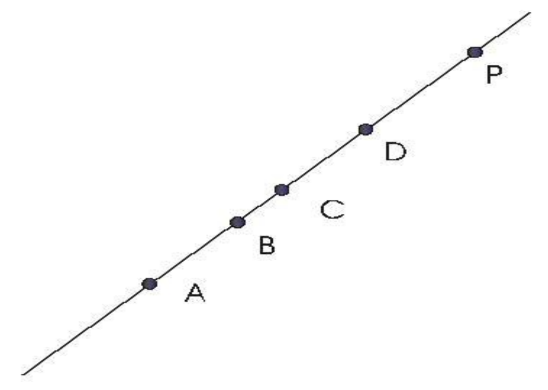


Secciones en una razón dada.

Secciones en un área dada refería a un problema similar, que los segmentos determinados por la construcción de un rectángulo equivalente a otro dado.

Secciones determinadas respondía al problema de determinar lo siguiente: dados cuatro puntos A, B, C y D sobre una recta L, obtener un punto P sobre la misma recta tal que el rectángulo con lados AP y CP se encuentre en una razón dada con el rectángulo de lados BP y DP. Todos estos problemas engendran ecuaciones de segundo grado.

Tangencias trata el problema de encontrar una circunferencia tangente a tres objetos dados (que pueden ser un punto, una recta o una circunferencia). Este último se conoce modernamente como el "problema de Apolonio".

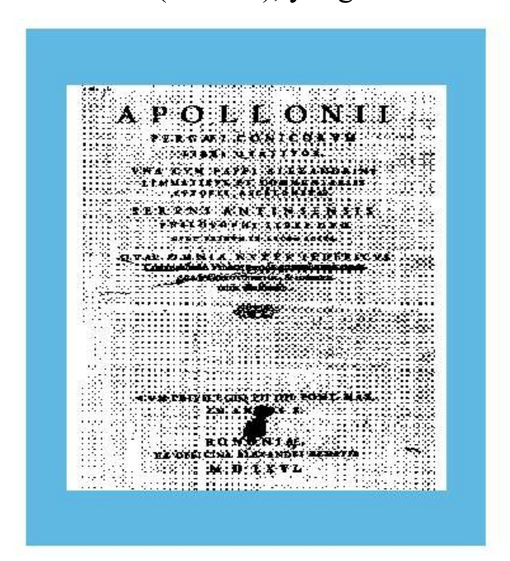


Secciones determinadas.

Apolonio también fue astrónomo. Ya desarrollaremos su contribución en otro capítulo.

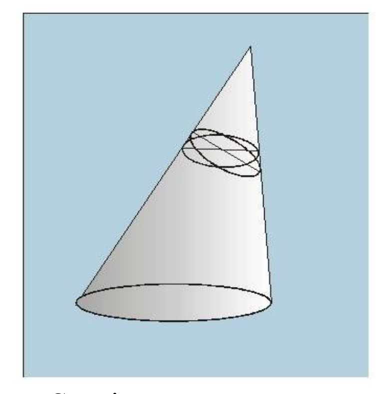
En relación con su trabajo en las secciones cónicas, debe decirse que si bien éstas habían sido tratadas por otros autores (como Euclides), fue Apolonio quien les dio el rigor, la consistencia, y la sistematización. Algunos historiadores de las matemáticas consideran las Secciones Cónicas como la culminación de la geometría clásica griega.

Lo primero que debe señalarse es que los griegos consideraban las cónicas como secciones de figuras tridimensionales por un plano (métodos de estereometría; secciones: intersección de un plano y un cono por ejemplo). Los griegos establecieron una división de curvas: lugares planos (rectas y circunferencias), lugares sólidos (cónicas), y lugares lineales: el resto de curvas.


APOLLONII

Secciones Cónicas de Apolonio.

Las Secciones Cónicas se supone que eran ocho libros con 487 proposiciones. Del griego original solamente se conserva la mitad de la obra (4 libros), otros tres libros en una traducción árabe (ibn Qurra). A diferencia de otros autores previos (como Menecmo), que generaban las secciones cónicas a partir de las tres clases de conos circulares rectos, Apolonio lo hizo a partir de un cono circular, ya fuera recto o oblicuo. También se sabe que fue el primero en reconocer las dos ramas de la hipérbola.

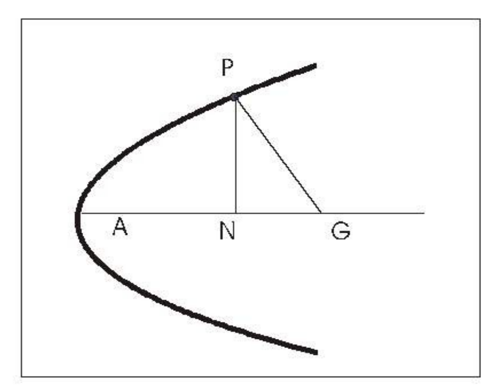


Secciones en un cono.

Apolonio mismo declara que los primeros 4 libros eran introductorios, aunque el Libro III contendría resultados originales. Los siguientes 4 libros sí son avanzados.

El Libro V es el que contiene resultados más novedosos y originales. Refiere a las longitudes máxima y mínima que se pueden dibujar desde un punto particular a una cónica. Son resultados sobre tangentes y normales a secciones cónicas. En este libro, por ejemplo, Apolonio demuestra el siguiente resultado:

"Si A es el vértice de una parábola $y^2 = px$ y si G es un punto situado sobre su eje y tal que $AG > p$, y si N es un punto entre A y G tal que $NG = p$, y si NP es la perpendicular al eje por N, que corta a la parábola en P, entonces PG es el segmento mínimo que va desde G a un punto de la curva, y por lo tanto es normal a la parábola en P." [Tomado de Boyer, Carl: Historia de la Matemática , p. 203-204].



Resultado de Libro V.

El Libro VI refiere a cónicas congruentes y semejantes y a los segmentos de las cónicas. Para Apolonio: 2 cónicas son semejantes cuando las ordenadas que se trazan al eje con distancias proporcionales del vértice son respectivamente proporcionales a las abcisas correspondientes.

El Libro VII trata de los diámetros conjugados de una cónica central. Aquí está la proposición: "En toda elipse la suma, y en toda hipérbola la diferencia de los cuadrados construidos sobre dos diámetros conjugados cualesquiera es iguales a la suma, o diferencia, respectivamente, de los cuadrados sobre los ejes". [Tomado de Boyer, Carl: Historia de la Matemática, p. 206].

El tema de los diámetros conjugados había aparecido en el Libro I, que define así: considérense las cuerdas paralelas a un diámetro de una elipse (o hipérbola); entonces los puntos medios están sobre otro diámetro. Los diámetros se llaman conjugados. Apolonio los utilizó sistemáticamente como el equivalente de coordenadas oblicuas (hoy usamos 2 ejes perpendiculares). Esto es lo más lejos, probablemente, que los griegos antiguos irían cerca de la geometría de coordenadas.

El Libro VIII se perdió, y se presume contenía resultados para determinar los diámetros conjugados de una cónica de tal manera que algunas funciones de sus longitudes tuvieran valores dados.

Aquí es necesario hacer un comentario: en Euclides y Apolonio encontramos una organización plenamente deductiva de las matemáticas, sin referencia al proceso de construcción mediante prueba y error, heurística, establecimiento de conjeturas, análisis, y, en fin, de todo el proceso previo que puede tomar decenas y centenares de años para llegar a un resultado matemático general. Hay que tener siempre en mente que estos procesos de construcción no pueden disasociarse de la formulación de teoremas y sus derivaciones lógicas por medio de la deducción.

Estos trabajos, de cualquier manera, establecieron la metodología, las características y la naturaleza de las matemáticas. Como hemos comentado anteriormente, se trata de un proceso en el que intervinieron no solo construcciones matemáticas sino elementos filosóficos, ideológicos, visiones del mundo, y circunstancias sociohistóricas que edificaron en una parte importante una disciplina cognoscitiva.

Con estos matemáticos cerramos una etapa histórica e intelectual. Ahora nos debemos dirigir al mundo alejandrino, una fase distinta no solo desde la perspectiva política o social, para nosotros, en la naturaleza de la práctica en las ciencias y las matemáticas.

4.3 Anexo: Libro V de los Elementos de Euclides, teoremas

Resulta de interés conocer con cierta precisión los resultados contenidos en el Libro V de los Elementos de Euclides, que fueron el tratamiento último dado al asunto de las relaciones numéricas por parte de los griegos clásicos.

Teorema V1

Dado un número cualquiera de magnitudes, que sean respectivamente equimúltiplos de otras magnitudes cualquiera, cuantas veces es múltiplo una magnitud de otra, otras tantas lo serán todas de todas las otras.

Teorema V2

Si una primera magnitud es múltiplo de una segunda el mismo número de veces que una tercera es múltiplo de una cuarta y una quinta es múltiplo de la segunda el mismo número de veces que una sexta es múltiplo de la cuarta, entonces también la primera y la quinta juntas serán múltiplos de la segunda el mismo número de veces que la tercera y la sexta lo son de la cuarta.

Teorema V3

Si una primera magnitud es múltiplo de una segunda el mismo número de veces que una tercera es múltiplo de una cuarta, y se toman equimúltiplos de la primera y de la tercera, serán también respectivamente equimúltiplos de la segunda y de la cuarta.

Teorema V4

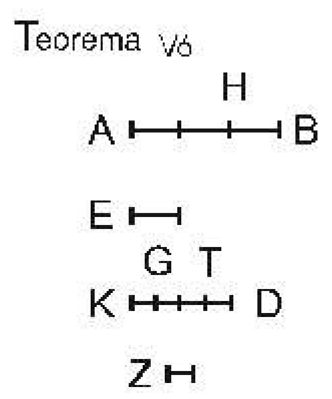
Si una primera cantidad tiene a una segunda la misma razón que una tercera a una cuarta, también los equimúltiplos de la primera y de la tercera tendrán la misma razón a los equimúltiplos de la segunda y de la cuarta tomados en sus orden.

Teorema V5

Si una magnitud es múltiplo de otra el mismo número de veces que una magnitud quitada (de la primera) lo es a la quitada (a la segunda), también lo que queda (de una) es a lo que queda (de la otra) como el total es al total.

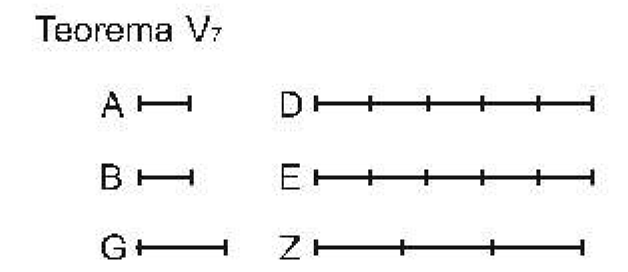
Teorema V6

Si dos magnitudes son equimúltiplos de otras dos magnitudes, y las cantidades quitadas a las primeras son equimúltiplos de las cantidades quitadas a las segundas, las restantes serán o iguales o equimúltiplos de ellas.



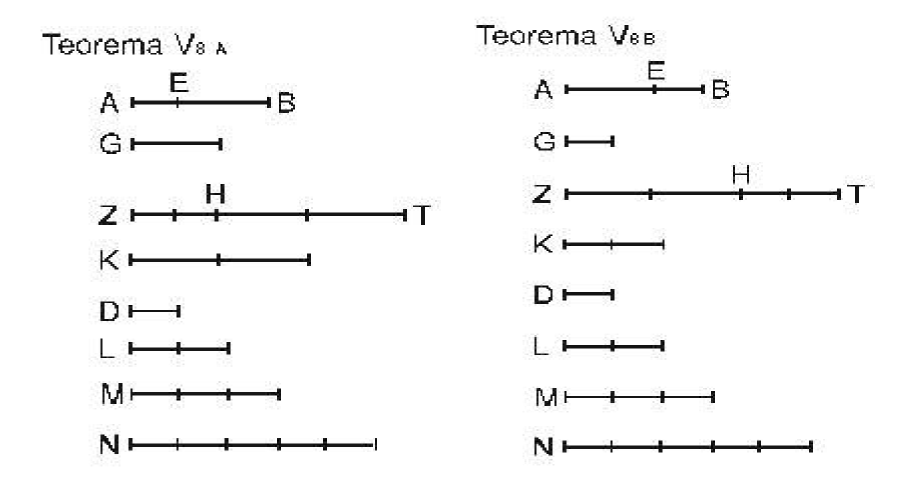
Teorema V7

Magnitudes iguales con respecto a una misma magnitud tiene la misma razón y una misma magnitud tiene la misma razón con magnitudes iguales.



Teorema V8

De dos magnitudes desiguales la mayor tiene con una misma magnitud mayor razón que la menor y la misma magnitud tiene mayor razón con la menor que con la mayor.

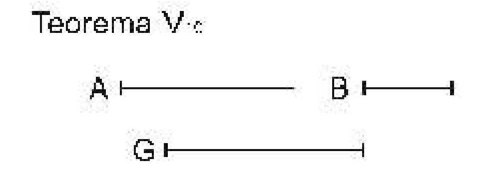


Teorema V9

Las magnitudes que tienen la misma razón a una misma magnitud son iguales, y aquellas magnitudes a las que una misma magnitud tiene la misma razón también son iguales.

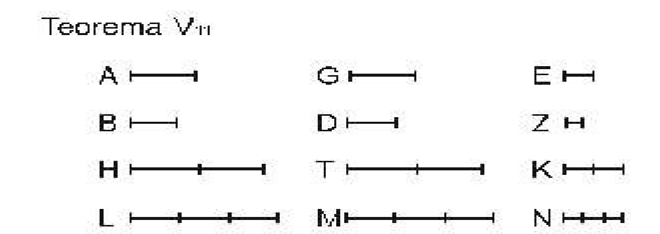
Teorema V10

De las magnitudes que tienen razón con una misma magnitud, la que tiene mayor razón es mayor, y aquella a la cual una misma magnitud tiene mayor razón es menor.



Teorema V11

Las razones iguales a una razón son también iguales entre sí.



Teorema V12

Si cualquier número de magnitudes están proporcionadas como una de las precedentes está a una de las siguientes, así están todos los antecedentes a todos los consiguientes.

Teorema V12

A G E

B D Z

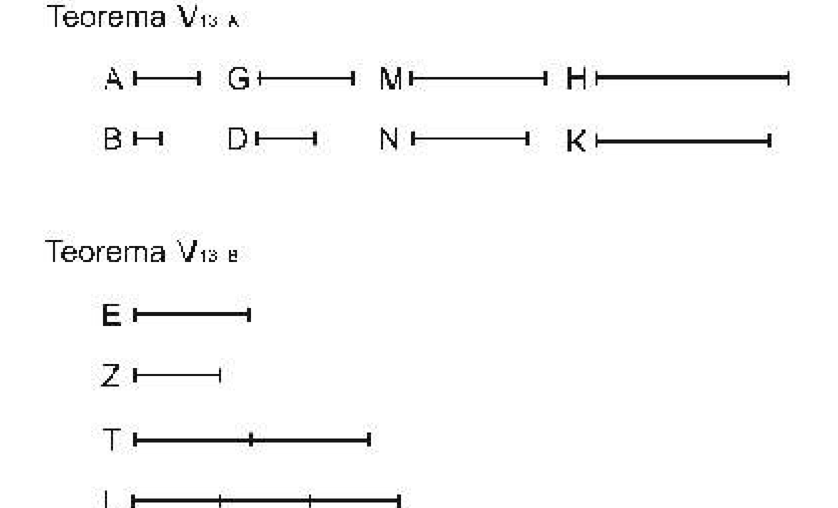
H L

T M

K N

Teorema V13

Si una primera magnitud tiene a una segunda la misma razón que una tercera a la cuarta y la tercera a la cuarta tenga una razón mayor que la quinta a la sexta, también la primera a la segunda tendrá una razón mayor que la quinta a la sexta.



Teorema V14

Si una primera magnitud tiene a la segunda la misma razón que una tercera a la cuarta, y la primera es mayor que la tercera, también la segunda será mayor que la cuarta: si fuese igual, igual; si menor, menor.

Teorema V15

Las partes y los equimúltiplos tomados en el mismo orden tienen la misma razón.

Teorema V16

Si cuatro magnitudes son proporcionales, también permutándolas, serán proporcionales.

Teorema V17

Si las magnitudes proporcionales son compuestas, también separándolas, son proporcionales.

Teorema V18

Si algunas magnitudes separadas son proporcionales, también compuestas serán proporcionales.

Teorema V19

Si un todo tiene a otro todo la misma razón que lo quitado (de uno) tiene a lo quitado (del otro), también las partes restantes estarán entre sí como los todos.

Teorema V20

Si hay tres magnitudes y otras en igual número, tomándolas de dos en dos proporcionalmente, con la misma razón, si la primera es mayor que la tercera, también la cuarta será mayor que la sexta, y si igual, igual, y si menor, menor.

Teorema V21

Si hay tres magnitudes y otras tantas tomadas de dos en dos forman una proporción perturbada, igualmente, si la primera es mayor que la tercera, también la cuarta será mayor que la tercera, también la cuarta será mayor que la que la sexta; si igual, igual; si menor, menor.

Teorema V22

Si hay algunas magnitudes y otras tantas que, tomadas de dos en dos, estén en la misma proporción, también tendrán igualmente una razón igual.

Teorema V23

Si se dan tres magnitudes y otras tantas, unidas juntamente de dos en dos en la misma proporción, y la proporción de las mismas está perturbada, estarán igualmente en la misma proporción.

Teorema V24

Si la primera tiene a la segunda la misma razón que la tercera a la cuarta y también la quinta tiene a la segunda la misma razón que la sexta a la cuarta, también la primera y la quinta juntas tendrán a la segunda la misma razón que la tercera y la sexta a la cuarta.

Teorema V25

Si cuatro magnitudes son proporcionales, la máxima y la mínima son mayores que las dos restantes.

4.4 Biografías



Apolonio

Apolonio nació alrededor del año 262 a. C. en Perga (ahora Turquía). Son muy pocos los datos que se tienen de este matemático, es conocido como "El gran geómetra", debido a su gran influencia en el desarrollo de la geometría; además hizo una importante colaboración en la astronomía.

Siendo muy joven, partió a Alejandría a estudiar con los sucesores de Euclides y poco tiempo después se convirtió en profesor ahí. Se sabe que visitó Pergamum, una antigua ciudadgriega en Mysia, en donde acababan de construir una universidad y una biblioteca similares a las de Alejandría. En este cuidad conoció a Eudemus de Pergamum y a Attalus, quien se cree debió ser el Rey Attalus I de Pergamum. Tuvo un hijo llamado también Apolonio y fue quien se encargó de llevar la segunda edición de su libro más famoso Cónicos desde Alejandría hasta Eudemus en Pergamum.

Murió alrededor del año 190 a. C. en Alejandría, Egipto.

4.5 Síntesis, análisis, investigación

1. Ubique en un mapa dónde estaba la ciudad de Alejandría.
2. Investigue y explique resumidamente cómo se dio la conquista macedonia de Grecia, la división del imperio de Alejandro el Grande al darse su muerte, y el contexto sociopolítico del mundo Ptolomeo.
3. ¿Cuántos Libros o capítulos posee los Elementos de Euclides? ¿A qué temas se refieren los Libros del I al IV? ¿Cuántas definiciones tiene el Libro I? ¿Cuántas proposiciones tiene los Elementos?
4. Haga dibujos que ilustren las definiciones del Libro III de los Elementos de Euclides.
5. Investigue sobre las pruebas de los teoremas del Libro III de los Elementos de Euclides. Ofrezca demostraciones de 3 de ellos.
6. Haga dibujos que ilustren cada una de las definiciones del Libro IV de los Elementos de Euclides.

7. ¿Se puede considerar a Euclides el padre de la geometría? Explique.
8. Explique cómo obtenían los griegos las secciones cónicas.
9. ¿Qué temas considera Apolonio en el Libro V de sus Secciones Cónicas?
10. Lea el siguiente texto.

    "Los Elementos de Euclides no solamente fueron la primera obra matemática griega de importancia que ha llegado hasta nosotros, sino también el libro de texto que ha ejercido una mayor influencia de todos los tiempos. Fue escrito hacia el 300 a.C., y desde entonces fue copiado y recopiado sin cesar, con la consecuencia de que se deslizaron en él errores y variaciones de una manera inevitable; incluso algunos editores posteriores, especialmente Teón de Alejandría, a finales del siglo IV, pretendieron mejorar el original. Sin embargo, ha sido posible obtener una impresión bastante buena del contenido de la versión euclídea por comparación entre más de media docena de copias griegas manuscritas que datan en su mayoría de entre los siglos X y XII. Las ampliaciones posteriores, que aparecen generalmente como escolios, añaden información adicional, con un interés histórico frecuente-mente, y en la mayor parte de los casos se distinguen con facilidad del texto original. También nos han llegado copias de los Elementos en su traducción al árabe, que se vertieron más tarde al latín en el siglo XVI y, por último, a los idiomas vernáculos durante el siglo XVI. La primera versión impresa de los Elementos apareció en Venecia en 1482, y fue uno de los primerísimos libros matemáticos que se imprimió; se estima que desde entonces se han publicado más de un millar de ediciones. Probablemente ningún otro libro salvo la Biblia puede jactarse de haber tenido tantas ediciones, y desde luego ninguna otra obra matemática ha tenido una influencia comparable con la de los Elementos de Euclides. ¡Qué apropiado resultaba, pues, el que los sucesores de Euclides se refirieran a él llamándole ‹El Elementador›!" [Boyer, C.: Historia de la matemática, p. 162]

    Describa según esta cita la influencia de este famoso libro.

11. Estudie la siguiente cita.

    "Los métodos que utiliza Apolonio en las Cónicas son tan semejantes en muchos aspectos al planteamiento analítico moderno que su obra se ha considerado a menudo como una anticipación de la geometría analítica de Descartes en unos 1.800 años. El uso de unas rectas de referencia en general y de un diámetro y una tangente en uno de sus extremos en particular no difiere esencialmente, desde luego, del uso de un sistema de coordenadas, sea rectangular u oblicuo, en general. Las distancias medidas a lo largo del diámetro a partir del punto de tangencia son las abscisas, y los segmentos paralelos a la tangente, interceptada por el diámetro y la curva, son las ordenadas. Las relaciones que da Apolonio entre estas abscisas y las correspondientes ordenadas (o síntomas de las curvas) no son otra cosa que formas retóricas de las ecuaciones analíticas de las curvas consideradas. Sin embargo, en el álgebra geométrica de los griegos no había lugar para las magnitudes negativas y, por otro lado, lo que podríamos llamar un sistema de coordenadas venía siempre superpuesto 'a posteriori' a una curva dada para estudiar sus propiedades. No parece presentarse ningún caso en la geometría antigua en el que se fije un sistema de coordenadas de referencia 'a priori', con el fin de representar gráficamente una ecuación o relación expresada de manera simbólica o retórica. Podemos decir de la geometría griega que las ecuaciones vienen

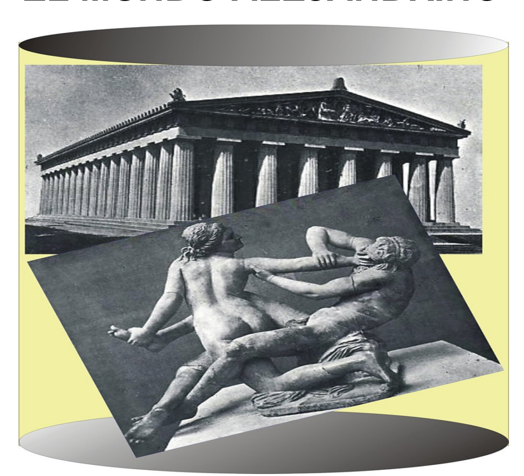
determinadas por las curvas, pero no que las curvas vengan determinadas por las ecuaciones. Las coordenadas, variables y ecuaciones fueron, pues, conceptos subsidiarios derivados de una situación geométrica concreta, y se puede asegurar que desde el punto de vista griego no era suficiente en absoluto para definir curvas el darlas de manera abstracta como lugares geométricos de los puntos que satisfagan condiciones dadas sobre sus dos coordenadas. Para garantizar que un lugar geométrico era realmente una curva, los antiguos griegos consideraron necesario o bien producirla de una manera estereométrica como una sección de un sólido o describir su construcción de una manera cinemática." [Boyer, C.: Historia de la matemática, p. 205]

Explique, según Boyer, la relación entre ecuaciones y curvas en la geometría griega. Explique la opinión de este gran historiador de las matemáticas sobre si las Cónicas constituyen una anticipación de la geometría analítica.

12. Repase con cuidado los teoremas del Libro V de los Elementos de Euclides y trate de interpretarlos en el contexto de la matemática de nuestro tiempo. Escoja 5 teoremas, utilice o haga dibujos apropiados y ayúdese con bibliografía adicional para explicarlos.

CAPITULO V

EL MUNDO ALEJANDRINO



En este capítulo nos adentraremos en los resultados matemáticos de una etapa de la civilización griega que tuvo la mayor importancia para el desarrollo de las ciencias. En el mundo presocrático encontramos una primera búsqueda por explicar racionalmente la realidad física, ya fuera con sustancias únicas o con números. El mundo ateniense incluyó desde el apogeo político y social de esta gran ciudad-Estado hasta una decadencia que se asoció con el desenlace de las guerras con Esparta; se trata de una época que vio grandes sistemas de especulación filosófica, con un fuerte carácter moral y un foco intelectual en el ser humano, con formulación de métodos y objetos para el conocimiento, pero, también, con el establecimiento de fronteras y obstáculos para el progreso de las ciencias. Una etapa que tal vez pueda decirse fue muy ideológica.

El mundo alejandrino va a tener un espíritu distinto, conjunción de muchos factores. Para empezar, con la diversidad y los intercambios culturales que la expansión macedónica supuso, con el contacto con otras civilizaciones desde la India a Egipto, pasando por Mesopotamia. Este es el escenario que vamos a estudiar en este capítulo.

5.1 Los Alejandrinos

Bien dice Sarton que el término "helenística" está correctamente usado para designar esta etapa de la civilización griega antigua: "La palabra helenística está bien elegida, sugiere lo helénico y algo más, extraño a éste: lo egipcio y lo oriental." Ahora bien, todo empezó con un "alumno" de Aristóteles: Alejandro el Grande.

Alejandro transformó el mundo griego en pocos años. Al morir en el 323 a.C., su imperio se dividió en tres partes:

"... cayendo Egipto bajo el poder de uno de sus generales, Ptolomeo, quien como el propio Alejandro había estudiado con Aristóteles. Ptolomeo contrató a Estratón, quien más tarde sería

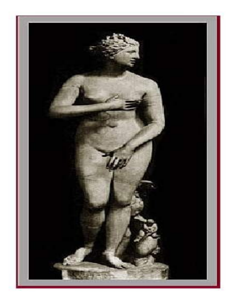
director del Liceo, como tutor de su hijo, y fundó el Museo de Alejandría, instituto de investigación y de enseñanza que seguía el plan del Liceo, aunque a una escala mucho mayor. El museo tenía una nómina de algo así como un centenar de profesores que recibían un salario del estado. Estaba dotado de una biblioteca de cerca de medio millón de rollos y tenía también un zoo, jardines botánicos, observatorio astronómico y salas de disección. El Museo duró unos seiscientos años, aunque los primeros doscientos fueron los más importantes para la ciencia." [Mason, Stephen: Historia de las Ciencias 1. La Ciencia Antigua, la Ciencia en Oriente y en la Europa Medieval, pgs. 59-60]

Para la ciencia y las matemáticas debe resaltarse el imperio ptolemaico, centrado alrededor de la ciudad de Alejandría, el lugar del Museo y de la Biblioteca cuyo destino terminó en manos de la guerra y la política.

Este Museo tendría una gran relevancia, como consigna Sarton:

"El Museo hizo mucho durante el primer siglo de su existencia. Euclides, Eratóstenes de Cirene, que fue el primero en medir el tamaño de la Tierra, con notable precisión, y Apolonio de Perga, que escribió el primer tratado sobre secciones cónicas, hicieron investigaciones matemáticas. Otro gigante contemporáneo, Arquímedes, vivió en Siracusa, pero pudo haber visitado Alejandría y en él influyó ciertamente la escuela de matemáticas de aquella ciudad. Igualmente notables fueron los trabajos en astronomía. Alejandría era un lugar ideal para el sincretismo astronómico; allí podían mezclarse libremente las ideas griegas, egipcias y babilónicas, en primer lugar porque no existía una tradición establecida ni 'intereses creados' de ninguna clase y, luego, porque podían encontrarse allí, como de hecho lo hacían, representantes de diversas razas y credos. Aristilo y Timocaris hicieron observaciones astronómicas y, un poco más tarde, Conón de Samos; este último utilizó y discutió las observaciones de los babilonios sobre los eclipses. Otro natural de Samos, Aristarco, no sólo llevó a cabo observaciones propias, sino que defendió teorías tan atrevidas que ha sido llamado 'el Copérnico de la Antigüedad'". [Sarton, George: Ciencia antigua y civilización moderna, p. 15.]

Una las características interesantes del imperio de los ptolomeos fue la integración de varias etnias y culturas: persas, judíos, griegos, árabes, romanos, etc., en un contexto histórico que vivió una ampliación de los límites y perspectivas intelectuales como producto de una potenciación del comercio y los viajes, algunos de éstos en busca de conocimiento. No es extraño que los alejandrinos tuvieran un buen conocimiento geográfico, técnicas de navegación mejoradas y novedosos mecanismos de medida del tiempo.



Venus Medici, 200 a.C.

Debe decirse que, de muchas maneras, fueron introducidos cambios en el valor de las técnicas, la mecánica, las artes, es decir: de la actividad material de los habitantes, lo que no podían dejar de afectar la construcción científica y matemática de la época. Entonces, se observa en esta etapa de la civilización griega un cambio en relación con el periodo clásico que desestimó el mundo terrenal y empírico privilegiando la abstracción separada de la práctica humana y concreta. Más que un cambio, incluso un renacimiento: "... el hecho capital de que el Renacimiento alejandrino fue un completo renacimiento." [Sarton, George: Ciencia antigua y civilización moderna, p. 17]

Es por eso, incluso, que se sostiene la opinión de un tipo diferente de matemáticas en el periodo alejandrino en relación con la etapa clásica de la matemática griega.

Resulta extraordinariamente interesante, sin embargo, que hayan sido dos intelectuales alejandrinos los que hayan codificado con tanta sistematización y calidad las matemáticas clásicas del mundo griego: Euclides y Apolonio.

El nuevo carácter de las matemáticas alejandrinas se encuentra con mayor propiedad en Arquímedes, Herón, Ptolomeo, Menelao, Diofanto, o Pappus. El foco de la preocupación de los geómetras alejandrinos estuvo en los resultados para calcular longitudes, áreas y volúmenes. Si bien es cierto que algunos de estos asuntos aparecen en los Elementos de Euclides, sólo lo hacen de una manera muy aislada, mientras que para los alejandrinos su importancia fue central.

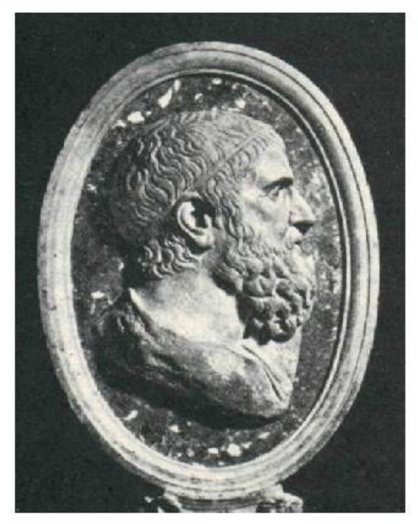
Otra de las diferencias en relación con la matemática clásica es el uso más amplio de los irracionales, que es probable que tenga su origen en un rescate de las tradiciones babilonias que los utilizaron como números en el cálculo de longitudes, áreas y volúmenes. De hecho, esto explicaría las características específicas en el desarrollo de la geometría de la Grecia helenística. Puede decirse que los alejandrinos revivieron la aritmética y el álgebra. La matemática clásica tuvo un énfasis cualitativo sin referencia a las medidas numéricas.

La matemática helenística dedicó también su atención a la mecánica. Otra diferencia relevante. Es decir que, mientras las matemáticas del periodo clásico se reducían a la aritmética de números enteros, geometría, música y astronomía, las helenísticas incluían además mecánica, astronomía, óptica, geodesia, la aritmética aplicada (lo que los griegos llamaron logística).

Es interesante señalar una distinción en el seno de las matemáticas alejandrinas realizada por ellos mismos: aquella referida a los conceptos intelectuales y a los materiales. Aritmética y geometría correspondían a la primera.

5.2 Arquímedes

Nació en Siracusa en el 287 a.C. y murió en el 212 a.C.. Se considera el matemático más brillante de toda la Antigüedad. Recibió su educación en Alejandría. Se afirma con toda justicia que el trabajo geométrico de Arquímedes fue el punto máximo de la matemática alejandrina.



Arquímedes usó resultados de Euclides y Aristeo. Demostró teoremas sobre áreas y volúmenes por medio del método de exhausción, es decir, usando figuras líneas inscritas y circunscritas para llenar el área de un volumen. Sin embargo, también utilizó el método indirecto en algún momento de sus demostraciones. Es decir, no llegó a dar el salto hacia el concepto moderno de límite. Esto lo realiza en su libro Sobre la esfera y el cilindro. Debe mencionarse que el segundo libro de esta obra incluye resultados de álgebra geométrica.

Es famoso en muchos campos. Se conoce muy bien el principio que lleva su nombre y que afirma que al sumergirse un cuerpo en el agua, el agua ejerce sobre ese cuerpo una presión vertical de abajo hacia arriba que es igual al peso del agua desplazada. Se dice que aquí empezó la hidrostática.

Arquímedes realizó importantes estudios sobre palancas.



Obras de Arquímedes. Una versión de 1 458, por Jacobus Cremonensis.

El método de Exhausción

El método de Exhausción nace del problema de comparar las figuras curvilíneas y las rectilíneas. Como usted sabe, uno de los grandes problemas de la Antigüedad era cómo reducir el círculo, o longitudes curvas, a segmentos de recta, y otro: cómo reducir cualquier línea curva a líneas rectas y círculos (esto se traduce como la construcción de figuras curvas usando solo regla y compás). No obstante, el "método de Exhausción" no fue llamado así por los griegos, sería mucho tiempo después que Gregoire de St. Vincent (1 589 - 1 667) lo bautizaría de esa manera.

En ese escenario fueron usados dos principios generales sobre los números y sus relaciones con el infinito, que aparecieron de diferente forma, y fueron relevantes para la utilización del método que analizamos.

Primer principio:

- "Cualquier cantidad, por más pequeña que sea, puede hacerse tan grande como se quiera multiplicándola por un número suficientemente grande".

Este se puede formular de la siguiente manera:

- "Dadas dos magnitudes diferentes α y β (con $\beta < \alpha$) existe entonces:

  a) un número n tal que $n\beta > \alpha$ (esto se encuentra en el Libro V de los Elementos de Euclides, Def. 4);

  b) un número n tal que $n(\alpha - \beta) > \gamma$ donde γ es cualquier magnitud de la misma clase (esto se llama el Axioma de Arquímedes, en el trabajo Sobre la esfera y el cilindro de Arquímedes Libro I)".

Segundo principio:

"Si de cualquier magnitud sustraemos una parte no menor que su mitad, y si del resto sustraemos de nuevo una cantidad no menor que su mitad, y si continuamos repitiendo este proceso de sustracción, terminaremos por obtener como resto una magnitud menor que cualquier magnitud del mismo tipo dada de antemano".

Lo anterior se puede poner también así:

"Dadas dos magnitudes diferentes α y β (con $\beta < \alpha$, existe un número n tal que $(1-p)^n\alpha < \beta$, donde $p \geq \frac{1}{2}$ (esto se encuentra en los Elementos de Euclides, Libro X, Def. 1)".

Podemos ilustrar los principios usados por los griegos de la siguiente manera, usando un pasaje de nuestro libro Elementos de Cálculo Diferencial. Historia y ejercicios resueltos:

Tómese $\alpha = 2\ 000,\ \beta = 2$ y $\gamma = 8\ 000.$

La primera forma del principio dice que se puede encontrar un n tal que $\beta \times n \geq \alpha;$

entonces:

$$2 \times n \geq 2\ 000.$$

Se puede considerar n mayor que 1000 y ya funciona.

Veamos, si $n = 1500$ entonces a

$$2 \times 1\ 500 = 3\ 000 \geq 2\ 000.$$

La segunda forma del principio:

$$\alpha - \beta = 2\ 000 - 2 = 1\ 998.$$

Se debe encontrar un n tal que

$$n \times (\alpha - \beta) \geq \gamma.$$

Es decir, de tal manera que

$$n \times 1\ 998 \geq 8\ 000.$$

Este $n = 1\ 500$ sirve; pues

$$1\ 500 \times 1\ 998 \geq 8\ 000.$$

Veamos ahora el segundo principio:

Sea $p = \frac{3}{4}$, y los mismos α y β de antes. Queremos encontrar un n tal que

$$(1 - p)^n \times \alpha \leq \beta.$$

o que

$$\left(1 - \frac{3}{4}\right)^n \times 2\ 000 \leq 2.$$

Es decir:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n \times 2\ 000 \leq 2.$$

Con $n = 5$ obtenemos

$$\left(\frac{1}{4}\right)^5 \times 2\ 000 = 0,000976563 \times 2\ 000 = 1,953125.$$

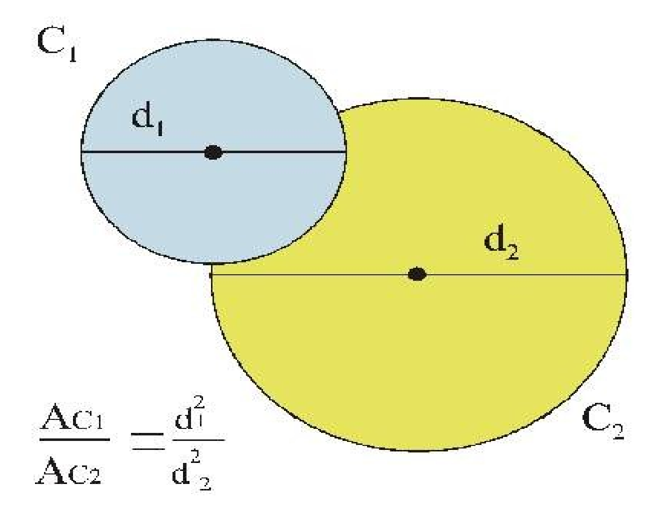
Y entonces: $1,953125 \leq 2.$

Polígonos y círculos

El Libro XI de los Elementos de Euclides incluye el método de Exhausción en los 18 teoremas sobre áreas y volúmenes que posee, especialmente de figuras curvilíneas acotadas por superficies. El método se usa, por ejemplo, para demostrar que algunas propiedades de los polígonos se dan en los círculos. Por ejemplo, para probar si se tiene dos círculos que:

"la razón de sus áreas es la misma que la que existe entre los cuadrados de sus diámetros respectivos".

El método consistía en:

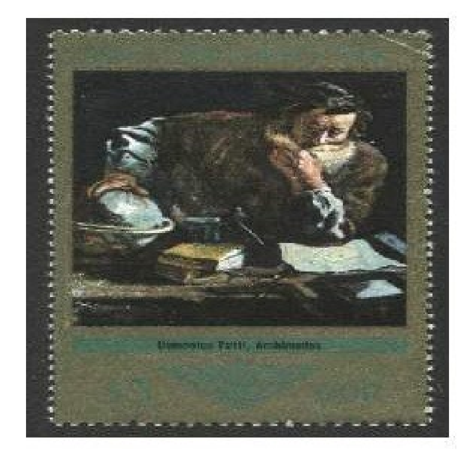


- aproximar el área de los círculos con polígonos regulares inscritos y circunscritos,
- (y como esa propiedad se cumplía para los polígonos) entonces se deducía que se cumplía para los círculos. Es decir, se cumplía para los polígonos que:

  "La razón de las áreas de dos polígonos similares inscritos en círculos es la misma que existe entre los cuadrados de los diámetros de los círculos".

El infinito

La idea es que el proceso se puede hacer de manera indefinida, aumentando el número de lados de los polígonos. Entonces: las propiedades de los círculos se pueden conocer estudiando los polígonos regulares (que resultan más fáciles de "manejar").



Arquímedes, pintado por Fetti, estampilla.

Es en este momento donde se ocupa el segundo principio que mencionamos arriba, para poder garantizar ese salto de los polígonos de un número finito de lados a un círculo (que sería como el límite infinito de esos polígonos).

En resumen: el método permitía demostrar la posibilidad de aproximar áreas por polígonos, aumentando el doble de lados en cada ocasión.

Repetimos: fue Arquímedes quien más lejos llevaría el método de Exhausción.

Un ejemplo

Considere el siguiente ejemplo de cómo funciona el método de exhausción, tomado de nuestro libro Elementos de Cálculo Diferencial. Historia y ejercicios resueltos:

A) Constrúyase un cuadrado inscrito y otro circunscrito al círculo

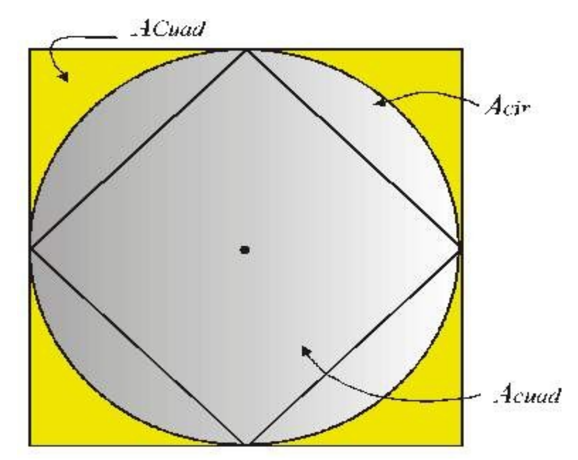
A_{cir} : área del círculo

A_{cuad} : área cuadrado inscrito

A_{Cuad} : área cuadrado circunscrito

Un detalle importante es que $A_{cuad} > \frac{A_{cir}}{2}$.

B) En la siguiente figura el cuadrado circunscrito se divide en 8 triángulos iguales: $A_1, A_2, \ldots, A_8$.



Círculos y polígonos.

Es fácil ver que:

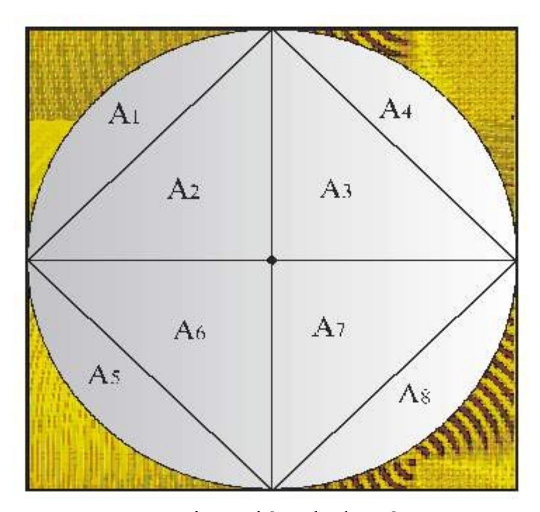
$$A_{cuad} = A_2 + A_3 + A_6 + A_7 = \frac{A_{Cuad}}{2}$$

(cuatro triángulos hacen la mitad del cuadrado circunscrito).

Ahora obsérvese el rectángulo formado por

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4,$$

que también es la mitad del cuadrado grande.



La aproximación de las áreas.

Claramente este rectángulo es mayor que la mitad del área del círculo.

Entonces:

$$A_{cuad} > \frac{A_{cir}}{2}.$$

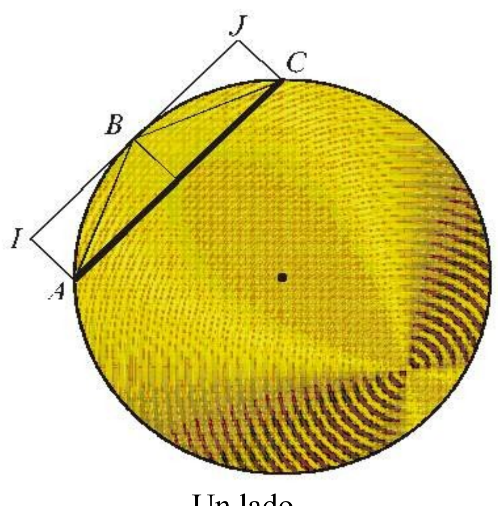
Ahora vamos a construir un octógono $ABCDEFGH$ a partir del cuadrado inscrito.

Esto se hace para mejorar la aproximación al área del círculo que hacía el cuadrado.

Si llamamos con A_{dif} la diferencia entre el área del círculo y el área del cuadrado inscrito, vamos a mostrar que este octógono va a tener un área que cubre más de la mitad de A_{dif}.

Es decir, la mejoría de la aproximación es muy precisa.

Para simplificar concentrémonos en el lado AC. Vea la figura siguiente.



Un lado.

B es el punto del círculo donde se biseca el arco AC (D, F, H se construyen de igual manera).

El área del rectángulo $ACJI$ es claramente mayor que el área del segmento de círculo encerrado por ABC

Entonces la mitad del área del rectángulo $ACJI$ es mayor que la mitad del segmento de círculo mencionado.

Ahora, note que el área del triángulo ABC es la mitad del área del rectángulo $ACJI$.

Entonces:

$$\text{Área} \quad ABC = \frac{\text{Área} \quad ACJI}{2} > \frac{\text{Área} \quad \text{Segmento círculo} \quad ABC}{2}.$$

Note que el área del triángulo ABC es lo que se añade al cuadrado para formar el octógono a partir del lado AC.

De esta forma el área del octógono es la suma de las siguientes áreas:

$$\text{cuadrado inscrito} + \triangle ABC + \triangle CDE + \triangle EFG + \triangle GHA.$$

El octógono así construido permite mejorar la aproximación en más de la mitad de la diferencia del área del círculo y la del cuadrado inscrito.

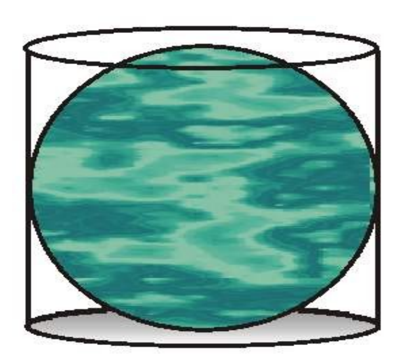
Otros resultados

Mediante un polígono de 96 lados, Arquímedes mostró que

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Por exhausción mostró el área de una elipse, el área limitada por cada cuerda en una parábola, y sobre el cono: su volumen y su superficie. Uno de los resultados más famosos en ese sentido se encuentra en la obra Sobre la esfera y el cilindro:

"Una esfera cualquiera es igual a cuatro veces el cono que tiene como base un círculo máximo de la esfera y altura igual al radio de la esfera".



Esfera y cilindro.

Y, también, se encuentra el siguiente:

"Cualquier cilindro cuya base es el círculo más grande de una esfera y cuya altura es igual al diámetro de la esfera, es $\frac{3}{2}$ (del volumen) de la esfera, y su superficie junto con sus bases es $\frac{3}{2}$ de la superficie de la esfera."

Arquímedes quizo que este resultado con el cilindro circunscrito en la esfera fuera colocado en su tumba. El romano Cicerón relata haber encontrado en Siracusa, años después, una tumba con esta inscripción gravada. El asumió que se trataba de la tumba de Arquímedes

El Axioma de Arquímedes mencionado antes ha sido usado por más de dos mil años.

El trabajo llamado Sobre conoides y esferoides trata de algunas propiedades de figuras de revolución generadas por cónicas. Arquímedes al igual que Apolonio realizó algunos trabajos sobre las secciones cónicas.

El método

En otro libro titulado Cuadratura de la Parábola ofrece dos métodos para encontrar el área de un segmento parabólico. Sobre éste, Bell subraya el tratamiento original que Arquímedes realiza:

"El desprecio sublime de Arquímedes por todo lo convencional se ve en su trabajo más curioso. En el problema, que resolvió, de hallar el área de un segmento parabólico. La demostración es, por supuesto, rigurosa y equivale a una integración, algo disfrazada de exhaución, en la demostración oficial; pero es la demostración no oficial la que ofrece mayor interés. Esto salió a relucir en 1 906 cuando se encontró en Constantinopla una obra de Arquímedes en la que se describía su método heurístico. Para descubrir cuál era el área que se buscaba, Arquímedes tradujo el problema de geometría en otro equivalente de mecánica. Habiendo resuelto este último, afirma que el resultado no ha sido 'excesivamente demostrado'. Luego procede a dar una demostración geométrica en la que, digámoslo de paso, realiza la primera suma de una serie infinita en la historia. La serie es

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n}$$

y utiliza el hecho de que 4^{-n} tiende a 0 cuando n se aproxima al infinito.

Había ya sumado antes una serie finita,

$$\sum_{s=1}^{n} as^2."$$

[Bell, E.T.: Historia de las matemáticas, p. 85.]

Este trabajo al que se refiere Bell, El método, descubierto en una biblioteca en Constantinopla en 1906, es uno de los más famosos de Arquímedes. En esta obra Arquímedes ilustra su procedimiento para encontrar el área del segmento parabólico y, a diferencia de los procedimientos deductivos clásicos, utiliza argumentos que son en esencia físicos. Arquímedes usó métodos mecánicos para encontrar teoremas sobre cilindros, esferas, esferoides y paraboloides de revolución.

En su prefacio o introducción, se expresa esta aproximación; dice Arquímedes:

"Reconociendo, como digo, tu celo y tu excelente dominio en materia de filosofía, amén de que sabes apreciar, llegado el caso, la investigación de cuestiones matemáticas, he creído oportuno confiarte por escrito, y explicar en este mismo libro, las características propias de un método según el cual te será posible abordar la investigación de ciertas cuestiones matemáticas por medio de la mecánica. Algo que, por lo demás, estoy convencido, no es en absoluto menos útil en orden a la demostración de los teoremas mismos. Pues algunos de los que primero se me hicieron patentes por la mecánica, recibieron luego la demostración por geometría, habida cuenta de que la investigación por ese método queda lejos de una demostración; como que es más fácil construir la demostración

después de haber adquirido por ese método cierto conocimiento de los problemas, que buscarla sin la menor idea al respecto. <... Por esta razón, aun el caso> de los teoremas referentes al cono y a la pirámide, cuya demostración fue Eudoxo el primero en hallar, a saber: que el cono es la tercera parte del cilindro y la pirámide es la tercera parte del prisma, con la misma base e igual altura, conviene atribuir buena parte del mérito a Demócrito, el primero que enunció esto sin demostración acerca de dichas figuras. También en mi caso sucede que el descubrimiento de los teoremas que ahora doy a conocer ha tenido lugar de modo semejante al de los precedentes. Y he querido publicar el método una vez perfilado para que no den en pensar algunos que hablaba por hablar al haberme referido a él anteriormente y, al mismo tiempo, porque estoy convencido de que puede representar una contribución no poco provechosa a la investigación matemática. Pues supongo que algunos de mis contemporáneos o sucesores llegarán a encontrar por el método expuesto otros teoremas que a mí todavía no se me han ocurrido.

Así pues, expongo en primer lugar el resultado que también fue el primero en manifestarse por vía mecánica, a saber: que todo segmento de una sección de cono rectángulo es cuatro tercios del triángulo que tiene la misma base e igual altura, y seguidamente, uno por uno, los resultados tratados de la misma manera. Al final del libro formulo las demostraciones geométricas de los teoremas cuyos enunciados te había enviado con anterioridad." [Arquímedes: El Método, pp. 35-36]



Arquímedes. Máquina para hundir barcos. En un detalle mural en el Stanzino delle Matematiche en la Galleria degli Uffizi (Florencia, Italia).

En su trabajo Sobre las espirales, no solo se reduce a utilizar figuras rectilíneas sino también pequeños sectores circulares que son inscritos o circunscritos para realizar la aproximación. Siempre termina utilizando el método indirecto para completar sus demostraciones.

Si se hace un balance del trabajo matemático de Arquímedes, puede decirse que sus conclusiones en cuanto a sólidos, áreas o longitudes no son especialmente decisivas, ni tampoco su método. Sin embargo, hay consenso en que se trata de problemas novedosos y originales. Su trabajo en la mecánica, en hidrostática, sí son originales completamente, en particular el hecho de ofrecer pruebas de naturaleza matemática en torno a asuntos juzgados casi siempre como meramente prácticos.



Obras de Arquímedes, en libro por George Cooke, Londres 1807.

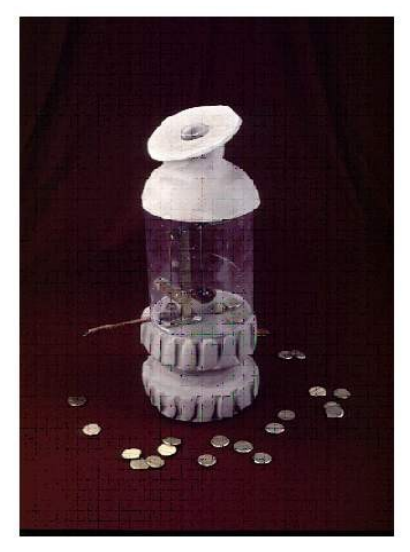
Para Bell:

"Su trabajo más original fue, quizás, sus matemáticas aplicadas. En este campo, hasta donde se sabe hoy, fue un iniciador. Menaechmo y otros habían aplicado con éxito el método del 'agotamiento' a problemas difíciles (el mismo Arquímedes menciona a Eudoxio y atribuye a Demócrito la exposición del resultado para el volumen de una pirámide), pero ninguno había aplicado la mecánica a las matemáticas. Antes de Arquímedes no existió la mecánica científica. Es posible que hubiera reglas empíricas, pero éstas están en un universo diferente. Su descubrimiento de la ley de flotación creó prácticamente la ciencia de la hidrostática y su formulación de la teoría de la palanca hizo lo propio para la estática. Tan potentes fueron sus métodos que determinó las posiciones de equilibrio y de estabilidad de un paraboloide de revolución flotante en diferentes posiciones. Fiel a la tradición griega, Arquímedes basó su mecánica en postulados. Sus determinaciones de centroides fueron casi tan difíciles como las que hay en la actualidad en un curso de cálculo. Por ejemplo, halló el centroide de un semicírculo, un hemisferio, un segmento de esfera, y un segmento recto de un paraboloide de revolución. No es, pues, extraño, que los musulmanes sintieran por Arquímedes una veneración casi supersticiosa. Durante dos mil años no hubo nadie que pudiera compararsele." [Bell, E.T.: Historia de las matemáticas, pp. 84-85]

5.3 Herón

Realizó sus trabajos en un período entre el 100 a.C. y el 100 d.C., siendo relevante el uso de matemáticas con todo rigor a la vez que el uso de mecanismos de aproximación y fórmulas.

Se trata de otro representante del periodo alejandrino en la civilización griega con preocupaciones en la mecánica y las aplicaciones de la geometría.



Dispensador egipcio de agua bendita, diseñado por Herón.

Algunos historiadores de las matemáticas afirman que en su trabajo se aprecia el estilo egipcio: aplicación de fórmulas libremente y mediante aproximaciones. En su Métrica y Geométrica, Herón ofreció fórmulas y resultados para el cálculo de superficies y volúmenes de muchas figuras.

Usó resultados de Arquímedes.

También escribió una Geodesia y una Estereometría.

Es interesante señalar su preocupación por ofrecer en estas obras resultados de naturaleza numérica. Por ejemplo, en sus estudios de geodesia trata de demostrar los procedimientos para calcular la distancia entre dos puntos dado uno.

Algunos de los resultados eran aplicados al diseño de edificaciones.

Herón ofreció diseños para máquinas automáticas, máquinas para levantar pesos, máquinas de guerra, relojes de agua, todo en la misma dirección que encontramos en la obra de Arquímedes. En particular, inventó una turbina de vapor (rudimentaria, por supuesto), un primer aparato para la transformación de la energía térmica en mecánica.

Afirmó Herón que los rayos de luz iban de un punto a otro a través del camino más corto.

5.4 Trigonometría

Se trata de un campo totalmente creado en la etapa helenística por Hiparco, Menelao y Ptolomeo, con el propósito de responder a las necesidades de la astronomía, la construcción de calendarios, la navegación y la geografía.

En los alejandrinos se trataba de una trigonometría esférica aunque integraba, realmente, la trigonometría plana. Sin duda, la trigonometría esférica requería el conocimiento de la geometría esférica. Euclides, en su Phaenomena, hace poco geometría esférica, aunque basada en resultados

anteriores.

Se sabe que Teodosio (c. 20 a.C.) hizo una recopilación de la geometría esférica en su Sphaericae, pero no era numérica ni permitía la interpretación de la posición de las estrellas para calcular la hora durante las noches.

Sin duda, el fundador de la trigonometría fue Hiparco, quien se supone murió alrededor del 125 a.C.. Sus trabajos se conocen más bien gracias a la obra de Ptolomeo. Sus observaciones astronómicas y sus descubrimientos fueron muy importantes para la geografía y la evolución de la cosmología antigua.

Se afirma que el momento decisivo se alcanzó con Menelao (c. 100 d.C.). Su trabajo fundamental fue la Sphaerica, cuyo fin fundamental fue la demostración de teoremas sobre triángulos esféricos, similares a los que Euclides probó para los triángulos en un plano. Esta obra también incluye astronomía.

Ahora bien, la síntesis e integración de la trigonometría con la astronomía la realizó el famoso Claudio Ptolomeo, en su obra Syntaxis Mathematica, conocida también como Almagesto (nombre dado por los árabes), donde continúa y completa el trabajo de Hiparco y Menelao. Se trata de una obra de naturaleza matemática, porque la idea que subyace esta construcción intelectual es la de ofrecer un modelo matemático que integre el movimiento de los cuerpos celestes. Es decir, se trata de fundamentar la astronomía, la interpretación de los cielos, en el conocimiento que se reconoce como verdadero.

En contra de la opinión heliocéntrica de Aristarco, Ptolomeo afirmó una visión cosmología geocéntrica. La trigonometría de Ptolomeo perduró por más de mil años. Ya desarrollaremos esto.

Es interesante señalar, que en el mundo griego no fueron las necesidades de la medida de superficies o longitudes, la topografía, lo que determinó el desarrollo de la trigonometría. Para esos propósitos simplemente se usó la geometría. El origen de la trigonometría se encuentra en el reclamo de la astronomía, cuyas implicaciones en la navegación y la geografía y en el cálculo del tiempo sí son relevantes.

El periodo alejandrino termina en lo que se refiere a la geometría con el trabajo de algunos comentaristas: Teón de Alejandría, quien comentó la obra de Ptolomeo así como los Elementos de Euclides y su Óptica, y, su hija, Hipatia quien comentó los trabajos de Diofanto y Apolonio.



Hipatia.

También debe mencionarse Proclus, quien comentó el Libro I de los Elementos de Euclides.

5.5 Álgebra y aritmética

Es importante mencionar que en el mundo griego se hacía una distinción entre el cálculo numérico, al que se le daba el nombre de logistica, y la teoría de números, para la cual se usaba el término arithmetica. Las matemáticas clásicas no se dedicaron a la logistica puesto que en la ideología dominante ésta estaba ligada a la práctica del comercio o la agrimensura, es decir a actividades lejanas de aquellas que el espíritu debía cultivar. Entre Thales y Euclides no hay recuento, evidentemente, de muchos resultados obtenidos en el cálculo numérico o en la medición con propósitos prácticos. No sería ésta la actitud que desarrollaron los matemáticos del periodo alejandrino.

Tal vez sea importante mencionar que la escritura de números en el periodo clásico no fue la misma de los alejandrinos; de hecho, se suele llamar este último el sistema jónico o alejandrino, el cual utiliza las letras del alfabeto.

Como resultaba muy engorrosa la escritura de las fracciones comunes en los sistemas griego o egipcio para los cálculos astronómicos, los matemáticos y astrónomos alejandrinos prefirieron el sistema babilónico con fracciones sexagesimales. De hecho, esto tuvo consecuencias:

"El Almagesto consagró el uso de las fracciones sexagesimales, pero retardó la extensión natural de los números decimales a las fracciones decimales; o, en otras palabras, impidió que los submúltiplos decimales se usaran de la misma manera que los múltiplos decimales. Fue el flamenco Simón Stevin quien explicó por vez primera en 1585, y muy bien, la superioridad de las fracciones decimales, a cuyo uso exclusivo no se ha llegado aún en nuestros días." [Sarton, George: Ciencia antigua y civilización moderna, pp. 82-83]

Los alejandrinos, como Arquímedes, Herón, Diofanto, usaron las fracciones como números propiamente, mientras que los matemáticos clásicos sólo reconocían una razón de números enteros.

El desarrollo de la aritmética y el álgebra como disciplinas independientes de la geometría fue escalonado en Grecia. Podría decirse que con los pitagóricos existe una identificación entre aritmética y geometría, hasta cierto punto. La aritmética, como teoría de los números enteros, era importante en tanto fundamento último de la realidad. Al descubrirse los irracionales, las perspectivas de la aritmética y la geometría chocan, se abre una crisis, la cual se resolvió descartando la aritmética y dándole un valor extraordinario a la geometría sintética, es decir la geometría no cuantitativa. Esto fue establecido de manera definitiva por los matemáticos griegos clásicos: sólo la geometría podía tener fundamento lógico, verdadero, y la aritmética era un territorio considerado "peligroso", sujeto al error, con la presencia de entidades que no podían ser representadas ni comprendidas en su marco teórico.

En la etapa alejandrina, si bien hay una actitud diferente hacia la naturaleza de las matemáticas, que involucra la mecánica y el cálculo, el proceso no es uniforme tampoco: Arquímedes, Apolonio y Ptolomeo utilizaron la aritmética solamente para calcular cantidades geométricas (superficies, volúmenes, longitudes de figuras geométricas); sin embargo, Herón, Nicomaco y Diofanto sí concedieron un lugar independiente, separado de la geometría, a la aritmética y el álgebra. Por ejemplo, Herón formuló y resolvió problemas algebraicos por medio de procedimientos exclusivamente aritméticos, retomando tradiciones que refieren a los egipcios y babilonios.

De la misma manera, Nicomaco en una obra titulada Introductio Arithmetica, aunque usó sólo números enteros y razones de números enteros, su aritmética era tratada totalmente de manera independiente a la geometría: los números ya no eran segmentos de recta -como en Euclides- sino cantidades de objetos. Nicomaco trató de reanimar la tradición pitagórica; de hecho, afirmó que la aritmética era la madre de la geometría, la música, y la astronomía. Los historiadores de las matemáticas consideran que Nicomaco hizo por la aritmética lo mismo que Euclides hizo por la geometría, aunque debe decirse que sus contenidos no eran originales (más bien realizó un compendio de temas tratados esencialmente por los pitagóricos y otros autores).

Diofanto

En relación con el álgebra alejandrina, la figura clave es Diofanto. Según Bell:

"Diofanto fue el primer matemático griego, si realmente fue griego, que mostró un talento genuino para el álgebra. Siguiendo a los pitagóricos, Euclides había dado equivalentes geométricos para las identidades sencillas de segundo grado, como $a(a+b) = a^2 + ab$, $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, y había resuelto $x^2 + ax = a^2$, a positiva, geométricamente. Diofanto dio soluciones esencialmente algebraicas de las ecuaciones especiales de primer grado con dos y tres incógnitas, como $x + y = 100$, $x - y = 40$. Más importante aún, había empezado a usar los símbolos operando con ellos. Este largo paso hacia delante es tanto más notable cuanto que su anotación algebraica, comparada con la de hoy o la del siglo XVII, cuando Descartes la perfeccionó prácticamente, era casi tan engorrosa como la logística griega. El que hiciera lo que hizo con la técnica disponible lo sitúa sin ningún género de duda entre los grandes algebristas." [Bell, E.T.: Historia de las matemáticas, p. 78.]

Su obra principal fue una Arithmetica (se supone que eran 13 libros, de los cuales sobrevivieron 6 para la historia), donde se consigna su principal contribución: el simbolismo. Diofanto usó un signo para una variable desconocida, para expresar potencias, incluso superiores a 3. Esto último es un hecho sorprendente. Debe recordarse que los matemáticos clásicos no admitieron más de tres factores, porque no podían tener significado geométrico. Para que se tenga una idea de esta obra de Diofanto, vale la pena señalar que el primer libro trataba problemas que conducen a ecuaciones de primer grado con una o más incógnitas. Los otros cinco libros, los que sobrevivieron, estudian ecuaciones de segundo grado.

El asunto más relevante del álgebra de Diofanto es precisamente la solución de ecuaciones indeterminadas. Debe mencionarse, sin embargo, que en la solución de las ecuaciones él sólo aceptó raíces racionales positivas. Esto es interesante, mientras que para Herón no había problemas con el uso de irracionales, debe recordarse su énfasis en el cálculo y la medición, y mientras que el mismo Arquímedes se preocupaba por dar aproximaciones a los números irracionales, Diofanto, con una aproximación algebraica, rechaza irracionales, negativos y números complejos. No obstante, reconoce a las fracciones como números, un elemento diferente en relación con las matemáticas clásicas. Ahora bien, en cada uno de los 189 problemas tratados en su Arithmetica, Diofanto usa un método diferente: no hay intento de encontrar un método general de solución. Sin duda, se encuentra en Diofanto la influencia de los resultados babilonios; sin embargo, su simbolismo y la solución de ecuaciones indeterminadas superan de lejos aquellos resultados.

Es interesante señalar que el álgebra griega no usó letras para representar números, como los coeficientes en una ecuación.

Debe decirse que ni siquiera en los mejores momentos de la creación del álgebra en la civilización griega se buscó ofrecer una estructura lógica, deductiva, que permitiera construir y fundamentar la teoría de los números y el álgebra. La fortaleza deductiva y teórica que encontramos en la geometría, en los trabajos de Euclides, Apolonio y también Arquímedes, no está presente ni en la aritmética ni en el álgebra griegas. Probablemente, lo que es opinión de varios autores, esto fue el resultado de dos factores: expresión, por un lado, de las tradiciones babilonias y egipcias (énfasis en procedimientos específicos), así como, por otro lado, sin duda, por el lugar que ocupó la geometría sintética y no cuantitativa en la matemáticas griegas. En todo caso, la realidad es que la fundamentación de la teoría de los números y del álgebra sería un problema capital de las matemáticas que no se resolvería sino hasta hace relativamente muy poco tiempo.

Pappus

Otro de los matemáticos de esta época que debe mencionarse es Pappus, quien un siglo después de Ptolomeo haría una recopilación de las matemáticas antiguas que es considerada por los historiadores de la ciencia como muy relevante: Colección Matemática (Synagoge). Sarton reseña este trabajo así:

"El conjunto de la Colección es un tesoro y, hasta cierto punto, la culminación de las matemáticas griegas. Poco se añadió a ella en la época bizantina, y el mundo occidental, habiendo perdido el conocimiento del griego, y el interés por las matemáticas superiores, no pudo aprovechar la riqueza que Pappus había acumulado. Las ideas recogidas o inventadas por él no sirvieron de estímulo a los matemáticos occidentales hasta mucho más tarde, pero cuando al fin lo hicieron, dieron origen a las matemáticas modernas: geometría analítica, geometría proyectiva, método centrobárico. Este nacimiento o renacimiento, surgido de las cenizas de Pappus, se llevó a cabo en un lapso de cuatro años (1637-40). De este modo, la geometría moderna quedó inmediatamente conectada con la antigua, como si nada hubiera acontecido entre tanto." [Sarton, George: Ciencia antigua y civilización moderna, pp. 98-99]

Y su opinión es radical: "Pappus fue el más importante de los matemáticos del último periodo de la ciencia antigua y nadie lo emuló en la época bizantina. Fue el postrer gigante matemático de la Antigüedad." [Sarton, George: Ciencia antigua y civilización moderna, p. 99]

Sobre su vida: Pappus nació alrededor del año 290 en Alejandría, Egipto. Fue el último gran geómetra griego que al parecer vivió siempre en Alejandría. Dedicó muchos de sus trabajos a Pandrosion, Megethion y Hermodorus, éste último al parecer fue su hijo.



Afrodita, 100 a.C.

En los escritos de Proclus se menciona a Pappus como el que encabezaba la Escuela de Alejandría. Su trabajo más importante fue un estudio de geometría que se publicó en una colección de ocho libros alrededor del año 340. Todo este conjunto de libros no mostró originalidad, pero en cambio, significó una honda comprensión y dominación de casi todos los temas y técnicas matemáticas; además es un trabajo de gran importancia para el estudio de la geometría griega. Aparte de este libro, son muchos los comentarios que hizo acerca de otros autores, uno de ellos es de Euclides y sus Elementos. Entre sus trabajos reconocidos existe uno de música y otro de hidrostáticos. Murió alrededor del año 350.

5.6 Otras ciencias

Otras disciplinas recibieron un impulso en el mundo griego también como parte de esa búsqueda de explicar la realidad circundante. Por ejemplo, en relación con la geografía: algunos mapas de la tierra conocida fueron construidos por Anaximandro y Hecateo de Mileto (siglo IV a.C.). Sin embargo, fue durante la época alejandrina, sobre todo, expresión de la ampliación de las fronteras, que se realizaron los principales trabajos. Es famosa la obra de Eratóstenes (c. 284 - c. 192 a.C.), que recopiló los datos geográficos disponibles en la época y realizó cálculos de varias distancias en la tierra (en su Geografía). Como señalan Rioja y Ordóñez:

"Una de las primeras cuestiones que intrigó a los geómetras griegos fue la referente al tamaño de la esfera terrestre. Se atribuye a Eratóstenes de Cirene (ca. 276 - ca. 195 a. C.) un procedimiento que le permitió conocer dicho tamaño con una exactitud tal que ha llegado a considerarse como uno de los logros más espectaculares de las astronomía griega (Thower, 1996: 20). No fue, sin embargo, el primero en intentarlo, ya que generalmente se admite que tuvo sus predecesores en Eudoxo de Cnido (408 - 355 a. C.) y en Aristarco de Samos (ca. 310 - ca. 230 a. C.)." [Rioja, Ana, Ordóñez, Javier: Teorías del Universo, Volumen II de Galileo a Newton, p. 69]

Lo interesante es el método:

"El método empleado por Eratóstenes para medir la longitud de la circunferencia mayor terrestre es de una gran sencillez geométrica. Observó que durante el mediodía solar del solsticio de verano el gnomon de un reloj de sol no arrojaba ninguna sombra en la ciudad de Syene (la contemporánea Asuán), mientras que sí la daba en Alejandría, ciudad situada al norte de la primera. Si se suponía que ambas ciudades fueran paralelas, se podría medir el radio de nuestro planeta. Para ello era necesario conocer la distancia entre ambas ciudades y el ángulo que formaban los rayos solares con respecto al gnomon." [Rioja, Ana, Ordóñez, Javier: Teorías del Universo, Volumen II de Galileo a Newton, p. 69.]

Se dice que Hiparco fue quien introdujo los términos de latitud y longitud para la localización de puntos sobre la tierra, así como se supone que fue el inventor de la proyección ortográfica. También Ptolomeo, en su Geographia de ocho libros, prestó atención a los métodos para la confección de mapas.



Ptolomeo.

Esta obra fue más importante de lo que se suele reconocer:

"El tratado geográfico de Tolomeo, o guía (geographice hyphegesis), es casi tan importante como el Almagesto. Abarcó toda la geografía matemática, del mismo modo que el Almagesto comprendió toda la astronomía matemática, e influyó en la geografía de una manera tan profunda y duradera como el Almagesto en la astronomía. Durante catorce siglos, por lo menos, el Almagesto fue la obra básica, podríamos decir la Biblia, de la astronomía, así como la Geografía fue la Biblia geográfica. El nombre de Tolomeo equivalió al de geografía para los geógrafos y al de astronomía para los astrónomos.

Tolomeo escribió la Geografía después del Almagesto, es decir, después del año 150. Constaba de ocho libros y se limitaba a la geografía matemática y a la información necesaria para el trazado de mapas con precisión. Sus conocimientos procedían principalmente de Eratóstenes, Hiparco, Estrabón (I-2 a.C.), y sobre todo, de Marino de Tiro (II-1), a quien elogió mucho, a pesar de haberle criticado." [Sarton, George: Ciencia antigua y civilización moderna, pp. 62-63]

La mecánica recibió atención en el mundo griego, por lo menos desde la Física de Aristóteles, donde establece una teoría del movimiento: natural o violento. Sin embargo, la mejor expresión de la física y la mecánica en el mundo griego es, sin duda, Arquímedes. La obra significativa: Sobre el equilibrio los planos o Los centros de gravedad de los planos. Es interesante que él iniciaba sus trabajos con postulados acerca de las palancas y los centros de gravedad.

Como ya lo hemos mencionado, la hidrostática fue fundada por Arquímedes.

Aunque, desde los pitagóricos se dieron reflexiones sobre la naturaleza de la luz, el color, la óptica es tratada primeramente de una manera sistemática por Euclides, en Óptica y Catóptrica. Esta última describe el comportamiento de los rayos de luz reflejados en espejos planos, cóncavos, convexos y sus efectos en la visión de las cosas. Sobre la reflexión de la luz se sabe que hubo trabajos de Arquímedes, Apolonio y Diocles. Y sobre la refracción de la luz, incluso el mismo Ptolomeo trató de encontrar algunas de sus leyes.

Los resultados que hemos mencionado nos permiten obtener unas pinceladas de las matemáticas helenísticas, vislumbrar su espíritu intelectual y la naturaleza de sus aportes. Nos queda, sin embargo, un tema central, que condensó los intereses teóricos de la Antigüedad, y, también, llegó a ser central en la configuración de la ideología de la última parte de la Edad Media europea. Se trata de la cosmología.

5.7 Biografías

Pappus de Alejandría

Pappus (Papo) de Alejandría nació alrededor del año 290 en Alejandría, Egipto. Fue el último gran geómetra griego que al parecer vivió siempre en Alejandría. Dedicó muchos de sus trabajos a Pandrosion, Megethion y Hermodorus, éste último al parecer fue su hijo. En los escritos de Proclus se menciona a Pappus como el que encabezaba la Escuela de Alejandría.

Su trabajo más importante fue un estudio de geometría que se publicó en una colección de ocho libros alrededor del año 340. Todo este conjunto de libros no mostró originalidad, pero en cambio, significó una honda comprensión y dominación de casi todos los temas y técnicas matemáticas, además es un trabajo de gran importancia para el estudio de la geometría griega. Aparte de este libro, son muchos los comentarios que hizo acerca de otros autores, uno de ellos es de Euclides y sus Elementos. En otros de sus trabajos reconocidos existe uno de música y otro de hidrostáticos.

Murió alrededor del año 350.



Nicomedes

Nicomedes nació alrededor del año 280 a. C. en Grecia. No se conoce mucho de su vida, se sabe de él a través de sus trabajos.

Su estudio más importante fue el tratado Líneas Concoide, el cual contiene el descubrimiento de la curva conocida como el concoide de Nicomedes.

Reconoció, además, tres distintas formas que al parecer, son las tres ramas de la curva.

El concoide fue usado por Nicomedes para resolver problemas acerca de la trisección de un ángulo y la duplicación del cubo.

También, utilizó la cuadrática descubierta por Hippias, para resolver el problema de la cuadratura del círculo.

Murió alrededor de año 210 a. C.

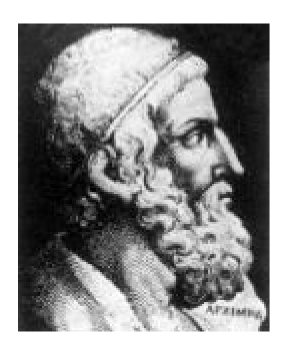
Diophanto de Alejandría

Diophantus (Diofanto) de Alejandría nació alrededor del año 200. Es reconocido como el "padre del álgebra", pero aún así su vida se desconoce casi en totalidad. Basó su definición de número poligonal del trabajo de Hypsicles, escrito un poco más tarde del año 150 a. C.; y su trabajo fue comentado por Theon de Alejandría alrededor del año 350 d. C.

Otros datos que se tienen de su vida, son los dados en la Antología Griega, compilada por Metrodorus alrededor del año 500 d. C.; se cree que se casó a los veintiséis años y tuvo un hijo que murió a la edad de cuarenta y dos años, cuatro años antes, murió él a la edad de ochenta y cuatro años.

En 1 570, Bombelli tradujo la mayoría de los trabajos de Diophanto, aunque estos nunca fueron publicados. La más famosa traducción de la Aritmética de Diophanto, fue la hecha por Bachet en 1 621.

Murió alrededor del año 284.



Arquímedes

Arquímedes nació alrededor del año 287 a. C. en Siracusa, Sicilia. Su padre fue un astrónomo llamado Phidias. De joven inició sus estudios en Alejandría con los sucesores de Euclides. Ahí fue fuertemente influenciado por su amigo cercano Conon de Samos.

Cuando inventaba nuevos teoremas, enviaba sus teoremas a sus colegas en Alejandría, pero nunca incluía las pruebas de cómo lo había elaborado; con esto algunos tomaron crédito de sus invenciones. Cuando Arquímedes se dio cuenta de esta situación, la siguiente vez que envió sus teoremas incluyó dos que eran falsos, y demostró con esto que los que decían que descubrían estos

teoremas pero sin poder demostrarlos, no eran más que personas en busca de descubrir lo imposible.

Plutarco menciona en uno de sus trabajos que Arquímedes fue amigo del Rey Hieron II de Siracusa, y se cree cierto ya que dedicó uno de sus libros al hijo del rey. Obtuvo una alta reputación al ser el creador de las máquinas que se utilizaron para la guerra en contra del ataque de los Romanos a petición del rey. Es considerado como uno de los grandes matemáticos de la historia y se le conoció por su increíble fascinación hacia la geometría.

Fue asesinado en el año 212 a. C. durante la captura de Siracusa por los Romanos.

Teón de Alejandría

Theon (Teón) de Alejandría nació alrededor del año 335, posiblemente en Alejandría, Egipto. Trabajó ahí como profesor de matemáticas y astronomía y observó un eclipse de sol el 16 de junio y un eclipse lunar el 25 de noviembre, ambos del año 364.

Aparentemente, vivió bajo el poderío del Emperador Theodosius I y fue miembro del Museo, el instituto de educación más alta en Alejandría. Fue padre de Hypatia, que fue asesinada poco tiempo después de la muerte de su padre.

Es famoso debido a sus comentarios en importantes trabajos como el Almagest de Ptolomeo y los trabajos de Euclides. Fue un matemático competente pero poco original. Existe una versión de los Elementos de Euclides escrito por Theon, aparentemente, con solo algunos cambios en los que corrigió supuestos errores, que en realidad eran correctos. Ayudó a que el entendimiento de la obra fuera más sencillo, por lo que iba dirigido especialmente para los estudiantes principiantes.

Entre los comentarios importantes están los de las obras astronómicas de Ptolomeo, Almagesto y Tablas Hábiles. Su hija participó en el comentario del Almagesto, y es, precisamente, este comentario el que es considerado como el mayor trabajo de Theon.

Murió alrededor del año 405.

5.8 Síntesis, análisis, investigación

1. Investigue. Haga una reseña biográfica de Alejandro el Grande. Resumidamente, explique la construcción del imperio de Alejandro, empezando con las conquistas realizadas por su padre. ¿Qué fueron las llamadas "filípicas".
2. ¿Quién fue el 'Copérnico de la Antigüedad'? ¿Por qué?
3. Explique las diferencias de percepción o actitud en relación con las actividades prácticas materiales que existieron en el periodo alejandrino y el clásico en la Antigüedad griega.
4. Explique la idea fundamental del método de exhausción.
5. Construya dos ejemplos similares a los que introducimos en este capítulo para mostrar los principios que usaba Arquímedes en su método.

6. Utilice el método de exhausción de la manera que se hace en el ejemplo del texto, para aproximar el área de un círculo por medio de un polígono de 16 lados.
7. ¿Por qué considera usted que es importante el trabajo de Arquímedes llamado El método?
8. ¿Cuáles fueron los fines que dieron origen a la trigonometría en el mundo alejandrino?
9. Investigue sobre la vida de Hipatia. Escriba un resumen de su biografía.
10. Explique las diferencias entre logistica y arithmetica.
11. ¿Cuál fue el asunto más relevante que trató Diofanto?
12. Explique las diferencias de lugares intelectuales entre la geometría y el álgebra o aritmética en el mundo griego.
13. Explique las principales debilidades de las matemática griegas.
14. Lea el siguiente texto:

    "Cuando los griegos se apoderaron de Mesopotamia, conocieron con detalle las matemáticas y la astronomía babilonias. En este momento, los griegos adoptaron el sistema numérico sexagesimal, si bien al utilizar letras para representar números, perdieron el descubrimiento babilónico del valor de la posición. Se hicieron también con el álgebra mesopotámica En la solución de ecuaciones cuadráticas los griegos usaban claramente métodos babilonios, multiplicando la ecuación por el coeficiente del cuadrado en lugar de dividir, como hacemos nosotros. En esta época pasó también a Grecia una nueva oleada de astrología, hallando expresión en la filosofía estoica con el Hado impuesto al hombre por las estrellas. Este fue uno de los factores por los que la filosofía estoica resultaba tan próxima a los romanos, dado que éstos ya se hallaban familiarizados con la astrología babilonia y la adivinación por los hígados gracias a los etruscos, originarios de Asia Menor. También de los Babilonios provino el conocimiento del orden correcto de los cuerpos celestes a partir de la tierra. Los primeros griegos creían que el sol estaba inmediatamente después de la luna, contando a partir de la tierra, viniendo luego los planetas. Los griegos posteriores sabían que después de la luna venía Mercurio, luego Venus, el sol, Marte, Júpiter, Saturno y finalmente las estrellas fijas. Cicerón nos cuenta que el estoico Diógenes de Babilonia, ca. 160 a.C., fue el primero que enseñó este último orden que había traído de Mesopotamia. Era también probable que Hiparco, 190 - 120 a.C., utilizase observaciones babilonias para medir la presesión de los equinoccios que había sido ya descubierta anteriormente por el babilonio Ki-Din-Nu (Cidenas), c. 340 a.C." [Mason, Stephen: Historia de las Ciencias 1. La Ciencia Antigua, la Ciencia en Oriente y en la Europa Medieval, Págs. 59-60]

    Explique el influjo babilónico en el mundo griego, según el autor.
15. Estudie con cuidado el siguiente texto de Arquímedes.

    "1. Si de una magnitud se quita otra magnitud y el centro de gravedad tanto de la magnitud entera como de la magnitud quitada es el mismo punto, este mismo punto es el centro de gravedad de la magnitud restante.

2. Si de una magnitud se quita otra magnitud sin que el centro de gravedad de la magnitud entera y el de la magnitud quitada sea un mismo punto, el centro de gravedad de la magnitud restante se halla en la prolongación de la recta que une los centros de gravedad de la magnitud entera y de la magnitud quitada, situado a una distancia cuya razón con la recta comprendida entre los centros de gravedad es la que guarda el peso de la magnitud que se ha quitado con el peso de la magnitud restante (Sobre el equilibrio de los planos, I, 8).

3. Si los centros de gravedad de tantas magnitudes cuantas se quiera se hallan sobre una misma recta (segmento de recta, en este contexto), el centro de gravedad de la magnitud compuesta por todas estas magnitudes se hallará también sobre la misma recta (Íbid., I, 4 y 5; II, 2 y 5).

4. El centro de gravedad de cualquier recta es el punto que divide la recta en dos partes iguales (Íbid., I, 4).

5. El centro de gravedad de cualquier triángulo es el punto donde se cortan las rectas trazadas desde los ángulos del triángulo hasta los puntos medios de los lados (Ibid., I, 14).

6. El centro de gravedad de cualquier paralelogramo es el punto en el que convergen las diagonales (Íbid., I, 10).

7. El centro de gravedad del círculo es el propio centro del círculo.

8. El centro de gravedad de cualquier cilindro es el punto que divide el eje en dos partes iguales.

9. El centro de gravedad de cualquier prisma es el punto que divide el eje en dos partes iguales.

10. El centro de gravedad de cualquier cono está sobre el eje, en un punto que lo divide de tal manera que la parte situada hacia el vértice es el triple de la parte restante.

Me serviré también de este teorema [establecido en el escrito anterior Sobre Conoides]: Si tantas magnitudes cuantas se quiera y otras magnitudes en igual número guardan entre sí, tomadas de dos en dos las ordenadas de modo semejante, una misma razón; si, además, todas o algunas de las magnitudes primeras tienen razones cualesquiera con otras magnitudes, y las segundas tienen las mismas razones con otras magnitudes tomadas en el mismo orden, el conjunto de las magnitudes primeras es al conjunto de las magnitudes puestas en relación con ellas lo que el conjunto de las magnitudes segundas es al conjunto de las relacionadas con ellas." [Arquímedes: El Método, pp. 37-39.]

Enumere las distintas maneras en que Arquímedes utiliza los términos "centro de gravedad". ¿Por qué usa Arquímedes la expresión centro de gravedad de tantas maneras y qué relación tendría eso con su método en las matemáticas?

16. Lea el siguiente texto con cuidado.

"En la antigua cosmología atomista se parte de un caos primitivo, en el que los átomos se encontraban diseminados son orden ni criterio alguno. Lejos de cualquier tipo de plan o proyecto demiúrgico, el puro y frenético baile de esas partes elementales es causa de que, al ponerse en contacto en los choques, se entrelacen y formen compuestos en número ilimitado. Así se forman los mundos. Los átomos semejantes en tamaño y forma se reúnen

entre sí. Los más sutiles se deslizan hacia el exterior del torbellino en el que se hallan retenidos formando una membrana envolvente; por su parte los más groseros se precipitan sobre la zona central dando lugar a una primera construcción esférica, la Tierra. Dentro de esa membrana, algunos se unen a otros hasta originar una mezcla húmeda, a modo de lodo, que gradualmente se deseca primero, y se pone incandescente después consecuencia del continuo movimiento. El resultado es la constitución de la materia de los astros. Tenemos pues una Tierra central, una envoltura externa y astros dispuestos entre ésta y aquélla. Ha nacido un mundo. Pero no es el único. El infinito número de astros desplazándose en el vacío infinito produce infinitos mundos con su correspondiente cuerpo central y cuerpos periféricos en cada torbellino. Y lo mismo que esos mundos nacen por unión o agregación, otros mueren por desunión o desagregación." [Rioja, Ana y Ordóñez, Javier: Teorías del universo. Volumen I. De los pitagóricos a Galileo, p. 90]

Explique con base en este texto la visión atomista de la realidad.

CAPITULO VI

COSMOLOGÍA Y ASTRONOMÍA GRIEGAS



Primera. Fol.xiii.

¶ Capitulo sexto de la inmutabilidad de la tierra.

Opinion d' antiguos a cerca de mover se la tierra.

Los pithagoricos y otros naturales antiguos como trae Aristotiles sintieron q̃ la tierra se mouia no del mouimiẽto recto mas cerca del medio y circularmente el qual error assi el philosopho como los astronomos por euidẽtes causas y demõstraciões manifiestas cõfũdẽ y repruevã. Por q̃l mouimiẽto circular es pprio

Aristo. 4 phisi.

lucretius philo.

A v

La geometría era para los griegos la ciencia del espacio físico.

La leyes de la geometría explicaban ese espacio.

6.1 Visiones cosmológicas

Los pitagóricos creían que la Tierra era esférica y que no estaba en el centro del universo; además que se movía. Todos los astros giraban alrededor de un gran fuego central. Con órbitas, por supuesto, circulares (círculo y esfera: figuras perfectas).

Una de las primeras referencias en cuanto a la explicación cosmológica, digamos materialista, que podemos citar es Anaxágoras de Clazomene, quien había estado en Atenas por invitación de Pericles. Afirmó que el Sol era metal incandescente y que la Luna tenía montañas y valles como la Tierra. Incluso, señaló que la Luna refleja la luz del Sol. Su aproximación le permitió dar una explicación apropiada de las fases lunares; es decir, que son resultado de cambios en las posiciones de los tres astros: Tierra, Luna y Sol.

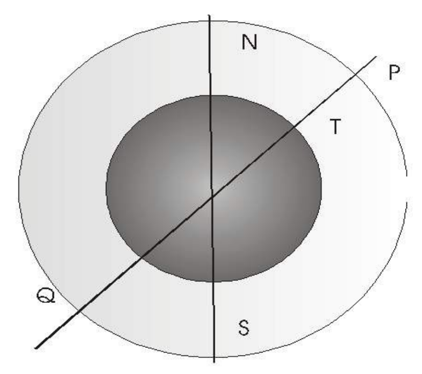
Además, Anaxágoras hizo una interpretación adecuada de los eclipses, lunares y solares. Hasta pensaba que había otros mundos habitados por seres vivos. Anaxágoras fue condenado a muerte por negarse a reconocer la naturaleza milagrosa o divina de los astros celestes. La sentencia de muerte no se ejecutó, aunque tuvo que exiliarse de por vida.

Eudoxo

Bajo la influencia platónica, Eudoxo escribió sus obras de astronomía: Espejo, Acontecimientos, Periodo de ocho años, Sobre velocidades, de las que se conservan apenas unos cuantos fragmentos.

Su teoría astronómica utilizaba movimientos geométricos circulares para explicar los movimientos del Sol y la Luna y otros planetas vistos desde la Tierra. Platón había hecho de los movimientos circulares y uniformes los únicos aceptables. Además, la Tierra tenía que estar estática. Con esas premisas Eudoxo usó un sistema que en total incluía 27 esferas, definiendo ejes de rotación, rapidez de rotación, radios, etc., tratando de aproximarse a las observaciones disponibles. Las esferas: 1 era para las estrellas fijas, 3 para el sol, 3 para la Luna y 4 para cada planeta. Se trataba de una construcción matemática.

Véase la figura siguiente. Hay una esfera con centro en T, Tierra. Esta esfera gira de este a oeste cada día con un eje NS. Se trata de la esfera de las estrellas fijas.



Esferas de Eudoxo.

Una de las principales críticas a este sistema es que no incluía la velocidad del Sol. Para Rioja y Ordóñez: "Esta primera teoría planetaria logra reproducir, de modo meramente aproximado, los movimientos irregulares observados mediante la combinación de movimientos circulares y uniformes. Cumple pues con el objetivo de tratar de ordenar los erráticos movimientos planetarios dentro de un marco de comprensión teórico. Pero no llega a tener una precisión cuantitativa suficiente. De hecho, los modelos teóricos con capacidad predictiva son posteriores al siglo III a. C. y no harán uso de esferas homocéntricas. No obstante, se busca la acomodación a los hechos observables en el Cielo." [Rioja, Ana y Ordóñez, Javier: Teorías del universo. Volumen I. De los pitagóricos a Galileo, p. 44]

Se puede decir que el principal mérito de Eudoxo residía en la construcción de una teoría o modelo detallado del movimiento de los cuerpos celestes tratando de integrar precisamente las observaciones. Hay, además, una visión que se puede juzgar como más racional en su explicación astronómica.

Heráclides

Heráclides del Ponto (388 - 315 a.C.) modificó este sistema un poco. Mercurio y Venus en lugar de girar alrededor de la Tierra giraban alrededor del Sol. Eso, con el propósito de explicar un poco mejor los movimientos aparentes. Consideraba, además, que la esfera de las estrellas fijas no se movía.

Aristóteles

Aristóteles, no satisfecho con la aproximación de Eudoxo, añadió 29 esferas al sistema de éste, lo que provocaba algo extraordinariamente complejo. Sin embargo, se trata en este filósofo no de una astronomía geométrica, como en Platón, sino de una aproximación más bien física. Hay búsqueda por las causas de los movimientos. Se trata de una perspectiva diferente. Es decir, hay una distancia en relación con Platón, pero hay semejanzas.

¿Y la cosmología? "La cosmología aristotélica establece que el cosmos es increado, eterno, indestructible, finito, esférico, no temporal y no espacial, único, geocéntrico y geostático. El único tipo de cambio que acontece en el Cielo es el indefinido y constante movimiento circular de las esferas que lo componen, considerándose dicho movimiento el más próximo al estado de reposo (y así seguirá pensándose hasta la formulación de la ley de inercia en el siglo XVII)." [Rioja, Ana y Ordóñez, Javier: Teorías del universo. Volumen I. De los pitagóricos a Galileo, p. 55]

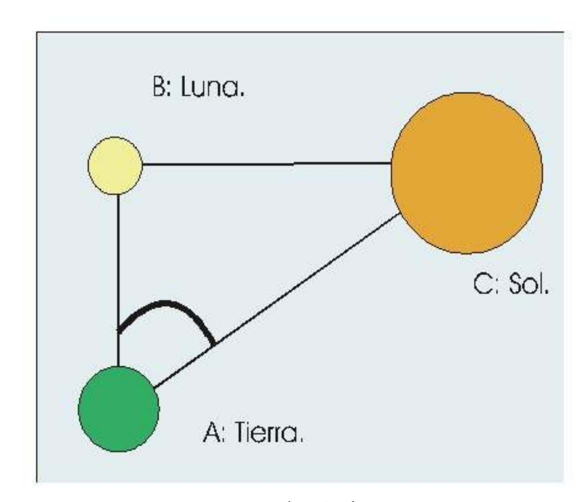
Además, para la posteridad quedó una división de esferas del universo que persistiría hasta la modernidad: celestial, terrenal. Con jerarquías: arriba de la Luna hay astros que no cambian, imperturbables que, por supuesto, se mueven en círculos y de manera uniforme. Aquí hay influencia de Platón. Y, por supuesto, éste debe ser el lugar privilegiado para los dioses.



Aristarco, estampillas.

Aristarco

Los primeros intentos de medir la distancia del Sol a la Luna desde la Tierra y las magnitudes de estos cuerpos celestes fue realizada por Aristarco (c. 310 - 230 a.C.), en el período alejandrino, en su obra Sobre medidas y distancias del Sol y la Luna. Se valió, en primer lugar, de una idea de Anaxágoras que explicaba las fases de la Luna. En la siguiente figura, Aristarco supuso que el ángulo BAC era más o menos recto; el triángulo ABC se podía encontrar claramente si se medía el ángulo ABC en el momento del cuarto lunar. Él estimó ese ángulo en el equivalente de 87°. Este ángulo es en la realidad de 89$^{o}51'$, más o menos.



Esquema de Aristarco.

Aristarco comparó los tamaños de la Tierra y la Luna, para lo que usó un eclipse lunar. Mediante un ingenioso método, comparando el radio aparente de la luna con el radio de la sombra de la Tierra, concluyó que el diámetro lunar era más o menos la mitad del de la Tierra. Lo que era un dato sorpresivo en el contexo cultural de esa época (la proporción verdadera es alrededor de un cuarto).

Una vez establecida esta proporción, los alejandrinos buscaron calcular los diámetros de la Luna, el Sol y nuestro planeta. Esto lo realizó, precisamente, Eratóstenes.

Fue Aristarco quien propuso la teoría heliocéntrica: los planetas, en particular la Tierra, se movían en círculos alrededor del Sol. Antes, dentro de esa visión, debe mencionarse a los pitagóricos, como Filolao. Esto se sabe a través del testimonio de Arquímedes. Incluso, se ha afirmado que Aristarco había explicado por qué no era válida la objeción sobre la tesis heliocéntrica, que argumentaba que las posiciones relativas de las estrellas fijas que vemos también debían variarse con el movimiento de la Tierra. La respuesta está en el hecho que éstas están muy lejos.

Apolonio, Hiparco

Se considera a Apolonio el fundador de la astronomía matemática cuantitativa, quien se supone conocía bien el sistema de movimientos en epiciclos que fue parte de la teoría de Ptolomeo para representar los movimientos de los astros celestes. De hecho, se afirma que propuso dos tipos de sistemas: uno con base en movimientos epicíclicos y, otro, con base en movimientos excéntricos. Se trataba de un sistema diferente y alternativo al propuesto por Eudoxo de los esferas homocéntricas (concéntricas), teorías que "compitieron" en la Antigüedad. Más adelante ofrecemos una representación gráfica.



Hiparco, estampilla.

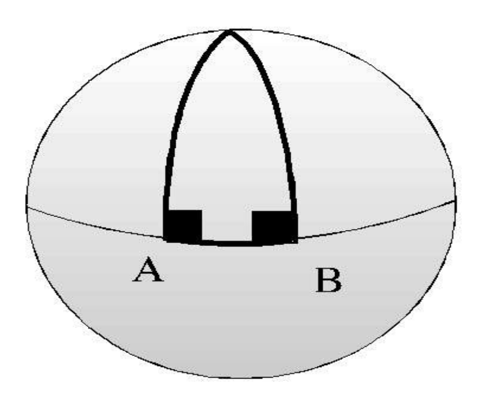
No obstante, fueron los trabajos de Hiparco y Ptolomeo los resultados más importantes de la astronomía alejandrina.

Hiparco utilizó observaciones babilonias así como propias realizadas durante más de 30 años, para diseñar una teoría del movimiento de los astros conocidos a través de epiciclos y deferentes.

Se conoce el trabajo de Hiparco a través de Ptolomeo. Se afirma que la realización más significativa de Hiparco fue el descubrimiento de la presesión de los equinoccios. Es decir, que la dirección del eje de la Tierra cambia en el espacio de manera lenta.

Hiparco hizo una mejor aproximación a la eclíptica que Eratóstenes. Realizó un catálogo de estrellas fijas que incluía 1 080 y también sus posiciones relativas.

Hiparco hizo un gran trabajo en la trigonometría, que, de seguro, estaba asociado a la astronomía, aunque también a la geografía. De hecho, este tipo de trigonometría que se usaría en geografía es esférica, dada la esfericidad de la Tierra. Hizo, por ejemplo, una tabla de cuerdas (lo que equivaldría ahora a una tabla de senos).



Triángulos esféricos.

6.2 Ptolomeo

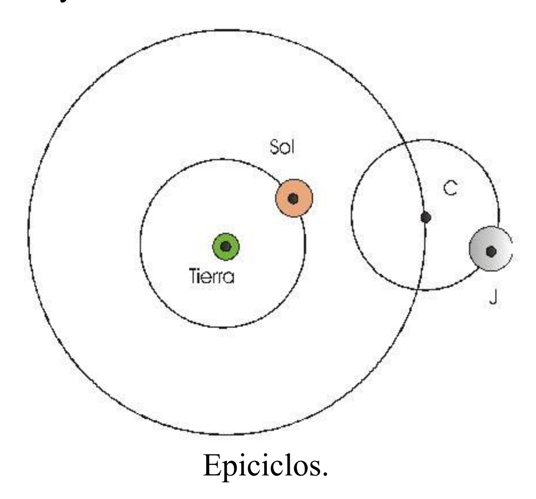
Ptolomeo extendió la teoría de Hiparco, precisando y mejorando las descripciones matemáticas de los astros, con tal suceso que quedó en la historia con el nombre de Ptolemaica.



Claudio Ptolomeo.

Ahora bien: "Donde realmente se aprecia la originalidad de este astrónomo es en su teoría de la Luna, que corrige y perfecciona la de Hiparco, y sobre todo en su teoría de los planetas." [Rioja, Ana y Ordóñez, Javier: Teorías del universo. Volumen I. De los pitagóricos a Galileo, p. 73] Es interesante señalar que Hiparco y Ptolomeo no solo se basaron en las observaciones obtenidas por los babilonios o caldeos sino que realizaron observaciones propias, que incorporaron en lo que ellos consideraban era un modelo matemático del comportamiento de los astros celestes.

La idea de epiciclos y la de excéntricas jugaron un papel decisivo en la teoría de Ptolomeo. La idea de epiciclo, que se atribuye a Apolonio, aunque la desarrolló ampliamente Ptolomeo, es que un cuerpo se mueve en un círculo cuyo centro se mueve en otro círculo. Véase la figura siguiente.



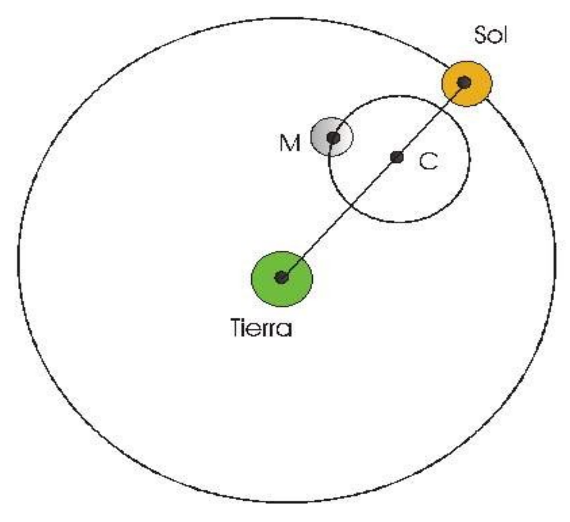
Epiciclos.

Al parecer, los epiciclos tienen un origen muy interesante, que refiere, incluso a la tradición pitagórica, especialmente aquella en el sur de Italia. Por eso:

"El papel de la escuela alejandrina habría consistido en desarrollar cuantitativamente y aplicar a observaciones celestes precisas, estructuras geométricas generadas dentro del más puro espíritu de los antiguos pitagóricos y de Platón. Según otras versiones, la utilización de epiciclos para los planetas, cuyo centro estaría ocupado por el Sol y a su vez éste giraría en torno a la Tierra describiendo un círculo deferente, habría derivado de doctrinas de carácter heliocéntrico como las de Heráclides del Ponto (siglo IV a. C.). O tal vez el abandono de las esferas se habría debido a autores desconocidos que no se encuadran en ninguno de estos planteamientos. Lo que parece cierto es que su origen en el tiempo se remonta a finales del siglo IV y principios del siglo III a. C. El primer matemático que sabemos con seguridad que hizo uso de las nuevas hipótesis para salvar las apariencias celestes fue Apolonio." [Rioja, Ana y Ordóñez, Javier: Teorías del universo. Volumen I. De los pitagóricos a Galileo, p. 69]

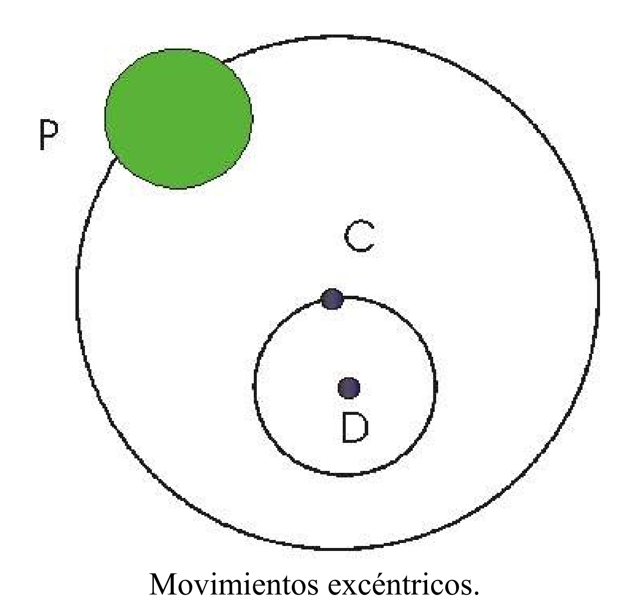
En el esquema de Ptolomeo, se distingue entre planetas exteriores y los interiores, con esquemas de explicación diferentes. Veamos. Siempre se tiene que el Sol giraba alrededor de la Tierra. En los exteriores, por ejemplo en el caso de Júpiter, representado por J, éste giraba en un círculo por el que pasa C; la trayectoria de C se llamaba el deferente de Júpiter. Como aparece en la figura anterior.

En el caso de los planetas interiores, el esquema se representa en la siguiente figura. Considere que M representa a Mercurio o Venus.



Epiciclos interiores.

El esquema de los movimientos excéntricos es el de un planeta P que se mueve sobre una circunferencia con centro C, y C se mueve sobre otra circunferencia más pequeña de centro D.



Movimientos excéntricos.

El Almagesto

El Almagesto de Ptolomeo fue la referencia decisiva y más influyente durante siglos en la cosmología. Su autoridad sólo puede compararse con la de los Elementos de Euclides.

Incluía todo el conocimiento astronómico de siglos.

Aunque lo desarrollaremos luego, debe decirse que hay una diferencia entre las aproximaciones de Aristóteles y Ptolomeo que son relevantes, porque tendría implicaciones en la revolución cosmológica de los siglos XVI y XVII.

¿Relevancia del Almagesto? Sarton lo comenta así:

"En primer lugar, el Almagesto definió lo que llamamos sistema tolemaico, es decir, el sistema solar que tiene por centro la Tierra. Siguiendo a Hiparco, Tolomeo rechazó las ideas de Aristarco de Samos (III-1 a.C.), en cuyo pensamiento se descubre una anticipación del sistema copernicano. Hiparco y Tolomeo lo rechazaron [incluso rechazaron el sistema geoheliocéntrico de Heráclides de Ponto (IV-2 a.C.). El sistema tolemaico era completamente geocéntrico] porque no se ajustaba suficientemente a sus propias observaciones. Sus objeciones eran de la misma naturaleza que las que opuso Tycho Brahe a fines del siglo XVI; sólo después que Kepler reemplazó, en 1 609, las trayectorias circulares por las elípticas, fue posible conciliar las observaciones con las ideas de Aristarco o de Copérnico. Al magnífico método del Almagesto se debió la supremacía del sistema tolemaico hasta el siglo XVI, a pesar de las abundantes críticas, que se fueron haciendo cada vez más agudas a medida que las observaciones aumentaban en número y precisión." [Sarton, George: Ciencia antigua y civilización moderna, pp. 59-60]

Para que no se pierda la perspectiva, donde concurren las influencias místicas o acientíficas en la ciencia y las matemáticas, mencionamos que Ptolomeo también escribió sobre astrología.

6.3 Un balance sobre las matemáticas alejandrinas

Sin duda, la principal característica de la civilización griega en relación con las matemáticas era su carácter eminentemente deductivo para garantizar la demostración de sus resultados. A diferencia de otras culturas y pueblos, los griegos decidieron que el pensamiento intuitivo y la experiencia no eran suficiente fundamento para el conocimiento del mundo, requerían métodos que no pudieran ser cuestionados. En esa perspectiva, concluyeron la necesidad de verdades primeras, a partir de las cuales derivar deductivamente las otras. Su conciencia de este método, estos énfasis, los llevó a establecer con toda precisión desde el inicio de cada obra esos primeros principios.

De igual manera, asumieron que la existencia de los conceptos que utilizaban requerían un proceso mas allá de la deducción: la constructibilidad, por medio de la regla y el compás. La relevancia de esta metodología y esta aproximación se expresa, por ejemplo, en el hecho de que de los 10 axiomas contenidos en el libro los Elementos, Euclides derivó 467 proposiciones y Apolonio, en sus Secciones Cónicas, 487. Un éxito extraordinario de organización, presentación, manipulación del conocimiento.

A pesar de la recurrencia a un método heurístico o mecánico por Arquímedes, él no dejaba de pensar que había que ofrecer una demostración deductiva a sus resultados. Afirmaba con todo claridad en El método:

"Lo que hemos aducido no demuestra ciertamente ese resultado; sin embargo, da a la conclusión visos de verdad. Así pues, viendo que no es un resultado demostrado pero sospechando que la conclusión es verdadera, expondremos en su debido lugar la demostración geométrica que hemos hallado, y hemos publicado con anterioridad (Sobre la cuadratura de la parábola, prop. 14-17)." [Arquímedes: El Método, p. 43]

Si resumimos sistemáticamente la contribución de los griegos desde los jónicos hasta Diofanto, podemos señalar geometría sólida y plana, trigonometría plana y esférica, teoría de números, álgebra geométrica, introducción al simbolismo y al manejo algebraico. Sin embargo, probablemente la principal contribución de la civilización griega fue una definición o construcción de la naturaleza y los límites de las matemáticas.

De igual manera, los griegos establecieron una relación entre el mundo y las matemáticas, dentro de un espíritu de racionalización, que subrayó las matemáticas como verdades acerca del diseño de la realidad; las leyes del mundo se codificaban por medio de leyes matemáticas.

No obstante, es necesario recapitular algunas de las fronteras que tuvieron los griegos. La primera, la más evidente, fue la dificultad para manejar los números irracionales. Esto los llevó a un énfasis en la geometría cualitativa y, especialmente, los condujo a un débil desarrollo de la aritmética y el álgebra. Esta dificultad generó una separación entre geometría y aritmética, que se codificó con la distinción entre magnitud y número (establecida formalmente por Eudoxo). La ausencia de aritmética y álgebra y la potenciación de los métodos geométricos complicó excesivamente las demostraciones de los resultados matemáticos de la Antigüedad. Hay un sesgo en la contribuciones griegas, que bien señala Russell:

"Los griegos aportaron algo que representa un valor más permanentemente para el pensamiento abstracto: descubrieron las matemáticas y el arte del razonamiento por deducción. La geometría, especialmente, es un invento griego, sin el cual la ciencia moderna hubiera sido imposible. Pero en relación con las matemáticas se evidencia la unilateralidad del genio griego. Razonó por inferencia de lo evidente en sí, no por inducción del hecho observado. Sus éxitos asombrosos en el empleo de este método indujeron a error, no solamente al mundo antiguo, sino también a la mayor parte de los modernos. Solo de modo muy lento, el método científico que trata de conseguir principios inductivamente por medio de la observación de hechos particulares ha sustituido la creencia helénica en la deducción de axiomas luminosos extraídos de la mente del filósofo." [Russell, Bertrand: Historia de la filosofía occidental, Tomo I, p. 59]

A esa extraordinaria restricción, se añadió otra, la reducción a dos figuras geométricas: la recta y el círculo, traducidas en la construcción por medio de regla y compás. La consecuencia fue la restricción a sólo cierto tipo de figuras geométricas, dejando por fuera una gran cantidad de ellas, que eran muy relevantes para el progreso del conocimiento matemático.



Escultura de Ptolomeo.

No están claras las razones por las cuales los griegos adoptaron este tipo de restricciones, tal vez porque la construcción por medio de regla y compás permitiría asegurar la existencia de los conceptos usados, o tal vez porque las rectas y los círculos son figuras primarias básicas y simples. En cualquier caso, la realidad es que estas limitaciones restringieron posibilidades de crecimiento cognoscitivo de esta gran civilización y dejaron, también, para la posteridad asuntos que la humanidad debió afrontar tras larga reflexión y la participación de muchos intelectuales.

Otra de las limitaciones de la civilización griega fue el manejo del infinito. Lo infinito, como decía Aristóteles, aparecía como imperfecto, y por lo tanto escapaba de las necesidades de fundamentación y rigor que se habían establecido los matemáticos griegos. Las dificultades con el manejo de lo infinitamente pequeño, que se encuentran presentes, por ejemplo, en las paradojas de Zenón, están conectadas también con la relación entre los discreto y lo continuo.

Para Aristóteles, lo continuo no puede emerger o construirse a partir de lo discreto. Aquí converge, otra vez, la separación entre aritmética (de números) y geometría (magnitudes continuas). Un ejemplo de esta limitación se encuentra en los axiomas de los Elementos (Euclides), cuando la referencia a las rectas paralelas infinitas se formula de una forma que evade precisamente el infinito.

Se puede decir que el asunto de la continuidad y el infinito se escapaba y, aún más, entraba en contradicción con métodos geométricos y algebraicos desarrollados por los griegos antiguos. Zenón, Eudoxo, Arquímedes (y también otros asuntos presentes en la Lógica de Aristóteles) generaron tensión en el mundo matemático griego. Algo similar lograron los números irracionales que también estarían íntimamente asociados con el infinito y la continuidad.

Con este capítulo damos fin a una etapa decisiva en el desarrollo de las matemáticas y las ciencias que iniciamos con las matemáticas en los egipcios y mesopotámicos, griegos presocráticos, atenienses, y alejandrinos. Ahora vamos a hacer un corte para volver a retomar algunos elementos de otras civilizaciones.

6.4 Biografías

Theodosius de Bitinia

Theodosius (Teodosio) de Bitinia nació alrededor del año 160 a. C. en Bitinia, Anatolia, Turquía. Por mucho tiempo se creyó que Theodosius había nacido en Trípolis, pero esto se debió a que fue confundido con otro autor en un escrito del siglo X.

Theodosius fue el autor de Sphaerics, un libro acerca de la geometría de la esfera, escrito con el fin de que en él se basara el estudio de la astronomía. Hay quienes piensan que el libro fue un adelanto del pensamiento Euclideano, o que fue un libro escrito muchos años antes por Eudoxus. En el libro, Theodosius define la esfera como una figura sólida con la propiedad de que cualquier punto en su superficie está a una distancia constante de un punto fijo en el centro de la esfera. De sus obras sobrevivieron dos obras escritas en griego, Habitaciones y Días y Noches.

Murió alrededor del año 90 a. C.



Claudio Ptolomeo

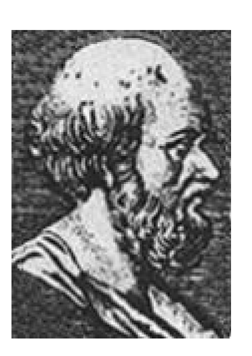
Ptolomeo nació alrededor del año 85 en Egipto. Su nombre es una mezcla de griego y romano, lo que indica que descendió de una familia griega de Egipto y que era ciudadano de Roma.

Fue uno de los astrónomos y geógrafos griegos más influyentes de la historia, y como prueba de esto se encuentra su teoría geocéntrica, la cual prevaleció por 1 400 años. Durante el año 127 al 141, Ptolomeo hizo observaciones astronómicas en Alejandría en las que se ayudó por las realizadas por Theon. Se cree, que Theon pudo haber sido su maestro.

Los primeros trabajos de Ptolomeo fueron dedicados a Syrus, que pudo haber sido un maestro en Alejandría, aunque se desconoce de él. Mucho de su conocimiento se debe a las grandes bibliotecas en donde había encontrado material de referencia sumamente valioso.

Su trabajo más importante es el Almagest, un tratado de trece libros en el que se expresan los movimientos del Sol, la Luna y los planetas; el título original en griego fue La Recopilación Matemática, al traducirse en árabe se llamó Al-Majisti y su última transición al latín fue Almagest. Lo más importantes, es que fue utilizado por más de un siglo, hasta que surgió la Teoría Heliocéntrica de Copérnico.

Murió alrededor del año 165 en Alejandría, Egipto.



Eratosthenes de Cyrene

Eratosthenes nació en el año 276 a. C. en Cyrene (ahora Libya), en África del Norte. Algunos de sus principales maestros fueron Lysanias de Cyrene, el filósofo Aristón de Chios y del poeta griego Callimachus, quien también había nacido en Cyrene.

Aproximadamente, hacia el año 240 a. C. se volvió el tercer bibliotecario de Alejandría, en Egipto, en donde erigió una columna con un epigrama en el que inscribió su propia solución al problema de doblar el cubo. Hizo una medida notablemente exacta de la circunferencia de la Tierra, la cual era sólo un 15% más grande, además es conocido por su aporte a la geografía.

Después de quedar ciego en su vejez, muere a causa de inanición voluntaria en el año 194 a. C.

Aristarco de Samos

Aristarco de Samos nació alrededor del año 310 a. C. en Grecia. Es muy poco lo que se conoce de él, debido a que su trabajo se consideró de poco interés para las matemáticas; a pesar de esto, los mismo griegos lo conocieron como “Aristarco el matemático”, y otros lo reconocerían como el precursor de Copérnico, debido a sus estudios astronómicos.

Fue alumno de Strato de Lampsacus, quien había sido director del Liceo de Aristóteles. En 287 a. C. Strato se convirtió en el nuevo director del Liceo en Alejandría y es posible que fuese ahí donde Aristarco inició sus estudios al lado de Strato. Fue uno de los primeros en afirmar que la Tierra giraba alrededor del Sol. Lastimosamente ninguno de sus trabajos sobrevivió y lo que se conoce de él es gracias a escritos de otros matemáticos.

Murió alrededor del año 230 a. C. en Grecia.

6.5 Síntesis, análisis, investigación

1. ¿Cuáles eran las principales características del modelo cosmológico propuesto por Eudoxo? Explique.
2. ¿Cuántas esferas añade Aristóteles a la teoría de Eudoxo? Explique si hay una diferencia de visión cosmológica entre Eudoxo y Aristóteles.
3. ¿Qué es eso de la separación de planos cosmológicos?
4. Mencione la principal tesis cosmológica de Aristarco.

5. Explique qué es un epiciclo y qué una excéntrica.
6. ¿Cuál era la relación entre el sistema ptolemaico y la geometría?
7. Lea con cuidado los siguientes textos que aportan información sobre los sistemas cosmológicos y astronómicos de Eudoxo, Aristóteles y Platón:

   "De ahí que en la escuela de Eudoxo en Cícico, otros autores como Polemarco y Calipo continuaran trabajando en pos de un mayor ajuste de la teoría. Fruto de esto será el aumento del número de esferas que éste último llevará a cabo a fin de explicar mejor el movimiento de algunos cuerpos. En concreto añadirá dos más a cada una de las tres esferas del Sol y de la Luna y una a las cuatro de Marte, de Venus y de Mercurio. Se pasa así de veintisiete a treinta y cuatro esferas." [Rioja, Ana y Ordóñez, Javier: Teorías del universo. Volumen I. De los pitagóricos a Galileo, p. 44]

   "Al igual que en Platón, el cosmos de Aristóteles es un conjunto heterogéneo de regiones jerarquizadas que van desde un máximo de perfección en la periferia a un mínimo en el centro. Arriba contemplamos los etéreos seres celestes, imperecederos, inalterables, sujetos exclusivamente al movimiento perfecto, el circular. Abajo vemos y tocamos los seres terrestres que nacen y mueren, sufren alteraciones, modifican sus tamaños, abandonan sus lugares naturales. Pero todo ello forma parte del orden cósmico que nunca está amenazado: en el Cielo porque nada se desordena, en la Tierra porque los cuerpos tienden espontáneamente a recuperar la ordenación perdida. En este confortable mundo no cabe concebir un tipo de evolución futura que pudiera conducir a su destrucción." [Rioja, Ana y Ordóñez, Javier: Teorías del universo. Volumen I. De los pitagóricos a Galileo, p. 58]

   Explique las razones por las que se requiere añadir nuevas esferas en estos modelos de explicación del movimiento de los astros. Comente las diferencias entre Platón y Aristóteles en sus visiones cosmológicas y cómo se relacionan estas visiones con la percepción que usted tiene del cosmos.
8. Con ayuda del siguiente texto y el desarrollo del tema que se hace en este capítulo, explique la teoría cosmológica que poseía Aristarco.

   "Discípulo primero del Liceo aristotélico en Atenas (regentado en aquel entonces por Estratón de Lampsaco), desarrolló su trabajo como astrónomo en Alejandría. Su universo sí es heliocéntrico en el pleno sentido del término: el centro de la esfera de las estrellas está ocupado por un Sol inmóvil en torno al cual giran todos los demás cuerpos, incluida la Tierra (a excepción de la Luna). Por su parte, la Tierra tiene un doble movimiento: diurno o de rotación y zodiacal o de traslación. No son las estrellas las que cada casi veinticuatro horas giran hacia el oeste, sino la Tierra la que lo hace hacia el este. Además se desplaza, también hacia el este, sobre el fondo de las estrellas zodiacales, siendo ella la que recorre el camino por el que aparentemente avanza el Sol. La inclinación del eje terrestre sobre el plano de la eclíptica permite explicar las estaciones." [Rioja, Ana y Ordóñez, Javier: Teorías del universo. Volumen I. De los pitagóricos a Galileo, p. 87]
9. Explique la diferencia entre la visión cosmológica de Aristarco y la de los Pitagóricos. Utilice el siguiente texto.

"El centro lo ocuparía la Tierra o, en una versión muy extendida debida a Filolao (siglo V a.C.), un fuego central inmóvil en torno al cual giraría todo lo demás incluida la Tierra (como curiosidad cabe señalar que entre la Tierra y el fuego central, Filolao situó una Anti-Tierra a fin de proteger a aquella de los rayos directos de éste) (figura 1.8). Asimismo fue iniciativa de estos filósofos la descomposición del complejo movimiento observable del Sol en dos movimientos simples, el diurno y el anual (y probablemente también la del movimiento de la Luna y los planetas)." [Rioja, Ana y Ordóñez, Javier: Teorías del universo. Volumen I. De los pitagóricos a Galileo, p. 32]

10. Explique las teorías sobre el Sol de Hiparco y Ptolomeo. Use la siguiente cita.

"La teoría astronómica de Ptolomeo parte de los sistemas de círculos ya empleados por Apolonio, Hiparco y otros astronómicos desconocidos que habrían efectuado pequeños progresos en el largo período que separa a Ptolomeo de este último (unos doscientos sesenta años). De hecho su teoría del Sol es idéntica a la de su predecesor: equivalencia entre la hipótesis de una excéntrica fija y la hipótesis de un epiciclo retrógrado junto con un deferente concéntrico a la Tierra para explicar la anomalía zodiacal de este astro. La única diferencia reside en que, mientras Hiparco prefiere una descripción concéntrica a la Tierra que evite desplazar a ésta del centro, Ptolomeo se decanta a favor de la excéntrica por ser más simple (precisa un solo movimiento en vez de dos). Pero el tema de la elección entre hipótesis equivalentes desborda el marco de la astronomía para adentrarse en el de la física." [Rioja, Ana y Ordóñez, Javier: Teorías del universo. Volumen I. De los pitagóricos a Galileo, p. 72.]

11. Lea cuidadosamente el siguiente texto.

"... así como sus propias innovaciones, Ptolomeo le dio el nombre de Gran Composición Matemática de la Astronomía. La primera edición que llegó a occidente fue en versión árabe bajo el título de Al Majesti ('El más Grande'); de ahí el modo como es conocida normalmente, Almagesto. Está dividida en trece libros y capítulos, en los que se incluye el tratamiento del movimiento del Sol (Libro I), de la Luna (Libro IV) y de los planetas (Libros IX-XIII), un catálogo de más de mil estrellas que mejora el de Hiparco (Libros VII y VIII), la descripción del astrolabio, instrumento que permite determinar las coordenadas celestes (Libro V), un estudio de la distancia que separa la Luna y el Sol del centro de la Tierra (Libro V), y también diversas consideraciones de carácter físico y geográfico referidas a la forma del universo, a la de la Tierra, a su inmovilidad, a la concepción de la gravedad y a cuanto tiene que ver con la idea de 'lugar habitado'." [Rioja, Ana y Ordóñez, Javier: Teorías del universo. Volumen I. De los pitagóricos a Galileo, p. 72]

¿A qué se refiere la expresión "... así como sus propias innovaciones"? Describa en sus palabras los temas de que tratan los libros I, IV, V, VII, VIII, IX-XIII del Almagesto. Explique en su opinión, ¿cuál es la relevancia científica de este libro?

CAPITULO VII

MATEMÁTICAS CHINAS



Es importante inscribir los trabajos de los chinos durante la Edad Media dentro de la perspectiva más general de la evolución de las matemáticas en esta cultura.

7.1 Una visión panorámica de la cultura matemática china

Un primer periodo, que señalan los especialistas, es el comprendido entre el 200 a.C. al 220 d.C, y corresponde a la dinastía Han. Se trata de una etapa en la que se advierten relevantes resultados en ciencias y tecnologías. Por ejemplo, en astronomía la construcción de calendarios e, incluso, hasta cuadrados mágicos que fueron una interesante tradición entre los chinos. Hubo importantes clasificaciones de plantas y animales. El papel, otro ejemplo, es de esta época.

Es en este contexto histórico cuando se compiló uno de los textos clásicos de las matemáticas chinas que tuvo una extraordinaria influencia: el Chiu Chang Suan Shu (Nueve capítulos sobre las artes matemáticas). Se afirma que sería algo así como los Elementos de Euclides en la cultura griega. Dos figuras se reconocen como sus creadores: Chang Shang (c. 150 a.C.) y Keng Shou Chang (c. 50 a.C.).

En un periodo posterior se reconoce el trabajo de dos matemáticos: Sun Tsu (c. 300 d.C.) y Tsu Chung Chih (c. 450 d.C.). Sun es una primera referencia para el análisis indeterminado.

Un par de siglos después, en el año 656, apareció una enciclopedia matemática: Suan Ching Shih Shu (Los diez manuales matemáticos), que ejerció su influencia en los siglos siguientes.

Un siguiente momento ya se encuentra en la dinastía Sung (960 - 1 279), que tuvo importantes logros en las matemáticas. Por ejemplo, la obra Su Shu Chiu Chang (Las nueve secciones matemáticas), escrito por Chin Chiu Shao en el año 1 247. En esta obra encontramos resolución (numérica) de ecuaciones de todos los grados y nuevos resultados en el análisis indeterminado. Estos métodos en la resolución de ecuaciones se completaron con la construcción de ecuaciones a partir de datos dados, algo que se encuentra en el libro Tshe Yuan Hai Ching, escrito por Li Yeh en el año 1 248.

Yang Hui publicó varias obras en el periodo entre 1 261 y 1 275, entre ellas: Hsiang Chieh Chiu Chang Suan Fa Tsuan Lei (Análisis detallado de los nueve capítulos). Este último incluye resultados en series, ecuaciones de segundo grado con coeficientes negativos de x, ecuaciones numéricas de orden superior.

Chu Shih Chieh fue otro matemático relevante, que se afirma fue un gran algebrista. Escribió dos tratados: Suan Shu Chi Meng (Introducción a los estudios matemáticos) y Szu Yuen Yu Chien (El precioso espejo de los cuatro elementos), el primero en 1 299 y el segundo en 1 303. Aquí encontramos, por ejemplo, el llamado triángulo de Pascal, métodos para resolver ecuaciones de grados superiores, resolución de ecuaciones usando un método que hoy juzgaríamos utilizó las matrices.

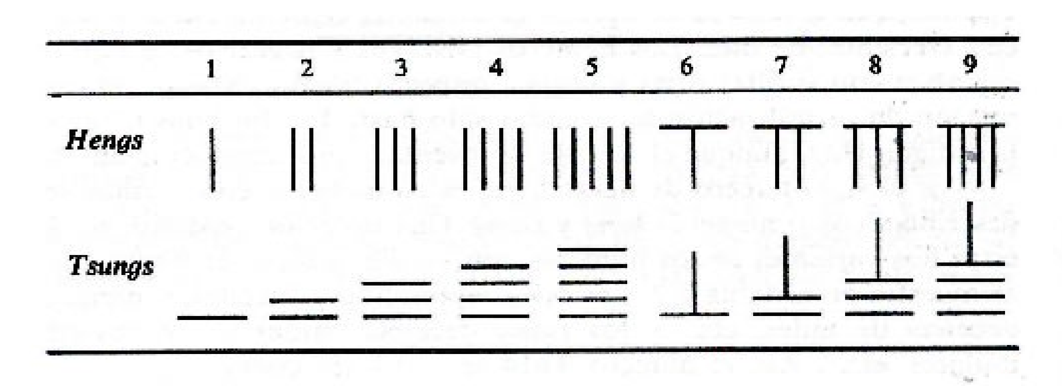
Otro de estos grandes matemáticos, pero del que hay menos fuentes, es Kou Shou Ching (siglo XIII), quien se supone hizo la primera obra sobre la trigonometría esférica de la China.

Hay varios aspectos de las matemáticas chinas que vale la pena reseñar.

Uno de ellos es la existencia de un sistema posicional con 9 números, que se adelantaría un milenio a los hindúes.

Varillas

Veamos un asunto sumamente interesante: un sistema de números por medio de varillas (eran de marfil, madera, hierro colado, jade o bambú), que, desde el siglo III d.C., tuvo un papel importante en las características de las matemáticas chinas. Este sistema permitía usar números negativos (negras) y positivos (rojas). Una forma de este tipo de números se recoje en la tabla siguiente.



Números chinos. Tomado de [Joseph, George G.: La cresta del pavo real, p. 202]

Los números hengs servían para representar unidades, centenas, decenas de millar, etc. Los tsungs , las decenas, millares, centenas de millar, etc.

Todas las operaciones se podían hacer como si se tratase de un ábaco. Es interesante que este sistema permitió incluso la resolución de ecuaciones, con lo que se expandió una forma de álgebra o aritmética geométrica. De hecho, es a partir de este tipo de representaciones que emergen las "matrices" chinas.

Dentro de este sistema de varillas es que se desarrolló naturalmente un álgebra de números negativos.

Chiu Chang

Veamos con más detalle el Chiu Chang.

Posee 246 problemas repartidos en 9 capítulos que consideraban temas de interés social en ese escenario. Comentadores posteriores como Liu Hui en el siglo III y Yang Hui en el XIII ampliaron estos trabajos. La opinión es que debe colocarse en una tradición algebraica y aritmética similar a la desarrollada por los babilonios. En todos los casos que se plantean, se trata de problemas prácticos.

En un primer capítulo (Fang thien) se incluye las reglas para calcular áreas de triángulos, trapecios, círculos, rectángulos, así como una aritmética de fracciones.

El segundo capítulo es de porcentajes y proporciones.

El cuarto es sobre extracción de raíces cuadradas y cúbicas. Aquí había una base geométrica para proseguir los procedimientos. De hecho, posteriormente, el método que usaron sirvió en la resolución de ecuaciones de segundo grado. Se dice que este método también sería adoptado por los coreanos y japoneses.

El capítulo quinto (Shan kung) incluye procedimientos para calcular volúmenes del cilindro, pirámide rectangular, tetraedro, tronco de pirámide cuadrangular, y el tronco de prisma recto triangular (este último en Occidente se iría a consignar hasta Legendre, en 1 794).

El octavo capítulo aborda la solución de ecuaciones simultáneas con 2 o 3 incógnitas. Esto se hace por medio de tablas con un método semejante al moderno matricial. Con ese procedimiento se incluían también números negativos.

Es decir, matrices, un procedimiento similar al método de eliminación (en Occidente, se llamaría de Gauss), e incluso una forma de la regla de Cramer estuvieron presentes en las matemáticas chinas varios siglos antes de que los europeos los desarrollaran. Se trata de un método que no fue usado en ninguna otra tradición cultural, y se piensa que fue derivado casi directamente de las características del sistema de varillas.

Este texto matemático, uno de los más antiguos del mundo, es por supuesto más amplio y rico que los que se poseen de las civilizaciones egipcias y babilónicas.

7.2 Resultados relevantes

A partir del siglo XIII tenemos los mejores desarrollos de los chinos en las matemáticas. Estos se pueden resumir así: la resolución de ecuaciones numéricas de orden superior, basada en la extracción de raíces cuadráticas y cúbicas del Chiu Chang y en el uso de triángulo de Pascal. Este método se rastrea desde Chia Hsien (c. 1050), y se indentifica con el nombre de li cheng shih shuo (resolución de coeficientes mediante una gráfica). Había otro método que se llamaba tseng cheng fang fa o método de extracción mediante suma y multiplicación.

Por otra parte, en torno a la confeción de calendarios y las necesidades de la astronomía, se desarrollaron procedimientos en las ecuaciones indeterminadas. Hubo también fórmulas de interpolación cúbica (Kuo Shou Ching, c. 1275), algo parecido al método de Newton-Stirling. Esto no se ampliaría en Europa sino hasta el siglo XIX.

Un par de detalles adicionales: el teorema Kou ku. Se trata del teorema de Pitágoras. Este aparece demostrado en un texto muy antiguo llamado Chou Pei.

La demostración se hace por medio de diagramas. George Gheverghese Joseph cita un pasaje traducido por Needham con el procedimiento, que bien vale la pena introducir:

"Cortemos un rectángulo (por la diagonal), de manera que la anchura sea 3 (unidades) y la longitud 4 (unidades). La diagonal entre los (dos) extremos tendrá entonces una longitud de 5. Ahora, tras dibujar un cuadrado sobre esta diagonal, circunscribirlo con semirrectángulos como el que ha sido dejado en el exterior, de modo que se forme una figura plana (cuadrada). Asi, los (cuatro) semirrectángulos exteriores, de anchura 3, longitud 4 y diagonal 5. forman en conjunto dos rectángulos (de 24 de área); luego (cuando esto se resta de la figura plana cuadrada de área 49), el resto tiene 25 de área. Este (proceso) se llama 'apilamiento de rectángulos'."

La figura siguiente nos muestra la situación.

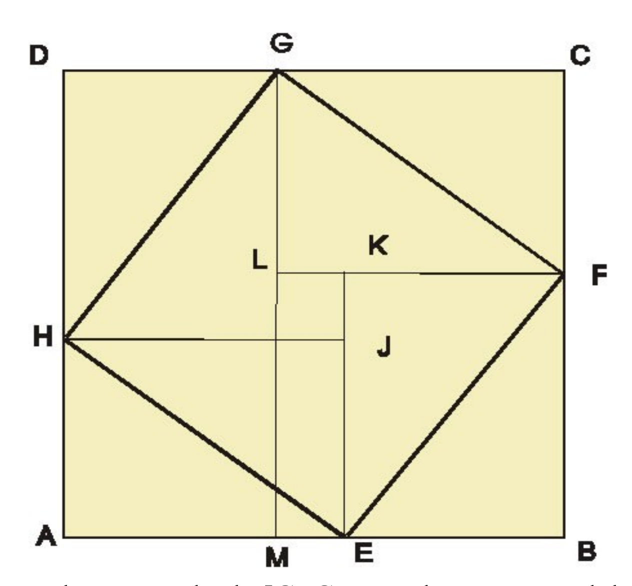


Diagrama Kou ku. Tomado de [G. G. Joseph: La cresta del pavo real].

La relevancia del teorema y sobre todo sus aplicaciones fueron muy importantes para construir una álgebra geométrica; es decir, lo que a veces no se reconoce: se dio un intento serio de los chinos por usar la geometría en la demostración de resultados algebraicos y aritméticos.

Otro detalle, el cálculo de π. Liu Hui hizo una aproximación en su comentario del Chiu Chang por un método parecido al de exhausción que usara Arquímedes.

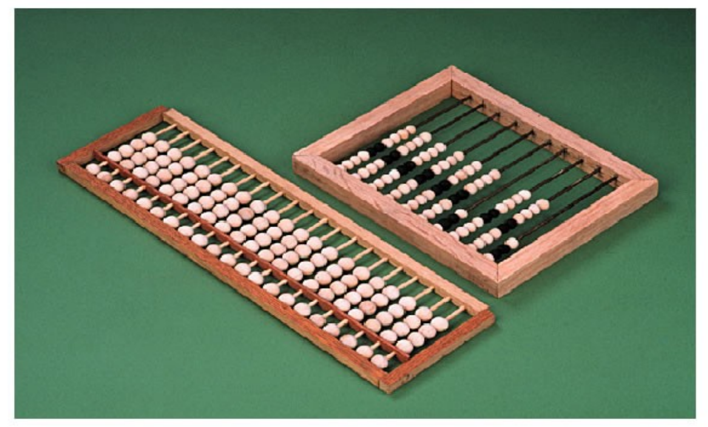
Existen en el Chiu Chang procedimientos para la extracción de raíces cuadradas y cúbicas. Estos fueron refinados por Sun Tsu y otros y fueron ampliados decisivamente en el siglo XIII a raíces de cualquier grado.

Un balance

Durante la Edad Media, los chinos llegaron a alcanzar avances que se encontraban muy por delante de los obtenidos por los europeos. No obstante, no tenían los mismos marcos teóricos, ideológicos o sociales para obtener resultados similares a los que una serie de hechos provocaron en Occidente.

Sin duda, puede afirmarse que los chinos poseían una mentalidad dominantemente práctica y técnica.

Muchos encuentran un vínculo entre esa actitud práctica y la filosofía china. Se dice que el taoísmo y especialmente el confucianismo no diferencian entre los dominios de los seres humanos y la naturaleza, y afirman el mundo como un organismo muy amplio en el cual aparecen cinco fases (agua, fuego, metal, madera, y tierra) y dos fuerzas, el ying y yang, y todo se encuentra en una interacción constante. Sea como sea, no se puede negar la existencia de un énfasis en los aspectos místicos entre los taoístas. Por otro lado, sí se puede observar una visión utilitaria y técnica en el campo de los seguidores de Confucio.



Ábacos ruso y japonés.

Por supuesto, una visión de esta forma tenía que afectar otros dominios aparte de la ciencia, en la cultura general. En lo que se refiere a la astronomía, por ejemplo, los chinos consiguieron obtener muchas observaciones acerca de los astros celestes; también, obtuvieron resultados en las mediciones del tiempo y otros instrumentos de medición. Sin embargo, no se encuentra mucha elaboración acerca de las teorías cosmológicas.

En lo que se refiere a la química y la física, los descubrimientos en general estaban asociados a aplicaciones prácticas. No menos sucedía con la medicina, en la que desarrollaron una gran cantidad de mecanismos y técnicas prácticas, que han resultado en algunos casos superiores a las europeas incluso hasta nuestros tiempos, pero que no estaban fundadas en teorías. De nuevo, una tendencia práctica. Esto por supuesto posee ventajas y desventajas. Asuntos filosóficos, incluso, que luego analizaremos.

7.3 Síntesis, análisis, investigación

1. Describa resumidamente el libro Chiu Chang
2. ¿En qué contexto se desarrollaron las ecuaciones indeterminadas?
3. ¿Qué era el teorema Kou ku?
4. Estudie el siguiente texto.

   "Como ya hemos dicho, el pensamiento y la práctica matemática chinos eran invariablemente algebraicos, no geométricos. Entre ellos no se desarrolló espontáneamente una geometría euclidiana y esto inhibió, sin duda, los avances que realizaron en óptica, donde, por el contrario, no se encontraron nunca con el obstáculo que significó la absurda idea griega de que los rayos eran enviados por el ojo. La geometría euclidiana fue introducida en China probablemente en el período Yuan (mongol), pero no enraizó allí hasta la llegada de los jesuitas. Esta ausencia, sin embargo, no impidió la realización de grandes inventos de ingeniería, de los cuales ya hemos mencionado dos: el medio más útil de interconversión de los movimientos rotatorios y lineal mediante la excéntrica, vástago de conexión y vástago de émbolo, y el afortunado logro de la forma más antigua de reloj mecánico. Ello supuso la invención del escape, o medio mecánico de retrasar la revolución de un conjunto de ruedas de modo que acoplase su período con el reloj primario de la humanidad, la aparente revolución diurna del cielo. En este aspecto nos encontramos con que la práctica china no fue puramente empírica, como pudiera parecer a primera vista. La construcción de la gran torre del reloj de Su Sung en Khaiféng en 1 088 d. C. fue precedida por la elaboración de un tratado teórico especial, debido a su ayudante Han Kung-Lien, que trataba de los trenes de engranajes y el mecanismo general a partir de principios básicos. Algo semejante se hizo con ocasión de la primera invención de este tipo de reloj por I-Hsing y Liang Ling-Tsan, en el siglo VIII, seis siglos antes de los primeros relojes mecánicos europeos con escapes de árbol de volante y laminilla. Además, aunque los chinos no tuvieron un Euclides, ello no les impidió el desarrollo, y consiguiente utilización, de las coordenadas astronómicas, que han conquistado totalmente la astronomía moderna y se utilizan universalmente en la actualidad, ni obstaculizó la consecuente elaboración del montaje ecuatorial, si bien no ponían en él un telescopio, sino un simple tubo por el que mirar." [Needham, J.: La gran titulación, pp. 22 y 23]

   Explique la relación entre geometría y álgebra en el mundo chino. Comente las ideas de este texto.

CAPITULO VIII

MATEMÁTICAS EN LA INDIA



La matemáticas hindúes tienen una historia muy larga. Si bien el llamado periodo clásico, que arranca en el 500 d.C. es el más importante, hay tradiciones que se remontan más de 2000 años hacia atrás. Del periodo que va del 3000 al 1500 a.C. una referencia es la cultura Harappā, con descubrimientos que salieron a la luz pública cuando se hicieron excavaciones en los años 1921 y 1923 en el Valle del Indo, con una característica especial: el uso de ladrillos cocidos en hornos, que colocados en edificios parecieran sugerir el uso de una base decimal.

8.1 Matemáticas védicas

Entre el 1 500 y el 800 a.C. se habla del periodo de las matemáticas védicas. Los Vedas eran colecciones de literatura en las que, entre muchas otras cosas, se encuentra matemática. Esto, en particular, en unos "apéndices" llamados Vedangas. Entre ellos, los Sulbasutras trataban de construcción y medidas de altares sacrificiales, y aquí había geometría.

Hubo 3 de ellos relevantes para las matemáticas, escritos, respectivamente, por: Baudhayana, Apastamba y Katyayana. El primero formula el teorema de Pitágoras, da un procedimiento para calcular la $\sqrt{2},$ correcta hasta la quinta cifra decimal, y diversas construcciones geométricas. El segundo amplía estos temas. El último no añade mucho. La geometría aquí provenía de la

integración de orientación, forma y área de los altares, según las prescripciones de los libros sagrados védicos. Había resultados geométricos, procedimientos de construcción de altares y algoritmos. El teorema de Pitágoras está incluido de la siguiente manera, por ejemplo, por Katyayana:

"La soga (estirada a lo largo de la longitud) de la diagonal de un rectángulo produce un (área) que producen conjuntamente los lados horizontal y vertical".

En la construcción de un altar aparecen varios tripletes pitagóricos, incluso con números irracionales.

En las construcciones geométricas que planteaban, había cuadrados, rectángulos, trapecios y círculos, que se debían construir con restricciones de área. Un par de ejemplos: "Fusionar dos cuadrados iguales o desiguales para obtener un tercer cuadrado", "transformar un rectángulo en un cuadrado de la misma área".

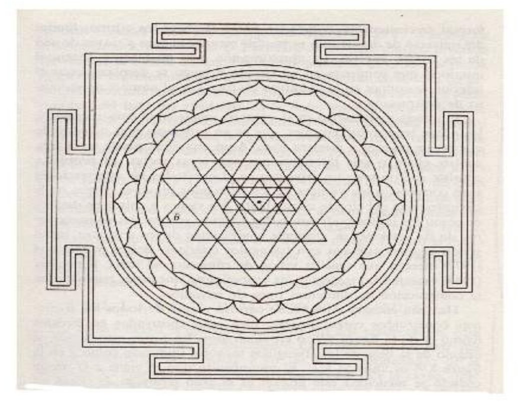
Las matemáticas védicas incluyen aproximaciones a raíces cuadradas. Se presume que esto se originó al intentar resolver el problema de construir un altar cuadrado que tuviera como área el doble de un cuadrado dado. Tanto Apastamba como Katyayana dieron soluciones. La aproximación fue 1,4142156, mientras, el valor real es 1,414213. ¡Nada mal! Los textos incluyen una fórmula que da la aproximación:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 4} - \frac{1}{3 \times 4 \times 34}.$$

Un comentarista de estos textos, del siglo XV, añadió 2 términos a esta serie, dando una aproximación con 7 dígitos correctos en la notación decimal; la serie quedaba así:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3\times 4} - \frac{1}{3\times 4\times 34} - \frac{1}{3\times 4\times 34\times 33} + \frac{1}{3\times 4\times 34\times 34}.$$

Hay un hecho curioso que se cita en un himno del Atharavaeda, en una figura que se usaba en las meditaciones, que estaba constituida por 6 triángulos isósceles, que generan a su vez 43 triángulos subalternos. La figura se llama: Sriyantra, algo así como gran "objeto". Tomada de [George Gheverghese Joseph: La cresta del pavo real].



Sriyantra .

Se trata de un problema de construcción geométrica bastante difícil. Pero lo más interesante, incluso sorprendente, es que el triángulo más grande de la figura constituye esencialmente una representación de una de las caras tringulares de la famosa pirámide de Gizeh en Egipto. Y conserva una de las razones más interesantes entre dos números-longitudes (irracionales) en la historia de las matemáticas: π y Φ. Este último número es la llamada razón áurea.

Esta es, con exactitud, 1,61803, pero de manera fraccionaria es: $\frac{1}{2 \times (1 + \sqrt{5})}$.

Φ es un número especial.

Una de las cosas interesantes es que emerge en los números de Fibonacci:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, ...

Cuando se avanza en la sucesión, la razón entre dos términos consecutivos $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ se aproxima crecientemente a Φ. Por ejemplo, $\frac{233}{144}$ da el valor que se tiene en la gran pirámide de Gizeh.

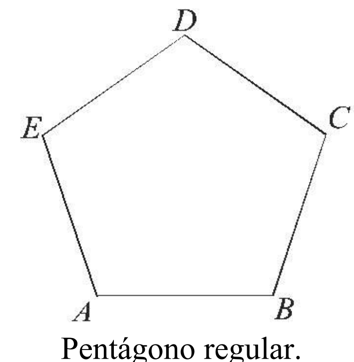
Antes de seguir, hagamos una pequeña digresión para ilustrar ese importante número que aparece por doquier en las matemáticas y la ingeniería; tanto que Kepler la llamó la "proporción divina".

La sección áurea

Una forma de obtenerla es en los pentágonos regulares. Véase el siguiente procedimiento.

Tomemos el pentágono regular

$ABCDE$.

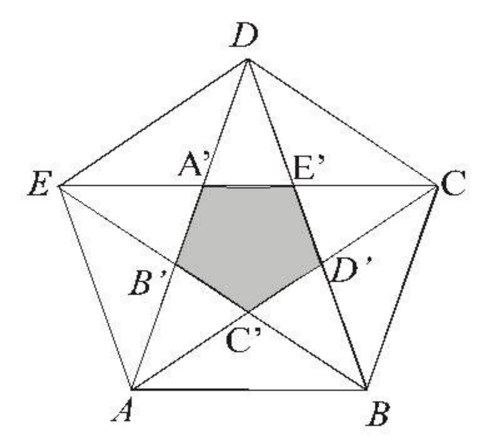


Pentágono regular.

y tracemos las 5 diagonales de éste.

Aquí obtenemos otro pentágono regular $A'B'C'D'E'$.

Y, observe: A', B', C', D', E' divide la diagonal correspondiente en 2 segmentos.



Sección áurea.

El resultado:

"La razón de la diagonal al segmento más largo es igual a la razón del mismo segmento al segmento más pequeño".

En la figura siguiente, se tiene que:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{A'D}}.$$

También:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD'}} = \frac{\overline{AD'}}{\overline{D'C}}.$$

Sea

d la diagonal y x el segmento mayor ($\overline{AD} = d$ y $\overline{AA'} = x$).

La razón se puede escribir como

$$\frac{d}{x} = \frac{x}{d-x}$$

lo que hoy en día decimos que es una ecuación de segundo grado:

$$d(d-x) = x^2$$

$$\Rightarrow \quad d^2 - dx = x^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + dx - d^2 = 0.$$

Seguimos. En los Sulbasutras se puede apreciar un sistema de numeración posicional y decimal, aunque los datos detallados y transparentes aparecen en el trabajo de un astrónomo de mitad del 587 d.C.: Varahamihira.

8.2 Periodos Jainista y Bakhshali

Jainista

Durante el periodo que va del 800 a.C. al 200 a.C. aparece lo que se llama las matemáticas jainistas. Del 200 a.C. al 400 d.C. se trata de un periodo de transición antes del periodo clásico del que no se tienen muchas fuentes, pero ya lo analizaremos.

El periodo jainista refiere a la declinación védica y al ascenso del budismo y el jainismo. Sabemos que existió en esta época una fascinación por los números grandes y que ofrecieron un primer concepto de infinito. Aquí aparecen operaciones como:

$(a)^2,\ (a^2)^2,\ [(a^2)^2]^2, \ldots$ y $\sqrt{a},\ \sqrt{\sqrt{a}},\ \sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}, \ldots$

(en el Anuyoga Dwara Sutra, siglo II o I a.C.).

Un tema importante que desarrollaron fue el de las combinaciones y permutaciones (por ejemplo en el Bhagabati Sutra, 300 a.C.). Hay fórmulas equivalentes a:

$${}_nC_1 = n,\ {}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{1\times 2},\ {}_nC_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\times 2\times 3}$$

y

$${}_nP_1 = n,\ {}_nP_2 = n(n+1),\ {}_nP_3 = n(n-1)(n-2).$$

Se dio un importante tratamiento de las progresiones geométricas.

Bakhshali

El periodo del 200 a.C. al 400 d.C. posee como referencia principal en lo que se refiere a las matemáticas, un manuscrito que fue encontrado en 1881 en un pueblo llamado Bakhshali, noreste de la India. Para la mayoría de expertos se trata de un documento del siglo XII d.C. pero una reescritura de textos del periodo que estamos considerando. Se trataba de un manual con reglas y ejemplos, esencialmente de álgebra y aritmética.

Con base en ese manuscrito se puede decir que los problemas tratados tuvieron una asociación menos religiosa que la que tuvieron en los periodos védico o jainista, es decir: fueron más prácticos. Se elaboraron mejores aproximaciones de $\sqrt{2}$. Se amplió el trabajo de series realizado por los jainistas. Tenemos un sistema posicional con valor numérico, e incluido el cero. Se inició un interés por el análisis indeterminado y hay, en la exposición, cierta demostración de las reglas que se formulan y de las que se brindan ejemplos.

Vamos ahora al periodo clásico, que es el que más nos interesa en este capítulo.

8.3 El periodo clásico

Empezamos citando algunos astrónomos y matemáticos: Aryabhata I (nació alrededor del 476 d.C.), Brahmagupta (alrededor del 598), Mahavira (ca. 850), Sridhara (ca. 900), Bhaskara (nació 1 114), Narayana Pandit (ca. 1 370), Madhava de Sangamagramma (ca. 1 340 - 1 425) y Nilakantha Somayaji (1 445 - 1 545).

Aryabhata I, en un libro que se titula Aryabhatiya, da una descripción del conocimiento científico de la época, incluye un sitema de notación numérico alfabético, reglas de operaciones en aritmética y trata procedimientros para resolver ecuaciones simples y cuadráticas, y, también, ecuaciones indeterminadas de grado uno. Hay, además, trigonometría, la que incluye las funciones seno, una función que se llamaba seno verso que es igual al 1-coseno. Dio el valor de 3,1416 para π. Su obra fue continuada por Varahanihira (ca. 505 - 587) y por Bhaskara (ca. 600). Este último ofreció una solución de ecuaciones indeterminadas de primer grado, que ejerció una importante influencia sobre Brahmagupta.

Brahmagupta, en una obra llamada Brahma Sputa Siddhanta, ofreció un método para la resolución de ecuaciones indeterminadas de primero y segundo grados. En otra obra, Khanda Khadyaka, en trigonometría dio un procedimiento para calcular los senos de ángulos intermedios con base en una tabla dada de senos. Se dice que era equivalente a la fórmula de Newton-Stirling hasta las diferencias de segundo orden. El primer libro fue traducido por los árabes y luego por los europeos, con lo que así se ofreció a Europa el conocimiento de la astronomía y matemáticas hindúes.

Mahavira, matemático y no astrónomo, sintetizó y amplió los resultados de Aryabhata, Bhaskara y Brahmagupta. Se afirma que su obra Ganita Sara Samgraha es una culminación de los trabajos y tradiciones de los jainistas. Por ejemplo, en las permutaciones y combinaciones. Dio soluciones a varios tipos de ecuaciones de segundo grado. Amplió el tema de la ecuaciones indeterminadas. Y trabajó en geometría con triángulos rectángulos de lados racionales.

Sridhara, en Pataganita, ofreció un método para sumar series aritméticas y geométricas que sería relevante posteriormente.

Se considera una culminación de 500 años de trabajos matemáticos la obra de Bhaskara II (llamado también Bhaskaracharya: "maestro Bhaskara"), Lilavati. Un ejemplo, un método para resolver ecuaciones indeterminadas de la forma $ax^2 + bx + c = y$ (método "cíclico"). Este método fue redescubierto por William Brouncker en 1 657. Se afirma que en su obra hay rastros de análisis y cálculo infinitesimal.

Se considera que Madhava de Sangamagramma fue probablemente el más importante de los astrónomos medievales de la India. En las matemáticas se dice que introdujo el salto del límite al infinito.

Los hindúes tuvieron como característica relevante de su álgebra el uso de símbolos (por ejemplo, el punto para el cero o para incógnitas, en algún momento de la historia hindú) y las letras del alfabeto para denotar las incógnitas.

Las ecuaciones lineales de primer grado aparecieron en los Sulbasutras (el de Baudhayana), pero una solución algebraica aparece hasta el documento Bakhshali. Las de segundo grado como, por ejemplo, $ax^2 + bx = c$ o $ax^2 = c$, están en los Sulbasutras pero aparecen resueltos en el de Bakhshali también. Aquí se ofreció la respuesta

$$x = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac} - b}{2a}.$$

Sridhara y luego Mahavira ofrecieron la solución:

$$x = \frac{-\frac{b}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{a} - 4\frac{c}{b}\right)\frac{b}{a}}}{2}.$$

En relación con el primero, sin embargo, no se sabe si usó las dos raíces.

Sobre las ecuaciones indeterminadas, por ejemplo de la forma

$by = ax \pm c,$

Aryabhata I dio una solución, mediante un método que se llamó kuttaka. Brahmagupta estudió y dio soluciones en enteros racionales a las ecuaciones:

$ax^2 \pm c = y^2$

$ax^2 + 1 = y^2.$

A una versión de esta última ecuación Euler le dio crédito a un matemático inglés llamado John Pell, que llamó "ecuación de Pell". El método de Brahmagupta usado alrededor del 600 d.C. se suele atribuir a Euler (theorema elegantissimum).

Jayadeva en los alrededores del 1 000 dio un método general para resolver ecuaciones de ese tipo. El mismo fue refinado por Bhaskara 100 años despúes. Se parece al "método cíclico inverso" con fracciones continuas del que se ocuparon muchos matemáticos europeos tiempo después (Fermat, Euler, Lagrange, Galois).

Es interesante que Bhaskara dio solución a la ecuación

$61x^2 + 1 = y^2$ para x y y mínimos:

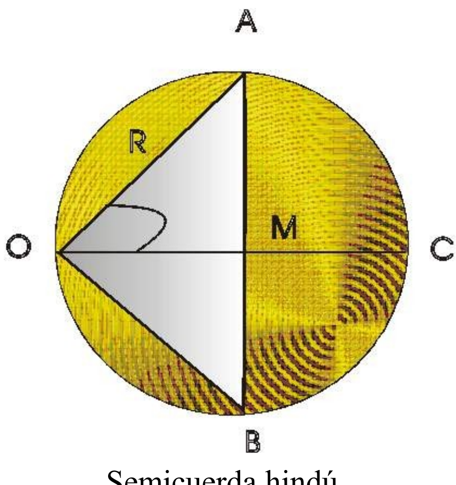
$x = 226\ 153\ 980$ y $y = 1\ 766\ 319\ 049$.

Este problema fue planteado a manera de reto por Fermat a uno de sus amigos, Frénicle de Bessy en 1 657. Sería resuelto por Lagrange con otro método. Sin embargo, mientras que la solución de Lagrange necesitaba 21 series convergentes sucesivas de la fracción continua de $\sqrt{61}$, el método de Jayadeva-Bhaskara lo hacía en pocos pasos.

Una de las fuentes de la trigonometría hindú se encuentra en los alejandrinos.

La trigonometría india estaba asociada a la astronomía. Varahamihira las incorpora en su Surya Siddhanta (como en el 400 d.C.) y también lo hace Brahmagupta en Brahma Sputa Siddhanta (como en el 500 d.C.). Pero de manera sistemática lo hace Bhaskara en Siddhanta Siromani.

Los hindúes usaron la semicuerda. Veamos qué quiere decir eso.



Semicuerda hindú.

Las funciones que desarrollaron fueron:

$r\,sen\alpha = AM$, $r\cos\alpha = OM$ y $r - r\cos\alpha = MC$.

Es decir, hay una ligera diferencia con las usuales para nosotros; pero todo se resuelve fácil. ¿Cómo?

Lograron varias relaciones trigonométricas y también desarrollaron tablas de senos de diferentes arcos. Se afirma que las tablas hindúes tuvieron origen en los babilonios, fuente de la que también se benefició Ptolomeo.

En el 665, Brahmagupta dio una fórmula de interpolación para calcular los senos de ángulos intermedios con base en una tabla. Se dice que la fórmula es equivalente a la fórmula de Newton-Stirling para diferencias de segundo orden.

También, un par de siglos después, el astrónomo Govindaswami (alrededor 800 - 850) ofreció una regla de interpolación de segundo orden para poder calcular valores intermedios de la función, que se podría considerar era un caso particular de la fórmula de interpolación de Newton-Gauss. Posteriormente, hubo desarrollos de senos y cosenos con expresiones parecidas a las series de Taylor para el segundo orden.

8.4 La escuela de Kerala

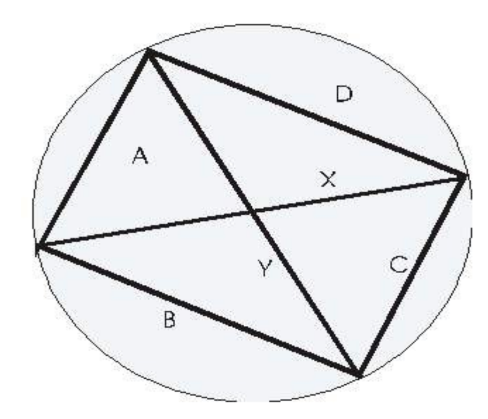
Kerala es un territorio en el suroeste de la India. En la década de 1 940, investigadores hindúes, con Rajagopal al frente, retomaron un artículo escrito en 1 835 por Charles Whish, en el que se afirma la existencia de importantes resultados en las matemáticas de Kerala, que formaron toda una escuela. Cuatro obras señalaba Whish que eran las claves para la astronomía y las matemáticas: Tantra Samgraha (Nilakantha), Yuktibhasa (Jyesthadeva), Karana Paddhati (Putumana Somayaji) y Sadratnamala (Sankara Varman).

Estas obras incluían, según Whish, cálculo infinitesimal, series de Gregory y Leibniz para la tangente inversa, series de potencias de Leibniz para π y la de Newton para el seno y el coseno (atribuidas a Madhava). Además, aproximaciones racionales a funciones trigonométricas: la serie de Taylor, entre ellas. Estos últimos resultados obtenidos sin usar el cálculo infinitesimal.

Las series infinitas de π, al parecer, estaban asociadas a la astronomía. Igual con los desarrollos para las funciones trigonométricas. Es decir: para obtener tablas cada vez más precisas para utilizar en los cálculos astronómicos. Tal era la precisión que Madhava obtuvo valores correctos hasta la posición decimal 8 o 9. Esto sería obtenido por los europeos 200 años después. Para algunos autores recientes, sus trabajos podrían considerarlo el fundador del análisis matemático.

En la India existen otros temas matemáticos de interés. Por ejemplo, el estudio de series aritméticas por medio de diagramas. Esta aproximación geométrica permitía ofrecer cierto grado de convencimiento de los resultados.

También hicieron trabajos con cuadriláteros inscritos en círculos (cuadrilátero cíclico). Ya Brahmagupta había ofrecido algunos resultados. Consideremos la siguiente figura.



Semisumas y diagonales del cuadrilátero cíclico.

Esos resultados se pueden poner de la siguiente manera:

Sea $S = \frac{1}{2}(A+B+C+D)$. Entonces:

El área del cuadrilátero es = $\sqrt{(S-A)(S-B)(S-C)(S-D)}$

$X = \sqrt{\frac{(AB+CD)(AC+BD)}{AD+BC}}$ y $Y = \sqrt{\frac{(AD+BC)(AC+BD)}{AB+CD}}$.

Por medio de estos cuadriláteros cíclicos, la escuela de Kerala encontró las relaciones:

$\text{sen}^2 A - \text{sen}^2 B = \text{sen}(A+B)\,\text{sen}(A-B)$ y

$\text{sen}A\,\text{sen}B = \text{sen}^2 \frac{1}{2}(A+B) - \text{sen}^2 \frac{1}{2}(A-B)$.

Por otra parte, tanto Aryabhata I y Brahmagupta introdujeron el concepto de movimiento instantáneo. Usaron, por ejemplo, la fórmula:

$u' - u = v' - v \pm e \times (\text{sen}\, w' - \text{sen}\, w)$,

donde u, v, y w son la longitud verdadera, media y anomalía media en un momento, u', v' y w' las mismas cantidades después de un momento, e es la excentricidad de la máxima ecuación de la órbita.

Manjula (930 d.C.) y Bhaskara ampliaron estos resultados. Este último obtuvo lo que se puede decir era:

$d(\text{sen}\, w) = \cos w\, dw$.

Estos trabajos fueron ampliados por la escuela de Kerala.

Con estos elementos podemos afirmar que las matemáticas hindúes tuvieron un desarrollo considerable, en algunos casos adelantándose en siglos a los europeos. Sin embargo, todavía no están claras todas las conexiones y puentes entre hindúes y europeos. Pero hay una que sabemos que fue decisiva: los árabes.

8.5 Biografías

Brahmagupta

Brahmagupta nació en el año 598, posiblemente en Ujjain, India. Su padre fue Jisnugupta.

Escribió importantes trabajos acerca de matemáticas y astronomía. Dos de sus trabajos más importantes fueron Brahmasphutasiddhanta, escrito en el año 628 y Brahmasphutasiddhanta, escrito en el año 665 a la edad de sesenta y siete años.

Fue el director del observatorio de Ujjain, el primer centro matemático de la antigua India, en donde grandes matemáticos como Varahamihira trabajaron ahí y luego construyeron importantes escuelas astronómicas.

Murió en el año 670 en India.

8.6 Síntesis, análisis, investigación

1. ¿Qué eran los Sulbasutras?
2. ¿Qué es la razón áurea? Explique qué tiene que ver con la figura llamada Sriyantra.
3. ¿Cuál es el periodo jainista de las matemáticas hindúes?
4. Explique las características más relevantes del álgebra hindú.
5. ¿Cuál fue la Escuela de Kerala? Explique algunas de sus realizaciones.
6. Estudie con cuidado el siguiente pasaje.

   "Bhaskara murió a finales del siglo XII, y durante varios siglos a partir de esa fecha fueron muy pocos los matemáticos de estatura comparable que aparecieron en la India. Es interesante, sin embargo, hacer notar aquí precisamente que Srinivasa Ramanujan (1887 - 1920), el genial matemático hindú del siglo xx, tenía la misma habilidad manipuladora en aritmética y en álgebra que nos hemos encontrado en Bhaskara. El matemático inglés G. H. Hardy cuenta que en una de sus visitas a Ramanujan cuando éste estaba hospitalizado en Putney, le comentó a su amigo enfermo que había llegado en un taxi con-el anodino número 1 729, a lo que contestó sin dudarlo Ramanujan que este número era realmente un número interesante, ya que es el mínimo número natural que puede representarse de dos maneras distintas como suma de dos cubos, $1^3 + 12^3 = 1\ 729 = 9^3 + 10^3$. En la obra de Ramanujan encontramos también el aspecto desorganizado, la potencia del razonamiento intuitivo y el desprecio por la geometría que aparecían de manera tan relevante en sus predecesores. Aunque es posible que estas características se desarrollaran quizá en Ramanujan de una manera especial por su formación autodidacta, no podemos por menos que observar lo sorprendentemente distinto que fue el desarrollo de la matemática en la India de como lo había sido en Grecia. Incluso cuando los hindúes adoptaron conocimientos tomados de sus vecinos, reestructuraron estos materiales a su peculiar manera. A pesar de que sus actitudes e intereses estaban más próximos a los de los chinos que a las de los griegos, no compartieron la fascinación que sentían estos últimos por los métodos exactos de aproximación, tales como los que conducen al método de Horner, y a pesar también de que compartían con los mesopotámicos un punto de vista preponderantemente algebraico, tendieron a evitar el sistema de numeración sexagesimal en álgebra. En resumen, los eclécticos matemáticos hindúes adoptaron y desarrollaron solamente aquellos aspectos que les atraían y, desde un cierto punto de vista al menos, puede decirse que fue desafortunado el hecho de que su primer amor haya sido la teoría de números en general y el análisis indeterminado en particular, porque el crecimiento y desarrollo posterior de la matemática no iba a surgir de esos campos; la geometría analítica y el cálculo infinitesimal tuvo raíces griegas y no hindúes, y el álgebra europea moderna provenía de los países árabes más bien que de la India. Hay, sin embargo, en la matemática moderna al menos dos cosas que nos recuerdan lo que debe la matemática a la India en su desarrollo, lo mismo que a tantos otros países. La trigonometría de la función seno proviene verosímilmente de la India, y nuestro sistema de numeración actual para los enteros recibe con toda propiedad el nombre de sistema hindú-árabe para indicar su probable origen en la India y su divulgación a través de

Arabia." [Boyer, Historia de la matemática, p. 289]

Investigue sobre la vida de Ramanujan. Escriba una reseña de ésta. Investigue y describa qué es el método de Horner. Explique las características diferentes que señala Boyer entre las matemáticas griegas y las hindúes. Comente el balance que hace este autor sobre los límites de las matemáticas hindúes. Utilice la información que suministramos en este libro.

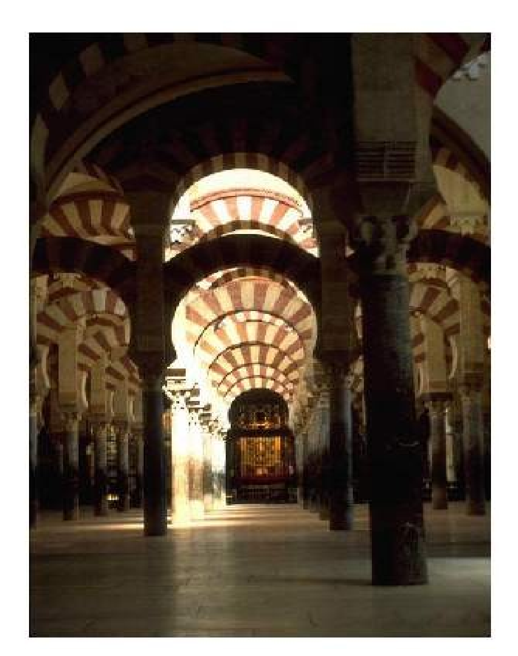
CAPITULO IX

EL INFLUJO ÁRABE



A pesar de un primer momento de conquista, violenta y brutal, los árabes construyeron un imperio relativamente tolerante con las otras creencias religiosas, etnias, y con una valorización positiva de la cultura.

9.1 La cultura árabe



Gran Mezquita de Córdoba, España.

Dos dinastías de califas son nuestra primera referencia para entender un poco de esta historia: Omeyas y Abasíes. Los primeros fueron destronados de Bagdad por los segundos en el 750. No obstante, Abderramán restableció el poder de los Omeyas en España, con su centro Córdoba. Se afirma que los Abasíes eran más abiertos y cosmopolitas. En el 762 la capital se trasladó a Bagdad (por el concurso de Almanzor).



Al-Battani.

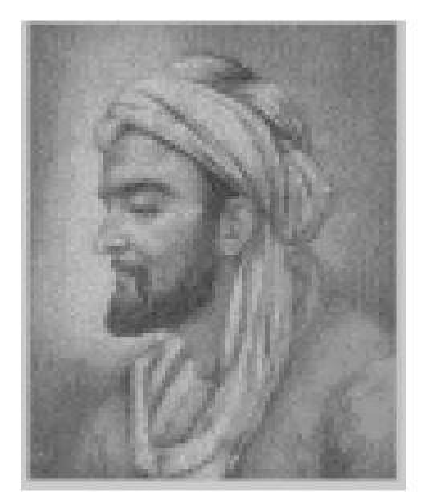
Los gobernantes islámicos en Bagdad se convirtieron en importantes puntos de apoyo para el aprendizaje y el conocimiento. Con los califas Harum el-Rashid y su hijo Almamun se construyó una biblioteca, un observatorio y un instituto para la traducción e investigación. Buscaban reconstruir la antigua Alejandría.

Se puede afirmar que Bagdad integró tradiciones diferentes con una mentalidad abierta. Un hecho sin precedentes.

De manera consciente, los islámicos recolectaron y tradujeron múltiples manuscritos griegos, persas, hindúes, babilónicos. Pero, más que eso, estimularon fuertemente la actividad científica. Al-Kindi, con el apoyo de los gobernantes islámicos, fue una figura clave en la constitución de una nueva filosofía islámica; también, se conoce por un importante trabajo en óptica.

Un contemporáneo un poco más joven, al-Battani, fue un importante astrónomo que realizó su trabajo en Bagdad, en el observatorio.

Otros eminentes científicos fueron los matemáticos Thabit ibn Qurra (c. 836 - 901 d.C.), Abu'l Wafa en y Ibn al-Haytham (965 - 1039). Los trabajos de este último tuvieron influencia en Roger Bacon y Johann Kepler. Al-Haytham usó la teoría geométrica de resolución de ecuaciones algebraicas en la óptica.



Avicena.

En la medicina se desarrollaron compendios por al-Razi (c. 1 149 - 1 209 d.C.) y por Ibn Sina (Avicena). Estos trabajos tuvieron una gran influencia en Europa al final de la Edad Media y en el Renacimiento.

Ibn Sina también escribió sobre matematicas (lo que a veces se desconoce), y en su obra Kitab al-shifa hizo aritmética. Además de distinciones entre números y operaciones aritméticas, incluye reglas novedosas sobre sumas de enteros.

También fue importante un texto de Jabir ibn Hayyan, quien fue el primero que introdujo la alquimia en Europa.

La ciencia y filosofía islámicas emergieron en gran parte como respuesta a la idea de que la naturaleza contiene signos, y que desenterrar tales signos acerca al creyente cada vez más a Dios. Es decir, el conocimiento era un instrumento al servicio del fin religioso. O sea, afirma una posición que, para la época, era tremendamente progresiva. Es decir, se trata de un dispositivo filosófico en busca de una reconciliación de la fe y la razón. Sin lugar a dudas, tareas semejantes se impondría el cristianismo en la Edad Media.



Gran Mezquita de Córdoba, España.

No obstante, también se dieron, ya desde el siglo X, reacciones religiosas contra la filosofía y la ciencia y este equilibrio de pulsiones culturales. Se puede mencionar como parte de esta reacción los nombres de al-Razi, alrededor del siglo X, o de Ibn Rushd (Averroes), en el siglo XII. Este tipo de reacciones religiosas racionales estuvo presente en la decadencia del Islam en Occidente; proceso que podemos rastrear desde el siglo XII. Esta decadencia supuso estancamiento y declinación en la ciencia y la filosofía. En la parte oriental del mundo islámico, sin embargo, la vitalidad se extendió hasta el siglo XV.



Averroes.

Recapitulando. Lo primero que debe subrayarse aquí, son los extraordinarios recursos culturales a los que tuvo acceso el mundo musulmán. Por diferentes vías, estableció diversos puentes con los resultados de la civilización griega. Por ejemplo, no solo establecieron contacto con los griegos del Imperio Bizantino, sino que los árabes controlaron las escuelas de Antioquía, Emesa, Damasco, la de los Nestorianos en Edessa y además varios monasterios cristianos de la región. Es decir, los árabes tuvieron acceso a la cultura y a los intelectuales del Imperio Bizantino, Siria, Persia, Egipto y establecieron contactos decisivos con la India.

9.2 Las matemáticas árabes

Debe subrayarse que la cultura científica y matemática bajo dominio musulmán fue desarrollada por intelectuales provenientes de diferentes pueblos: persas, judíos, griegos, cristianos, etc., eso sí escrita en árabe.

Sus fuentes en cuanto al conocimiento griego fueron manuscritos propiamente griegos o versiones sirias y hebreas. Obtuvieron las obras fundamentales de Aristóteles, Apolonio, Arquímedes, Diofanto, Herón y las tradujeron al árabe. Por ejemplo, los Elementos de Euclides fueron obtenidos de los bizantinos alrededor del año 800 y la obra astronómica de Ptolomeo, el Almagesto, a la cual ellos dieron precisamente ese nombre, en el año 827. En realidad se mencionan dos fuentes:

"Los árabes adquirieron el conocimiento de la ciencia griega a partir de dos fuentes. La mayor parte de ella la aprendieron de los griegos del Imperio bizantino, pero también la adquirieron, de segunda mano, de los cristianos nestorianos de habla siríaca de Persia oriental. Los cristianos nestorianos, desde su centro de Jundishapur, tradujeron durante los siglos VI y VII un importante número de obras griegas científicas -sobre todo de lógica y de medicina- al siríaco, que había reemplazado al griego como lengua culta del Asia occidental desde el siglo III. Después de la conquista árabe, Jundishapur continuó siendo durante un tiempo el primer centro científico y médico del Islam, donde cristianos, judíos y otros súbditos de los califas trabajaban en la traducción de textos del siríaco al árabe. Damasco y Bagdad se convirtieron también en centros de este tipo de trabajo, y ya en el siglo IX se hacían en Bagdad traducciones directas del griego al árabe. En el siglo X casi todos los textos de la ciencia griega que luego se conocieron en Occidente estaban traducidos al árabe." [Crombie, A.C.: Historia de la ciencia. De San Agustín a Galileo siglos V-XIII, pp. 44-45]

Los árabes introdujeron y mejoraron los símbolos del sistema numérico hindú y la notación posicional. También usaron los irracionales de la misma forma que lo hicieron los hindúes. Esto debe enfatizarse: Omar Khayyam (1048 - 1122) y Nasir-Eddin (1201 - 1274) afirmaron con toda claridad que las razones de magnitudes, conmensurables o inconmensurables, podían ser llamadas números. Resulta interesante, sin embargo, que aunque ellos conocían el uso de los números negativos y sus reglas de operación, introducidas por los hindúes, aún así los rechazaron. Con esto ya tenemos un primer retrato de la cultura islámica. Vamos ahora a entrar en mayor detalle en las matemáticas.

Se mencionan dos tradiciones en la astronomía y las matemáticas en Bagdad. Una con base en las fuentes persas e indias, que subrayaba una aproximación algebraica en las matemáticas, y también presente en las tablas astronómicas, y con una motivación práctica. En esa tradición se coloca al-Khwarizmi. Otra tradición con énfasis en las matemáticas helenísticas, que subrayaba la geometría y los métodos deductivos. Su figura emblemática: Tabit ibn Qurra. Ambas tradiciones se llegarían a fundir, lo que se podrá apreciar en el trabajo de Omar Khayyam y al-Kashi.

Al-Khwarizmi

Vamos a empezar por Abu Jafar Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (c. 825). Escribió sobre aritmética, álgebra, astronomía y geografía.



al-Khwarismi, en una estampilla.

Escribió en el 830 el libro: Hisab Al-jabr w'al-muqabala, que se traduce como Cálculo por restauración y reducción. También: Algorithmi de numero indorum (Cálculo con números indios).

Al traducirse al latín en el siglo XII, el primer libro quedó con el título de Ludus algebrae et almucgrabalaeque. Y aquí se redujo a álgebra. Este libro integra las tradiciones babilónicas, griegas e indias.

Los trabajos algebraicos de al-Khwarizmi se basaron en los resultados de Brahmagupta pero reflejan, también, influencias babilonias y griegas directamente (por ejemplo, de Diofanto).

El segundo libro, Aritmética, sirvió para introducir a los europeos en el sistema numérico posicional de la India. Incluye un tratamiento sistemático de las operaciones de la aritmética. Fue el primer libro traducido del árabe, y hay un detalle interesante: popularizó la palabra "algoritmo", que proviene del apellido del autor, para referirse a procedimientos sistemáticos de cálculo. Y se quedó para la historia. Se afirma que los números indios llegaron a Bagdad en el 773 por medio de una misión diplomática hindú.

El documento más antiguo en Europa con la numeración india se llama Codex Vigilanus y entró por España en el año 976. De hecho, está hoy en un museo de Madrid.

Al-Khwarizmi construyó tablas astronómicas que tuvieron influencia por 500 años, con base en las tradiciones babilónicas, indias y helenísticas.

Su obra Imagen de la Tierra se considera la más importante de la geografía desde la obra de Ptolomeo.

Al-Khwarizmi señaló 6 tipos de ecuaciones:

$$bx = ax^2$$

$$bx = c$$

$$ax^2 = c$$

$$ax^2 + bx = c$$

$$bx + c = ax^2$$

$$ax^2 + c = bx,$$

con a, b, c números enteros positivos.

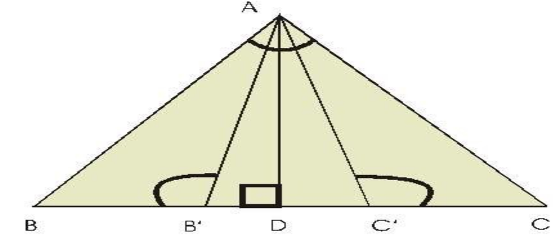
Ofreció en todos los tipos de ecuaciones procedimientos para resolverlas; algunas veces, dio algún fundamento lógico. Por ejemplo, en el caso del tipo 4, ofreció el método que normalmente se llama "completar cuadrados".

A la par de las consideraciones algebraicas, al-Khwarizmi buscó su fundamento téorico en la geometría. Es decir, construía figuras geométricas para mostrar la evidencia del aserto algebraico. Eso sí, usaba ejemplos específicos en su demostración.

Ibn Qurra

Abul Hassan Thabit ibn Qurra Marwan al-Harrani hizo trabajos en trigonometría esférica, una prueba del teorema de Pitágoras, medidas de parábolas y paraboloides, y sobre números "amigos". Se considera el mejor geómetra del mundo islámico.

La generalización del teorema de Pitágoras es un resultado interesante que no se descubrió sino hasta el año 1 953 en Turquía.



Generalización del Teorema de Pitágoras, por ibn Qurra.

Los ángulos $AB'B$ y $AC'C$ y BAC son iguales por construcción. Entonces:

$$AB^2 + AC^2 = BC \times (BB' + CC').$$

Aunque no aparece una prueba por ibn Qurra en el texto que se preserva, no es difícil demostrar el resultado usando las propiedades de los triángulos semejantes. ¿Cómo?

Aquí hay un asunto polémico. Se especula que John Wallis pudo haber estado al tanto de este resultado árabe cuando, en el año 1 685, publicó este mismo teorema como suyo en el libro Treatise on angular Sections.

A diferencia de al-Khwarizmi, volvemos al uso de la geometría en el álgebra; ibn Qurra hizo una demostración general en la que introdujo dos teoremas de Euclides.

Esta integración de álgebra y geometría, unificaba las dos tradiciones del pensamiento matemático, y abrían el camino al álgebra moderna.

Omar Khayyam

Existe consenso entre los historiadores de las matemáticas en que la figura en este terreno más importante fue Abdul-Fath Umar ibn Ibrahim al-Kayyami, Omar Khayyam. Dio reglas para resolver ecuaciones cuadráticas y un método para la resolución de ecuaciones cúbicas con raíces reales, en la tradición de al-Kwarizmi. Ofreció algo parecido al triángulo de Pascal para los coeficientes del binomio. También, intentó una demostración del postulado de las paralelas de Euclides.



Omar Khayyam.

Ahora bien, una de sus más importantes contribuciones en la geometría fue una extensión de la teoría de las proporciones de Euclides. Trabajó la dimensión algebraica de esta teoría para extender el concepto de número de tal manera que pudiera incluir a los números irracionales positivos.

En lo que se refiere a la resolución de las cúbicas, usó un método geométrico para resolver ecuaciones de tercer grado con raíces positivas. Estudió 19 tipos de ecuaciones cúbicas, algunas de las cuales las pudo reducir a cuadráticas. Las restantes 14 las resolvió por medio de secciones cónicas. Un ejemplo de esto último:

Consideremos:

$x^3 + ax^2 + b^2x + c = 0$, con a, b, c mayores que 0. Procedamos a usar la sustitución $x^2 = 2dy$. La ecuación queda:

$$2dxy + 2ady + b^2x + c = 0.$$

Esta es la ecuación de una hipérbola. Como la ecuación con la que hicimos la sustitución es una parábola, la solución de la cúbica es la intersección de la hipérbola y la parábola.

Debe entenderse, sin embargo, que todo esto se hacía sin el arsenal de simbolismo que posee el álgebra moderna.

La utilización de las secciones cónicas y de la geometría para encontrar soluciones fue el gran aporte de este matemático insigne.

Otros resultados

Al-Kashi en la segunda mitad del siglo XIV dio una aproximación para π con 16 decimales correctos por medio de circunscribir en un círculo un polígono con 3×2^{28} lados. Su libro Miftah al-hisab, 1 427, se dice que es uno de los mejores compendios de la aritmética y el álgebra árabes hasta su tiempo. En esta La clave del calculista hace un tratamiento completo de los métodos aritméticos, incluso con fracciones decimales.

Las fracciones decimales habían aparecido por primera vez en una obra de Abul Hassan al-Uqlidisi del año 952 o 953: El libro de los capítulos sobre la aritmética india. Este conocía el método para multiplicarlas por enteros. Sin embargo, al-Kashi en el siglo XV dio el tratamiento completo a las operaciones con decimales.

Trigonometría

La contribución árabe a la trigonometría nos la reseña Bell de la siguiente forma:

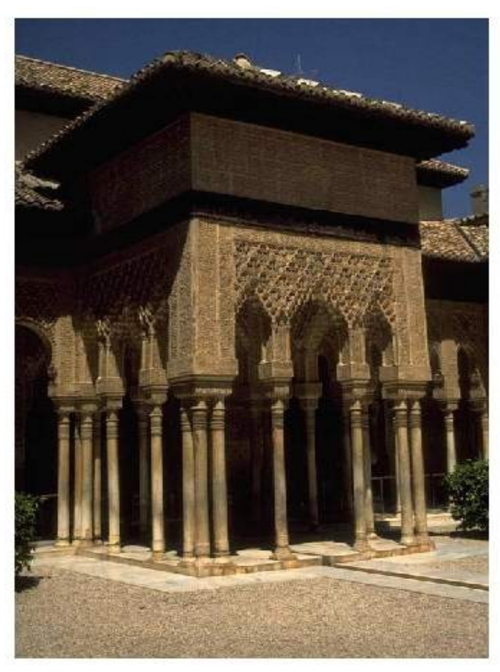
"Los árabes adoptaron y desarrollaron la trigonometría hindú. El primer progreso notable se debió al astrónomo Al-Battani (muerto en el 929), en el siglo IX. Si bien en realidad no fue el primero que aplicó el álgebra en lugar de la sola geometría a la trigonometría, este astrónomo matemático fue el primero que dio un gran paso en esa dirección. Usó además del seno hindú, la tangente y la cotangente. En el siglo X se calcularon tablas de estas dos últimas, y también hicieron su aparición la secante y la cosecante como razones trigonométricas. Por estar el concepto de función todavía unos 600 años en el futuro, nada en su obra se parece mucho a la trigonometría elemental de hoy día." [Bell, E.T.: Historia de las matemáticas, p. 112.]

De hecho, la función seno fue traída de la matemática india se supone que a través de un texto de astronomía india Surya Siddhanta. También $r\operatorname{sen}\alpha$ y $r - r\operatorname{sen}\alpha$ fueron incorporadas de los hindúes. Las funciones tangente y cotangente sí son de origen árabe.

Abul Wafa había realizado un estudio sistemático de las 6 funciones trigonométricas, y en particular dio las relaciones:

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \operatorname{sen}\beta.$$

El interés en la trigonometría por parte de los árabes se vio potenciado cuando entraron en contacto con las tablas de los hindúes. De hecho, la finalidad básica era mejorar la exactitud de éstas. Un ejemplo notable es el de al-Kashi que calculó el valor de $60\operatorname{sen}1^{\circ}$ con una exactitud de 16



decimales, usando un método iterativo que aparece en su libro Risala al-watar wa'l-jaib (se traduce como Tratado sobre la cuerda y el seno), y que suponía la resolución de ecuaciones de tercer grado.

Alhambra, Patio de los Leones, Granada, España.

9.3 Un balance

Es importante poner énfasis en la relación privilegiada entre árabes y griegos, por ejemplo, en su resolución de ecuaciones algebraicas cuadráticas. A pesar de la perspectiva más aritmética y algebraica de los hindúes, con la cual estaban familiarizado los árabes, al-Khwarizmi introducía justificaciones geométricas. Está claro: asumieron en cierta forma la influencia griega.

En relación con la geometría, las principales influencias fueron Euclides, Arquímedes y Herón. Fue Nasir-Eddin quien realizó una sistematización de la trigonometría plana y esférica, la cual no sería conocida por los europeos sino hasta el año 1 450.

Algunos historiadores de las matemáticas opinan que para los árabes las matemáticas no poseían el significado que tenía para los griegos, como parte del objetivo global y edificante de hacer inteligible el mundo, sino, más bien, como un mecanismo para ampliar su dominio sobre la naturaleza. También, se suele afirmar que la contribución árabe se redujo a preservar más que ampliar las matemáticas griegas e hindúes y transmitirlas a Europa.

El influjo de los árabes terminaría en una sucesiva colección de hechos que van desde los ataques de los cruzados, la conquista por los mongoles y la destrucción realizada por los tártaros, y, tiempo después, en España, su derrota por los cristianos.

A pesar de la opinión bastante generalizada de algunos expertos, la realidad es, sin embargo, según demuestran más recientes investigaciones, que los árabes en muchos campos extendieron significativamente el conocimiento recibido de los griegos y los hindúes. No fueron solo compiladores mecánicos del acervo de otra civilización, tampoco fueron un simple puente para el desarrollo de las ciencias en Europa.

Durante siglos, una visión eurocentrista ha dominado buena parte de las opiniones sobre el desarrollo cultural y científico de la humanidad, en particular, con una subestimación de las contribuciones de pueblos ajenos a Europa occidental. El caso de los árabes es uno de ellos. Afortunadamente, en los últimos tiempos hay una revalorización que ha permitido visualizar la historia de Occidente de una manera diferente, en particular de las ciencias y las matemáticas.

Algunos de los elementos que en las matemáticas son indiscutiblemente construcciones diferentes de las griegas, son, para empezar, la notación posicional en base 10, el uso de números negativos y de números irracionales, afirmados explícitamente como números, un álgebra con letras y operaciones.

Los resultados hindúes y árabes permitieron construir un fundamento más avanzado para el álgebra que el que se tuvo en la Antigüedad Griega. Por ejemplo, con el uso de símbolos de una manera más sistemática, una profundización en el estudio de las ecuaciones indeterminadas, en las ecuaciones de tercer grado, y, sin duda, un progreso en la trigonometría.

Se debe subrayar, además, que, los árabes, al aceptar el uso de los números irracionales de una manera extensiva hacían posible dar valores numéricos a los segmentos de recta y a todas aquellas figuras geométricas que en la Antigüedad Griega tuvieron que ser limitadas a magnitudes cualitativas.

La práctica de resolver ecuaciones algebraicas por un lado y luego, por el otro, realizar justificaciones geométricas, un "paralelismo" de estas dos disciplinas, se debe interpretar como un valioso fundamento para lo que luego se llamaría la geometría analítica.

Aquí, por último, es necesario hacer un comentario general. Tanto los hindúes como los árabes utilizaron la aritmética y el álgebra sin prestar demasiado cuidado a las demostraciones deductivas como los griegos en la geometría. Los árabes eran conscientes de estas características de la matemática griega y estaban plenamente familiarizados con los requerimientos de la demostración axiomática. Sin embargo, privilegiaron la aproximación práctica presente en la aritmética, el álgebra, y en la formulación algebraica de las relaciones trigonométricas. Es decir, el énfasis en estas disciplinas, carentes de la demostración axiomática y deductiva de la geometría sintética, revela una visión, ideología y actitud diferentes en estas civilizaciones, más orientadas hacia

necesidades prácticas que requieren un tratamiento cuantitativo, y que se proporciona mejor con la aritmética y el álgebra. Aunque los árabes y los hindúes eran conscientes, hasta cierto punto, de esta ausencia de fundamentos lógicos en la aritmética y el álgebra, enfatizaron estas disciplinas a través de la intuición y la heurística, dejando para luego las correcciones y justificaciones lógicas. Esto permitió un gran desarrollo del álgebra y la aritmética, lo que sería un componente esencial para los desarrollos científicos y matemáticos de Europa occidental.

Dos tradiciones se heredaron en las matemáticas occidentales. Por un lado, los objetos y métodos de la geometría clásica griega, con sus virtudes y sus debilidades, y, por el otro lado, esta tradición cultural y científica que retomó las contribuciones egipcias y babilonias, algunos resultados de los matemáticos alejandrinos en la aritmética y el álgebra, y los desarrollos en estos campos de los hindúes y los árabes. Esto dos componentes desarrollarían una dialéctica y encontrarían una magnífica síntesis en las mismas culturas islámicas, pero en el mundo europeo, con precisión, en la geometría analítica y, posteriormente, en el cálculo diferencial e integral.



9.4 Biografías



Abu Ja'far Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi

Abu Al-Khwarizmi nació alrededor del año 780 en Bagdad, Irak. Han sido muchas las interpretaciones que se le han dado a su nombre, al parecer indica que procede de Khwarizm, al sur del Mar Aral en Asia central o de Qutrubbull, un distrito entre el Tigris y Eufrates no lejos de Baghdad.

Al-Khwarizmi junto con otros colegas pertenecientes al Banu Musa, eran parte de los sabios que asistían a la Casa de la Sabiduría en Bagdad. Ellos eran los encargados de la traducción de varios escritos científicos griegos. Además, juntos estudiaron álgebra, geometría y astronomía.

Al- Khwarizmi trabajó bajo la tutela de Al-Mamum y sus tratados de álgebra y astronomía se los dedicó a él. De los dos tratados el que se considera de mayor importancia es el tratado de álgebra por dos razones: fue el primer libro que se escribió acerca del álgebra y en el que por primera vez se resolvían problemas de la vida cotidiana.

En ese mismo libro, expone los números naturales, y da la solución a seis tipos de ecuaciones. Tuvo una gran influencia de los Elementos de Euclides en la realización de sus tratados.

Se le conoce como el padre del álgebra.



Al-Sabi Thabit ibn Qurra al-Harrani

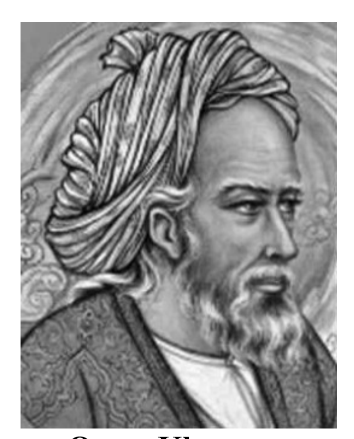
Thabit ibn Qurra nació en el año 826 en Harran, Mesopotamia. Heredó una gran fortuna familiar y su familia mantenía una alta posición en su comunidad. Perteneció a la secta religiosa Sabian. Ellos adoraban la estrella Harran. De esta secta sobresalieron muchos astrónomos a lo largo de su existencia.

Muhammad ibn Musa ibn Shakir visitó Harran y quedó impresionado por el potencial de Thabit, así que lo persuadió de ir a Bagdad y tomar lecciones de matemáticas con él y su hermano.

Posteriormente, obtuvo el puesto de astrónomo en Bagdad, su jefe era el Califa Al-Mu'tadid, uno de los grandes califas del 'Abbsid.

Tradujo y revisó muchos trabajos griegos al árabe. Escribió ocho tratados acerca de astronomía, uno de los más famosos fue Acerca del Movimiento de la Octava Esfera. También escribió otros estudios en mecánica y filosofía.

Murió el 18 de febrero del año 901 en Bagdad.



Omar Khayyam

Omar Khayyam nació el 18 de mayo de 1 048 en Nishapur, Persia, Irán. Su nombre completo era Ghiyath al-Din Abu'l-Fath Umar ibn Ibrahim Al-Nisaburi al-Khayyami. El significado de su nombre tiene relación con la profesión de su padre, el cual era comerciante.

Durante el siglo XI, tribus turcas invadieron Asia y establecieron un imperio en el que Siria,

Palestina y la mayor parte de Irán fueron controladas. Durante 1 038 y 1 040 conquistaron todo Irán. Se trató de establecer un estado ortodoxo musulmán en momentos en que la inestabilidad militar era notable, Omar tuvo que crecer en este ambiente.

Estudió filosofía en Naishapur y a pesar de que era considerado genio, su situación era difícil sin apoyo político. Fue un excelente matemático y astrónomo y a pesar de las dificultades que tenía, antes de cumplir los veinticinco años, ya había escrito varios trabajos, entre ellos: un libro de aritmética, uno de música y otro de álgebra.

En 1 070, se mudó a Samarkand en Uzbekistán, en donde fue respaldado por Abu Tahir, un jurista prominente. En 1 073, recibió una invitación de parte de Malik-Shah, el gobernante de la ciudad, para instalar un observatorio en Esfahan, el que mantuvo por dieciocho años.

En 1 118, Omar dejó Esfahan y viajó a Merv, en donde escribió muchos de sus trabajos matemáticos. Además de matemático, es famoso por su afición a la poesía, escribió alrededor de ciento veinte versos.

Murió el 4 de diciembre en Nishapur, Persia, Irán.



Abu Ali al-Husain ibn Abdallah ibn Sina (Avicena)

Ibn Sina nació en al año 980 en Kharmaithen, Asia Central, Uzbekistán. Se le conoce también por su nombre en Latín: Avicenna.

Su vida fue marcada fuertemente por un gran periodo de inestabilidad política, se encontraba en el poder la Dinastía Samanid. Cuando ibn Sina nació, Nuh ibn Mansur era el Sultán en Bukhara. Su padre, era el gobernador en uno de los pueblos que Nuh ibn Mansur controlaba. Fue educado por su padre, a la edad de diez años. Memorizó el Corán y la mayoría de la poesía árabe que había leído. A los trece años inició sus estudios en medicina y tres años después ya atendía pacientes. También estudió lógica y metafísica.

Dos hechos que cambiaron su vida fueron: el derrocamiento de la Dinastía Samanid y la muerte de su padre. Entonces, se trasladó a Irán, en donde se estableció como médico oficial. Se le forzó a esconderse debido a sus antagonismos políticos y estuvo además en prisión. Después de salir de prisión, se trasladó en 1 022 a Ispahán, en donde trabajó como consejero científico y médico del príncipe. Fue aquí donde vivió los últimos años de su vida y escribió muchos trabajos sobre filosofía, medicina y acerca del lenguaje árabe. Se le conocen además, trabajos en psicología, geología, matemáticas, astronomía y lógica.

Murió en junio de 1 037 en Hamadan, Persia, Irán.

Abu Kamil Shuja ibn Aslam ibn Muhammad ibn Shuja

Abu Kamil Shuja nació alrededor del año 850 posiblemente en Egipto.

Es conocido como “al-Hasib al-Misri”, que significa calculadora. Es reconocido por su aporte al avance del álgebra. Al parecer fue uno de los sucesores directos de al-Khwarizmi a quien atribuía ser el “inventor del álgebra”.

Sus estudios, fueron la base para los libros de Fibonacci, lo que fue fundamental en la introducción del álgebra a Europa. Además se cree que influyó en la elaboración de dos textos de álgebra de al-Karaji.

Murió alrededor del año 930.

9.5 Síntesis, análisis, investigación

1. En un libro de historia general, investigue acerca del nacimiento y desarrollo de la cultura islámica. Haga un resumen de unas tres páginas.
2. ¿Cuáles fueron los puntos de partida culturales que permitieron a los árabes adquirir y expandir el conocimiento y la ciencia?
3. ¿Cuáles dos tradiciones se pueden mencionar en las matemáticas y astronomía de los árabes? Explique.
4. Describa los asuntos de que trataban los libros de álgebra y aritmética escritos por al-Khwarizmi.
5. Demuestre la generalización del teorema de Pitágoras hecha presumiblemente por ibn Qurra.
6. Resuma algunos de los aportes de Omar Khayyam a las matemáticas.
7. Comente las características del álgebra y la aritmética de los árabes con relación o en comparación con la geometría griega clásica.
8. Lea cuidadosamente la cita que sigue.

   "La aproximación árabe a las matemáticas fue ayudada, sin dudas, en los primeros años, por la existencia de una tensión creadora entre los 'algebristas' y los 'geómetras', cuyos personajes más representativos fueron al-Khwarizmi y Thabit ibn Qurra, respectivamente. Cada grupo permaneció abierto a las influencias del otro grupo, como se ve en la aproximación geométrica de al-Khwarizmi a la resolución de las ecuaciones cuadráticas y el descubrimiento de Thabit de una regla para generar números amigos. Conforme se desarrollaron las matemáticas árabes, el trabajo sobre geometría 'pura', como, por ejemplo, los intentos de demostrar o modificar el postulado de las paralelas de Euclides, continuó en paralelo con el desarrollo de ingeniosos métodos numéricos para extraer raíces y resolver ecuaciones de orden superior. Ciertamente, la principal razón de por qué las modernas matemáticas se han separado tan sustancialmente del espíritu y métodos de las matemáticas griegas fue la intervención de los árabes. Quizá, si las lecciones de los árabes hubiesen sido

asimiladas antes, y si las obras de las figuras principales de las matemáticas árabes como Omar Khayyam y Thabit ibn Qurra hubiesen sido mejor conocidas de lo que lo fueron, entonces el período de dolorosa transición y de naturaleza monótona de algunas matemáticas medievales podría haberse evitado." [Joseph, George G.: La cresta del pavo real, p. 463]

Explique cuál es la valoración que realiza el autor sobre el papel de los árabes en las matemáticas.

9. Estudie el siguiente texto con cuidado. ¿Qué comparación señala el autor entre las matemáticas griegas y las árabes? ¿Qué quiere decir que hubiera 2 geometrías diferentes?

"No se puede negar que la aproximación griega a las matemáticas produjo algunos resultados notables, pero ello estorbó el desarrollo ulterior del tema. Los puntos fuertes de la aproximación griega se han discutido ampliamente; cualquier libro estándar sobre la historia de las matemáticas trata el asunto, de modo que tiene poco sentido volver de nuevo sobre ello. Pero el efecto limitante del modo griego de pensamiento es otra cuestión. La preocupación griega por la geometría, hasta la infiltración de las influencias babilónicas y egipcias en el periodo helenístico posterior, fue una grave constricción. Grandes mentes como Pitágoras, Euclides y Apolonio gastaron gran parte de su tiempo creando lo que fueron, esencialmente construcciones abstractas e ideales; cómo llegaran a una conclusión era, en algunos aspectos, más importante que cualquier significación práctica. Existieron en la práctica dos geometrías diferentes coexistiendo a la vez: la geometría `pura' de los griegos, cuya validez se determinaba totalmente por su consistencia y coherencia internas, y la geometría aplicada de otras tradiciones matemáticas, cuya validez se juzgaba exclusivamente por su capacidad para describir la realidad física. (Es interesante especular lo que un Euclides, que había asimilado la aritmética y el álgebra de los babilonios y sintonizaba con su aproximación analítico-algebraica a la geometría, podría haber creado con su particular manera de razonamiento deductivo.) El Cónicas de Apolonio parecía un producto de una geometría abstracta griega que no necesitaba más refinamiento. Sólo con la aparición de los árabes se rescataron las obras de la época y se les dio una nueva orientación. Sin embargo, los pioneros de las modernas matemáticas en el período posrenacentista se vieron obligados a experimentar a veces un distanciamiento doloroso de la aproximación geométrica griega que sus predecesores habían aceptado demasiado fácilmente, careciendo como carecía del fermento del espíritu árabe." [Joseph, George G.: La cresta del pavo real, pgs. 464-465]

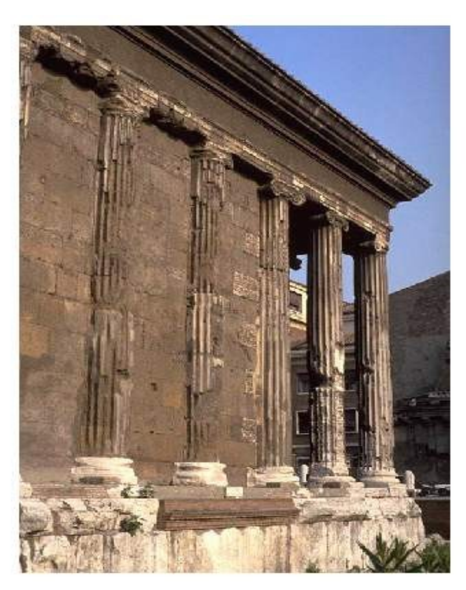
¿A qué se refiere con "distanciamiento doloroso"? Comente brevemente la opinión del autor.

CAPITULO X

LA EDAD MEDIA EUROPEA



La cultura y ciencia alejandrinas se fueron muriendo lentamente por varias razones. Ahí estaban las debilidades de una geometría basada estrictamente en criterios deductivos reduccionistas, y la ausencia de una vinculación con el álgebra y la aritmética, disciplinas ellas mismas que se habían visto debilitadas por el dominio de visiones ideológicas y filosóficas. La influencia de Oriente en el mundo occidental con los alejandrinos provocó apenas el despertar de una perspectiva diferente. Había un reclamo por nuevos métodos. También hay que añadir, aparte de la reducción de las esferas de éstas disciplinas centrales de las matemáticas, una notación tremendamente difícil que impedía en sí misma, por ejemplo, un progreso mayor en la aritmética. La astronomía, por otro lado, exigía el concurso de nuevos instrumentos de observación.



Arquitectura romana.

No vamos a hablar aquí de la biología, la física, la medicina o la química, pero el curso de decadencia o la restricción de ritmos de progreso fue general. Pero hay que poner en todo esto un énfasis en tres factores sociales que jugaron, de formas diferentes, en contra de la ciencia: los romanos, el cristianismo y la Iglesia Católica.

En lo que sigue vamos a dar unas pinceladas de lo que fue la vida matemática en la Europa posterior a la cultura alejandrina hasta llegar al salto que representó el Renacimiento, muchos siglos después



10.1 Romanos

Los romanos habían conquistado Grecia para el año 150 a.C. y Mesopotamia en el 64 a.C.. Para el año 31 a.C. controlaban definitivamente también Egipto. Con la división del Imperio Romano en dos partes, realizada por el emperador Teodosio, la historia romana vivió dos evoluciones distintas: la parte occidental fue conquistada por los godos en el siglo V después de Cristo, mientras que la oriental se mantuvo más o menos independiente hasta el año 1 453 cuando fue conquistada por los turcos.

Una de las primeras dificultades que deben mencionarse aquí refiere a las condiciones políticas férreas, ausencia de espacios de libertad, que conspiraron contra el pensamiento, inevitablemente, y por ende contra la ciencia.

Aunque los romanos incorporaron mucho de la cultura griega no usaron o veían de reojo la ciencia griega. La civilización romana era esencialmente utilitaria, y esto fue decisivo. En lo que se refiere a la cosmología, expresó poco interés. Y mucho menos aun por las ciencias matemáticas de Grecia; tal vez la única excepción fueron algunas aplicaciones que podían hacerse en la ingeniería.

Ofrecieron, no obstante, algunas obras de tipo enciclopédico. Un ejemplo fue el trabajo realizado por Varro, que ofreció fundamentos para la clasificación medieval del conocimiento y sistemas de educación; otro, por Plinio el Viejo, que realizó una compilación extraordinaria de los fenómenos naturales llamada Historia Natural.

Otro escritor científico del periodo romano fue el griego de Pérgamo Galeno (c. 130 d.C). Su recopilación de la anatomía antigua, fisiología y medicina fue relevante para la ciencia europea hasta el siglo XVII.

Srabo de Ponto (63 a.C - 21 d.C.) y Pomponius Mela, quienes trabajaron en Roma, ayudaron a expandir la geografía.

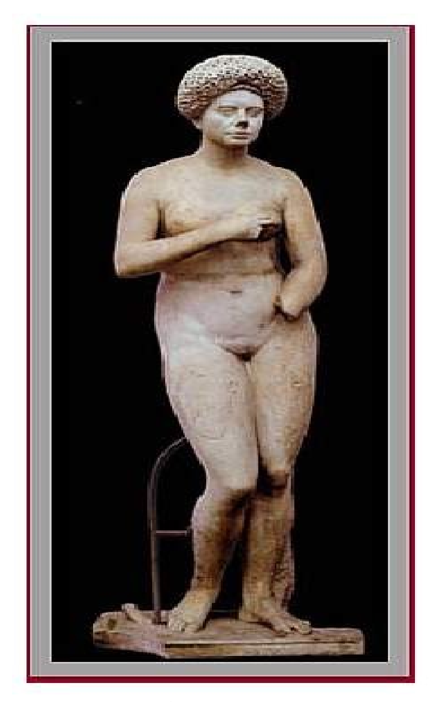
Repetimos: existe una relación entre la declinación de la civilización griega y sus matemáticas y la evolución del Imperio Romano. Vayamos a las matemáticas.

Las matemáticas de los romanos fueron tremendamente simples y solamente tenían importancia en actividades prácticas como la agrimensura y el comercio. Los emperadores romanos no fueron un apoyo para las matemáticas.

Romanos y cristianos se desarrollaron con perpectivas históricas diferentes, aunque convivían; señala Sarton:

"El Imperio romano y el cristianismo nacieron casi al mismo tiempo. En los comienzos del siglo IV, el Imperio romano iba rápidamente hacia la decadencia, en tanto que el cristianismo iniciaba su franca ascensión, y presenciamos la simbiosis del viejo pagano que va lentamente hacia la muerte y del joven cristiano que se prepara para la vida y la conquista." [Sarton, George: Ciencia antigua y civilización moderna, p. 91]

Con el progreso del cristianismo, desde las mismas entrañas del Imperio Romano, se obtuvieron consecuencias desafortunadas para las matemáticas. No solo se prohibió una relación de los cristianos con el aprendizaje del griego, sino que se dieron acciones que ayudaron a destruir la cultura griega. Por ejemplo, cuando en el año 392 Teodosio proscribió las religiones paganas también ordenó que todos los templos griegos fueran destruidos. No solo la arquitectura fue destruida sino, también, fueron eliminados muchos paganos vivientes, entre ellos algunos matemáticos, los libros griegos fueron quemados (por ejemplo, en el templo de Serapis, donde 300 mil manuscritos griegos fueran destruidos), y tiempo después, con Justiniano, las escuelas de filosofía griega fueron cerradas.



Mujer romana.

Además, como dice Bernal:

"El triunfo del cristianismo significó efectivamente que, a partir del siglo VI en el Occidente y hasta el ascenso del islamismo en el Oriente, toda la vida intelectual, incluyendo la ciencia, se vino a expresar ineludiblemente en función de los dogmas cristianos y, con el transcurso del tiempo, acabó por quedar limitada a los eclesiásticos. Entre los siglos IV y VII, en el territorio ocupado por el desaparecido Imperio Romano, la historia del pensamiento es la historia del pensamiento cristiano." [Bernal, John D.: La Ciencia en la Historia, p. 276]

En el año 47 a.C. Julio César al quemar la flota egipcia en Alejandría provocó el incendio de la Biblioteca de Alejandría con más de medio millón de manuscritos, una riqueza cultural incalculable. Al conquistar Egipto, en el siglo VII, los musulmanes destruyeron el resto de libros que habían quedado en Alejandría. Una de las consecuencias fue un éxodo de intelectuales hacia Constantinopla.



Coliseo en Roma, siglo I d. C.

10.2 La Edad Media europea

Se dice que la Iglesia Católica medieval fue ambivalente hacia la ciencia y filosofía griegas. El dilema que enfrentó era cómo definir las fronteras entre la razón y la fe, y cómo integrar el conocimiento científico de la Antigüedad (pagano). Los fundadores de la iglesia católica también eran conscientes de la influencia "corrupta" que las filosofías racionales y los sistemas místicos podían ejercer sobre la nueva religión. San Agustín en el siglo V d.C. ofreció una solución parcial a este problema. No obstante, con las consecuencias de la invasión germana y el colapso del Imperio Romano de Occidente en el siglo V, pospusieron el debate acerca del papel de la ciencia racional pagana en una sociedad cristiana por lo menos por siete siglos.

Mientras la civilizaciones de los egipcios, babilonios, bizantinos, chinos y romanos florecían, la región europea, salvo por Italia y Grecia, estaba constituida por culturas muy primitivas. En los territorios de lo que había sido el Imperio Romano de Occidente, la Iglesia Católica ya había adquirido una gran relevancia política y religiosa. Los bárbaros germanos y godos fueron convertidos al Cristianismo, se establecieron monasterios que usaron algunos pedazos de la enseñanza griega y romana, pero con una orientación dirigida hacia los servicios religiosos y las sagradas escrituras. El origen de escuelas de formación superior, las universidades, se dio sobre todo como producto de las necesidades de formación en el clero.

La ciencia griega, con todo y sus limitaciones, había ofrecido dos metodologías o aproximaciones en la construcción científica y matemática. Por un lado, aquella que subrayaba el papel de la deducción lógica y la reducción a primeros principios. Una visión racionalista, si se quiere. Y, por otra parte, aquella que afirmaba métodos inductivos y heurísticos, que estaban asociados a una influencia de culturas y tradiciones no occidentales, que se puede apreciar muy bien en la ciencia alejandrina. Ambas aproximaciones, sin embargo, se basaban en la razón, la mente como recurso de base. En el mundo cristiano el énfasis, durante siglos, pasó a la fe, fuera de la razón. Y esto fue un auténtico obstáculo para el progreso de las ciencias y el pensamiento en general.



El Vaticano.

Las traducciones

La lengua oficial de la Iglesia era el latín, por lo que fue impuesto al compás de la expansión política y cultural de la misma. De hecho, el latín no solo era la referencia para las escuelas de instrucción sino precisamente en la búsqueda de conocimiento.

Fueron relevantes para la cultura europea las traducciones al latín, y aquí la figura fundamental fue Anicio Manlio Severinno Boecio (c. 480 - 524), que tradujo del griego al latín varias selecciones de tratados elementales de aritmética, geometría, astronomía. Por ejemplo, tradujo fragmentos de los Elementos de Euclides (entre 2 y 5 libros), la Introductio arithmetica de Nicomaco, obras de Aristóteles y una astronomía basada en la obras de Ptolomeo. Se supone que introdujo el término quadrivium, para referirse a la aritmética, geometría, música y astronomía. Crombie reseña la situación:

"La matemática y la lógica del Occidente latino reposaban sobre la obra de Boecio en el siglo VI, quien realizó en este campo lo que Plinio hizo con la Historia Natural. Boecio, además de recopilar tratados elementales sobre Geometría, Aritmética, Astronomía y Música, basados en las obras de Euclides, Nicómaco y Ptolomeo, tradujo las obras de Aristóteles al latín. De estas traducciones solamente se conocieron ampliamente antes del siglo XII las Categorías y el De Interpretatione; hasta esa fecha, las traducciones y comentarios de Boecio fueron la fuente principal para el estudio de la Lógica y de la Matemática. El conocimiento de la Matemática estaba limitado en gran parte a la Aritmética. El único tratado matemático que queda intacto, la llamada Geometría de Boecio, que data de una época no anterior al siglo IX, contenía solamente fragmentos de Euclides y trataba principalmente de operaciones prácticas, tales como la Agrimensura. Casiodoro (hacia 490 - 580), en sus obras populares sobre las Artes Liberales, hizo solamente una exposición muy elemental de las Matemáticas." [Crombie, A.C.: Historia de la ciencia. De San Agustín a Galileo siglos V-XIII, pp. 25-26.]



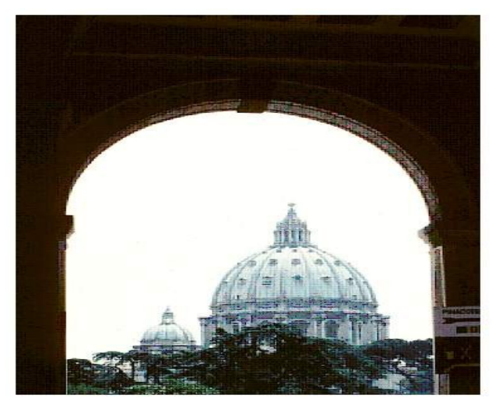
Sarcófago medieval.

Otros de los traductores relevantes fueron Aurelio Casiodoro (c. 475 - 570), Isidoro de Sevilla (c. 560 - 636) y el inglés Beda el Venerable (674 - 735). Durante estos siglos, dado que Europa no poseía un vínculo diferente, como el que hubiera permitido un contacto a través de los árabes, esos traductores fueron el principal puente entre las matemáticas griegas y la Europa medieval. Entre los años 400 y 1 100 las matemáticas europeas fueron totalmente primitivas. Este bajo nivel se debió, en parte, a la forma de vida, valores, y metas definidas por el cristianismo. Las preocupaciones de la época giraban en torno a la vida eterna, las verdades espirituales, la preparación del alma para la otra vida, el paraíso, y asuntos acerca del pecado, el miedo, el infierno, o la salvación. En ese contexto, los métodos para adquirir conocimiento se buscaban esencialmente en el estudio de las santas escrituras.

Un primer "contacto"

El siglo XII fue decisivo para el destino de Europa, para su cultura, ciencia y matemáticas.

Resulta interesante señalar que cuando la ciencia islámica en su parte occidental comenzó a declinar, se empezó a desarrollar en Europa un importante interés en este tipo de asuntos. ¿Por qué? Debe recordarse que en el siglo XI se dio la reconquista cristiana de España y Sicilia. Esto supuso una renovación y revitalización del mundo cristiano. En particular, esto abrió la posibilidad de que los cristianos pudieran absorber una gran cantidad de conocimiento griego y de otras latitudes que había sido preservado por los árabes.



Domo de San Pedro, Vaticano.

Y, además, lo que a veces se olvida, también permitió a los cristianos un contacto con el trabajo original realizado por los musulmanes en los 3 siglos previos, o proveniente de otras tradiciones como las hindúes y babilónicas.

Nuevas influencias penetraron una región que bajo Roma o bajo la Iglesia Católica no propició el progreso de las matemáticas. Los vehículos de la nuevas influencias fueron el comercio, los viajes y las cruzadas. Los europeos toparon con los bizantinos y con los árabes. Y a través de ellos con la civilización griega. De esta forma, los europeos empezaron a entrar en contacto con las obras de Euclides, de Ptolomeo, de al-Khwarizmi así como de Arquímedes, Aristóteles, Herón. ¿Cuáles eran estos textos? Crombie nos hace un excelente recuento:

"A mediados del siglo XII el número de nuevas obras añadidas al tesoro de la cultura europea incluía la logica nova de Aristóteles, esto es, los Analíticos y las otras obras lógicas incluidas en la logica vetus que no existían en la conocida traducción de Boecio, los Elementos, Optica y Catóptrica, de Euclides, y la Pneumatica, de Herón. También es del siglo XII la traducción latina de De Ponderoso et Levi, del pseudo-Euclides, una obra de origen que suministró al Islam y a la Cristiandad occidental el conocimiento de la gravedad específica, de la palanca y de la balanza. En el tercer cuarto del siglo se tradujeron las principales obras de Galeno, Ptolomeo e Hipócrates, cuyas versiones vulgares procedían principalmente de España, y la Física y el De Cælo, otros libri naturales y los cuatro primeros libros de la Metafísica de Aristóteles. A comienzos del siglo XIII se tradujo la Metafísica completa, y alrededor de 1 217 apareció el De animalibus, que comprendía la Historia, Partes y Generación de los animales. Al mismo tiempo se traducía el pseudoaristotélico Liber de Plantis o De Vegetabilibus, que ha sido atribuido modernamente a Nicolás de Damasco, del siglo I a.C., y que, aparte de los herbarios procedentes de Dioscórides y del pseudo-apuleyo, fue la fuente única y la más importante de la botánica medieval ulterior. A mediados del siglo XIII casi todas las obras científicas importantes griegas estaban traducidas al latín." [Crombie, A.C.: Historia de la ciencia. De San Agustín a Galileo siglos V-XIII, pp. 46-47]

Ahora bien, los textos que más influenciaron el pensamiento europeo en esta época fueron los de Aristóteles, pero, debe decirse, fueron introducidos y aceptados de manera poco crítica. Por otro lado, como hemo señalado ya, las ideas griegas fueron integradas por los escolásticos en una doctrina que mezclaba ideas de Aristóteles y de los sagrados evangelios.

En la cosmología, por ejemplo:

"Tras la gradual recuperación del saber griego gracias a la mediación de los musulmanes, los mejores esfuerzos de los cristianos de los siglos XIII y XIV se orientaron a asimilar las tesis físicas y cosmológicas del gran Aristóteles. Al igual que en el siglo IV a. C., el hombre de la Baja Edad Media piensa que ocupa el centro de la gran esfera celeste. A su alrededor estrellas y planetas se desplazan con movimiento uniforme y circular, debido a que están alojados en esferas concéntricas en rotación. El mundo pues es un conjunto de esferas, unas dentro de otras, con un solo centro común a todas ellas. El hecho de ser habitantes del único cuerpo pesado o grave nos garantiza que podamos contemplar el espectáculo celestial estando inmóviles en dicho centro. Si la Tierra es la morada de los seres humanos, las esferas planetarias lo serán de seres angélicos. Todos, ángeles y hombres, tienen su lugar en este cosmos greco-cristiano creado por la voluntad libre y soberana de Dios." [Rioja, Ana y Ordóñez, Javier: Teorías del universo. Volumen I. De los pitagóricos a Galileo, p. 105]

En los tres siglos que siguieron, los europeos a través de sus universidades avanzaron en el estudio de la ciencia pero con gran énfasis en la filosofía y la física de Aristóteles.

Una síntesis, a su manera, de la Edad Media hasta el siglo XIII por Russell:

"En el siglo XIII la Edad Media alcanzó su punto culminante. La síntesis que se había formado, poco a poco, desde la caída de Roma llegó a ser tan completa como era posible. El siglo XIV trajo consigo una disolución de instituciones y filosofías; el siglo XV, el principio de las que aún consideramos modernas. Los grandes hombres del siglos XIII fueron muy grandes: Inocencio III, San Francisco, Federico II y Tomás de Aquino resultaron, en distintos modos, supremos representantes de sus respectivos tipos. Hubo también grandes obras, no tan claramente asociadas con grandes nombres: las catedrales góticas de Francia, la literatura romántica de Carlomagno, Arturo y los Nibelungos, el principio del Gobierno constitucional en la Carta Magna y la Cámara de los Comunes." [Russell, Bertrand: Historia de la Filosofía Occidental, Tomo II, p. 62]

Resumamos. Como a mediados del siglo XIII se produjo una gran síntesis entre la filosofía de Aristóteles y la doctrina cristiana, por medio del trabajo, en efecto, de Santo Tomás de Aquino. Es lo que se llama la Escolástica. Aquí se puso un énfasis en la armonía entre razón y fe, el fundamento de lo que se suele llamar la teología natural. Sin embargo, la autoridad de Aristóteles no fue asumida como absoluta. Por ejemplo, en el mismo año 1 277, no mucho después de la muerte de Aquino, el Arzobispo de París condenó 219 proposiciones que contenían los escritos de Aquino. De hecho, lo que pasó en ese año tuvo implicaciones para la ciencia europea. Crombie lo relata así:

"La interpretación determinista de la doctrina de Aristóteles asociada con los comentarios de Averroes fue condenada por el obispo de París Etienne Tempier en 1 277, y su ejemplo fue seguido el mismo año por el arzobispo de Canterbury Robert Kilwardby. En la medida en que esto afectó a la Ciencia, significó que en la Cristiandad septentrional fue proscrita la interpretación averroísta de Aristóteles. Los averroistas se retiraron a Padua, donde sus ideas dieron origen a la teoría de la doble verdad, una para la fe y otra, quizá contradictoria, para la razón. Esta condenación del determinismo ha sido considerada por algunos estudiosos, en particular por Duhem, como indicador del principio de la nueva ciencia. La doctrina de Aristóteles iba a dominar el pensamiento del final de la Edad Media; pero, con la condenación de la opinión averroista de que Aristóteles había dicho la última palabra en la Metafísica y en la Ciencia Natural, los obispos en 1 277 dejaron el camino expedito para críticas que podían, a su vez, minar su sistema. Los filósofos de la naturaleza no solo tenían ahora, gracias a Aristóteles, una filosofía racional de la naturaleza, sino que, debida a la actitud de los teólogos cristianos, estaban libres para hacer hipótesis sin tener en cuenta la autoridad de Aristóteles, para desarrollar la actitud mental empírica trabajando dentro de un armazón racional y para ampliar los hallazgos científicos." [Crombie, A.C.: Historia de la ciencia. De San Agustín a Galileo siglos V-XIII, p. 67]

Críticas

Debe mencionarse la contribución crítica de algunos escolásticos contra la autoridad aristotélica: Robert Grosseteste (c. 1168 - 1253) y Roger Bacon (1214 - 1294), el Doctor Mirabilis, quienes introdujeron las matemáticas y el método experimental en el territorio de la ciencia y, también, contribuyeron a la discusión sobre la naturaleza de la luz y el color. Bacon era un erudito, el cual

sostenía que, además -por supuesto- de estudiar las sagradas escrituras, las matemáticas y la experiencia era importantes para el conocimiento; en su Opus Majus fue drástico: todas las ciencias requieren matemáticas.

En este escenario se potenció una visión diferente sobre la ciencia: el nominalismo, cuya figura clave fue William de Ockham o Occam (c. 1 300 - 1 349). Esta filosofía fue un instrumento importante para la redefinición de las esferas en las que debían moverse la religión y la ciencia, debate que tuvo un lugar privilegiado posteriormente en el siglo XVII. Es decir, dentro de los mismos escolásticos hubo cuestionamientos importantes con relación a la actitud dogmática y acrítica hacia el pensamiento de Aristóteles. Ockham, también, privilegiaba la experiencia por encima de las construcciones meramente racionales.

Para Russell:

"Al insistir en la posibilidad de estudiar la lógica y el conocimiento humano sin referencia a la metafísica y a la teología, la obra de Occam estimuló la investigación científica. Los agustinianos -decía- erraron al suponer primero las cosas ininteligibles y a los hombres ininteligentes, y añadiendo luego una luz del Infinito por medio de la cual se hacía posible el conocimiento. Coincidió en esto con Aquino, pero difirió en cuanto al acento, pues Aquino era primordialmente un teólogo y Occam era, en lo que se refiere a la lógica, primordialmente un filósofo secular." [Russell, Bertrand: Historia de la Filosofía Occidental, Tomo II: La Filosofía Moderna, p. 95]

Sus sucesores en el Merton College, en Oxford, introdujeron razonamiento cuantitativo y física a través de la noción de movimiento acelerado.

Entre tanto, en París, Jean Buridan y otros más, elaboraron el concepto de ímpetus, que sería importante en los años siguientes.



Oresme.

Oresme, de quien hablaremos varias veces en este libro, introdujo algunas ideas críticas en la astronomía que estimularían, luego, las ideas de Nicolás de Cusa relativas al movimiento de la tierra y el concepto de universo infinito. Todos estos asuntos luego pesarían en la revolución cosmológica copernicana.

10.3 Las matemáticas medievales

Entre los siglos XII y XV se desarrolló cierto nivel de vida matemática. Nuestra primera referencia es Leonardo de Pisa (c. 1 170 - 1 250), más conocido como Fibonacci, quien escribió en el año 1 202 el famoso Liber Abaci (Libro del ábaco). En este libro introdujo los métodos de cálculo hindú con enteros y fracciones, las raíces cuadradas y cúbicas. Tanto en este libro como en el que publicó en 1 225, Liber Quadratorum, estudió el álgebra, aunque usando palabras más que símbolos y basando sus resultados en métodos aritméticos. Ofreció soluciones de ecuaciones determinadas e indeterminadas tanto para ecuaciones de primer y segundo grado como para algunas cúbicas.

En su Practica Geometriae, 1 220, introduce resultados de los Elementos de Euclides y un poco de trigonometría griega. Leonardo se dio cuenta de que en el Libro X no se introducían en la clasificación de irracionales todos ellos, y que las raíces de algunas ecuaciones de tercer grado no podían ser construidas por el método de la regla y el compás.

Otra referencia importante, esta vez en las matemáticas, es Oresme (c. 1 323 - 1 382). En Algoritmus Proportionum (c. 1 360) introdujo cómputos con exponentes fraccionarios. En otros trabajos, De Uniformitate et Difformitate Intensionum y Tractatus de Latitudinibus Formarum, Oresme consideró la razón de cambio, y estableció una forma de representación que se ha llegado a afirmar como precursora de la representación en coordenadas. Ya volveremos a esto. De hecho, también, se le atribuye una contribución al concepto de función y a la representación gráfica de leyes físicas.

Brunschvicg así lo apunta:

"Le Tractatus de Latitudinibus Formarum (cuya influencia fue grande y duradera hasta tal punto que, desde el descubrimiento de la imprenta, cuatro ediciones se sucedieron de 1 442 a 1 515), enseña a representar las variaciones de cualquier magnitud que sea, transportando sobre una superficie plana las líneas de señal que habían sido hasta el momento trazadas sobre una esfera. Los grados del fenómeno natural se describen por la ordenada; y constituyen así lo que Oresme llama latitud de la forma; la longitud, es decir la línea de las abscisas, describe los tiempos correspondientes". [Brunschvicg, Leon: Les etapes de la philosophie mathematique, p. 103.]

Muchos historiadores opinan que la Europa medieval, a pesar de algunas actividades y tendencias culturales o cognoscitivas, difícilmente podría haber realizado por sí misma un progreso sustancial en las ciencias y las matemáticas. Contra eso conspiraban la ausencia de pensamiento libre, el control dogmático de las principales escuelas de formación (que impedía a los profesores e intelectuales la posibilidad de una enseñanza y un pensamiento crítico y científico), la represión institucional de carácter religioso cuyo signo más evidente fue la Inquisición, iniciada por el Papa Inocente III en el siglo XIII.

10.4 Biografías



Leonardo de Pisa (Fibonacci)

Leonardo de Pisa nació aproximadamente en 1 170 en Pisa (Italia). Se le conoce bien por su sobrenombre "Fibonacci" aunque el mismo utilizaba el de "Bigollo" que significa "bueno para nada" o "viajero". Su padre era Guilielmo y pertenecía a la familia Bonacci. Su educación la recibió en África del Norte, donde su padre tenía un puesto diplomático y su trabajo era representar a los comerciantes de la República de Pisa y las relaciones con Bejaia, un puerto mediterráneo. Obtuvo enormes resultados de los sistemas matemáticos extranjeros gracias a que viajó mucho con su padre. Volvió a Pisa alrededor del año 1 200 y escribió varios textos importantes.

A pesar de que se conservaron varios de sus escritos muchos se perdieron.

El emperador del sacro imperio romano Federico II se enteró del trabajo de Fibonacci y lo invitó a su corte. Johannes de Palermo presentó varios problemas al gran matemático a las que dio las soluciones; estas famosas soluciones escritas en matemática recreativa, representadas a menudo como problemas de cuentos, se convirtieron en desafíos clásicos mentales a partir del siglo XIII y se han mantenido hasta hoy.

Murió aproximadamente en el año 1 250 en Pisa (Italia).



Robert Grosseteste

Robert Grosseteste nació en 1 168 en Suffolk, Inglaterra. Sus estudios los realizó en la Universidad de Oxford y se convirtió en rector de esa universidad de 1 215 hasta 1 221. De 1 229 hasta 1 235 fue conferencista en teología y sus conferencias eran dirigidas a los franciscanos.

Se convirtió en obispo de Lincoln de 1 235 hasta el día de su muerte, asistió al Concilio de Lyon en 1 245 y dirigió la congregación papal de Lyon en 1 250.

En relación con las matemáticas, hizo varios estudios en geometría, ópticas y astronomía. En ópticas experimentó con espejos y lentes.

Robert insistía en que cada estudio en donde se tuviese que verificar una teoría, ésta debía ser puesta en experimentación comprobando sus consecuencias.

Tradujo al latín muchas escrituras griegas y árabes e hizo muchos tratados de asuntos científicos. Uno de sus estudiantes mejor reconocidos fue Roger Bacon.

Robert murió el 9 de octubre de 1 253 en Buckden, Buckinghamshire, Inglaterra y cincuenta años después fue beatificado como santo.

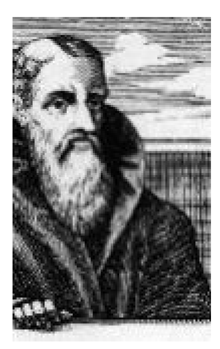
Gerardo de Cremona

Gerardo nació en 1 114 en Cremona, Italia. Después de haber estudiado en su ciudad natal, Gerardo considera que la educación europea era deficiente y es por este razonamiento que el resto de su vida la dedicaría a traducir al latín las grandes obras árabes, ya que eran consideradas de gran importancia.

Se trasladó a Toledo para aprender árabe, y se puede decir que casi toda su vida vivió en España. En un periodo de cuarenta años, tradujo alrededor de ochenta trabajos del árabe al latín. No todos estos trabajos fueron matemáticos, muchos fueron de ciencia general o medicina. Pero en su mayoría lo más importante que tradujo Gerardo fueron trabajos de astronomía, geometría y otras ramas de las matemáticas. Además tradujo el Almagesto de Tolomeo, lo que para él fue su tarea más importante.

Poseía una reputación de hombre de gran aprendizaje que se ganó justamente dando conferencias públicas.

Murió en 1 187 en Toledo, España.



Anicius Manlius Severinus Boethius

Anicius Boethus (Boecio) nació alrededor del año 480 en Italia, Roma. Provenía de la familia Anicii, pero en el año 487 a los siete años de edad, su padre quien había sido elegido cónsul murió y a partir de allí, fue criado con la familia aristocrática de Quintus Aurelius Memmius Symmachus. Recibió una excelente educación basada en la filosofía Griega. Se casó con Rusticiana, la hija de

Symmachus y tuvieron dos hijos, quienes siguieron el ejemplo de su padre con altos puestos públicos en el año 522.

Aprovechando sus estudios, trabajó en escritos y traducciones. Su escrito en aritmética se basó en el trabajo de Nicómaco. Una de sus metas, fue la de traducir y comentar todas las obras de Platón y Aristóteles, con el fin de demostrar que ambos coincidían en su pensamiento. Este fue un proyecto que nunca pudo finalizar. Durante el Siglo XII, sus escritos y traducciones fueron los principales trabajos en lógica en Europa. Fue la cabeza del gobierno y los servicios de corte del Rey de Italia Theodoric. En el año 520, trabajó para unir las iglesias de Roma y Constantinopla. Se le acusó de traición al rey y fue encarcelado y acusado además, de practicar magia y sacrilegio. Fue condenado a muerte junto a su suegro quien trató de defenderlo.

Murió en el año 524 en Pavía, Italia.

Adelardo de Bath

Adelardo de Bath nació en el año 1 075 en Bath, Inglaterra. Estudió en Tours en la Loire Valley en Francia. Años después, enseñó en Laon, en la región norte de Francia. Cuando dejó Laon, viajó alrededor de siete años, visitando primero Salerno al sureste de Nápoles. Después de ahí, viajó a Sicilia, país que para ese entonces mantenía una gran influencia de la tradición arábica. Luego visitó Cilicia, un antiguo distrito del sur de Anatolia, hoy Turquía.

Es posible que haya visitado España en algún momento de su vida, debido a que tuvo acceso a textos hispanos-arábigos, que más tarde traduciría. Escribió varios trabajos sobre filosofía, aunque su mayor dedicación fue la de traducir los textos árabes. Tradujo al latín los Elementos de Euclides en tres diferentes versiones, así como las tablas de al-Khwarizmi, alrededor del año 1 126.

Murió en el año 1160.

10.5 Síntesis, análisis, investigación

1. Investigue. Haga una breve reseña de la historia de Roma hasta el siglo V d.C. ¿Qué fueron las guerras "púnicas"? Describa la diferencia entre falange y legión en la historia militar. ¿Qué quiere decir victoria "pírrica"? Consiga un mapa histórico y ubique el Imperio romano de Occidente y el Imperio romano de Oriente.
2. Describa las principales características de la cultura y las matemáticas durante el periodo de los romanos.
3. Describa la principal contribución de Boecio a la cultura.
4. Investigue. Haga una breve reseña de la Edad Media en Europa. Explique brevemente qué era el feudalismo.
5. Compare la ciencia en el contexto dado por el poder de la Iglesia Católica y el cristianismo en Europa Occidental, y aquella en la civilización griega.
6. Explique qué era la Escolástica: el escenario histórico, el objetivo fundamental, los protagonistas, etc. Consulte bibliografía adicional.
7. Investigue: ¿qué es el nominalismo? ¿Qué es la navaja de Occam?
8. Resuma la obra de Leonardo de Pisa.
9. ¿Cuál era la posición de Averroes con relación a las ideas de Aristóteles?
10. Lea cuidadosamente el siguiente texto.

    "En nuestra educación tradicional, se ha fijado tanto la atención en la historia del Imperio Romano y, especialmente, en su porción occidental, que estamos dispuestos a pensar en una destrucción general de la civilización, ocurrida entre los siglos III y IX. En realidad, todo lo que sucedió fue que en las partes más recientes y artificialmente civilizadas del mundo antiguo -Gran Bretaña, Francia, la región renana, España e Italia-, se derrumbó el sistema de gobierno de una clase de ricos patricios y campesinos propietarios de esclavos, el cual fue sustituido gradualmente por un orden feudal que tenía más amplia base, aunque fuese incoherente. Las invasiones de bárbaras que acompañaron este cambio, fueron un resultado del mismo y no su causa.

    Mientras tanto, en otras partes del Imperio Romano sobrevivieron indemnes algunas grandes ciudades -como Alejandría, Antioquia y Constantinopla- en las cuales se mantuvo un gobierno ordenado, aunque cada vez más limitado. Más allá de los límites del Imperio Romano, en todo el inmenso territorio que desde las conquistas de Alejandro se encontraba bajo la influencia helenística -incluyendo Persia, la India y el Asia Central- la civilización siguió floreciendo y desarrollándose, sin las rígidas limitaciones económicas, técnicas, artísticas y científicas de la antigua cultura clásica. Las grandes épocas de los sasánidas en Persia (226 - 637 n.e.), de los guptas (320 - 408) y los chalukyas (550 - 750) en la India, y de los reinos menos conocidos de los korasmianos en el Asia Central (400 - 600) corresponden al periodo comprendido entre los siglos III y IX que llamamos época del oscurantismo, como si, porque conocemos muy poco de lo ocurrido en una Europa

occidental apenas parcialmente civilizada, una gran oscuridad cubriera entonces al mundo entero. Más todavía, la China, bajo las dinastías Wei (386 - 549) y Tang (618 - 906), gozó de un periodo de desenvolvimiento económico y cultural sin precedentes." [Bernal, John D.: La Ciencia en la Historia, p. 266]

Explique las ideas principales de este texto. Haga un comentario de acuerdo a la información que ha consultado en este libro.

11. Estudie el siguiente texto.

"Durante la primera mitad del siglo XIV se desarrolló una importante escuela de Astronomía también en Oxford, en especial en el Merton College. Uno de los resultados del trabajo allí realizado fue el desarrollo de la trigonometría. Las tangentes fueron usadas por John Maudit (1 310) y Thomas Bradwardine (muerto en 1 349), y por Richard de Wallingford (hacia 1 292 - 1 335), quien tomó los métodos aproximados usados en la trigonometría de las Tablas toledanas de al-Zarqali y les aplicó los métodos rigurosos de demostración de Euclides, John Maudit y Richard de Wallingford son los iniciadores de la trigonometría occidental, aunque un tratado importante sobre este tema fue escrito en hebreo en la misma época en Provenza por Levi ben Gerson (1 288 - 1 344) y traducido al latín en 1 342. Una mejora técnica importante adoptada por estos escritores fue utilizar la práctica indoárabe, que se encontraba ya en las tablas de al-Zarqali y otras tablas astronómicas muy conocidas entonces, de basar la trigonometría plana en los senos y no en las cuerdas, como se hacía en la antigua tradición grecorromana desde Hiparco. Richard adoptó también las Tablas alfonsinas para Oxford e inventó ciertos instrumentos, por ejemplo, un complicado rectangulus para medir y comparar alturas y un equatorium perfeccionado para mostrar la posición de los planetas." [Crombie, A.C.: Historia de la ciencia. De San Agustín a Galileo siglos V-XIII, p. 94]

Comente los resultados obtenidos por estos científicos, su vínculo con el influjo islámico, y cómo se integran dentro de la perspectiva intelectual general de la Edad Media.

12. Comente con cierto detalle el balance que hace Crombie en el siguiente texto sobre las técnicas medievales en Europa. Complete su comentario utilizando bibliografía adicional sobre la historia de la Edad Media. Compare con la visión de Bernal que incluimos en la cita de arriba.

"Desde alrededor del siglo X hubo, sin embargo, una mejoría progresiva del saber tecnológico en la Cristiandad occidental. Esto fue motivado, en parte, por el aprendizaje de las prácticas y obras (a menudo de origen clásico) de los mundos bizantino y árabes, y en parte, por una lenta, pero progresiva actividad de invención e innovación en la misma Cristiandad occidental. Los avances realizados durante la Edad Media no se perdieron nunca; y es una característica de la Cristiandad medieval el que se aplicara a uso industrial artificios técnicos que habían sido conocidos por la sociedad clásica, pero que apenas había utilizado o los había considerado como juguetes. El resultado fue que, ya en el 1 300, la Cristiandad occidental estaba utilizando muchas técnicas o desconocidas o no desarrolladas en el Imperio romano. Hacia el año 1 500, los países más avanzados de Occidente eran, en muchos aspectos de la técnica, superiores significativamente a cualquier sociedad anterior." [Crombie, A.C.: Historia de la ciencia. De San Agustín a Galileo siglos V-XIII, pp. 172]

CAPITULO XI

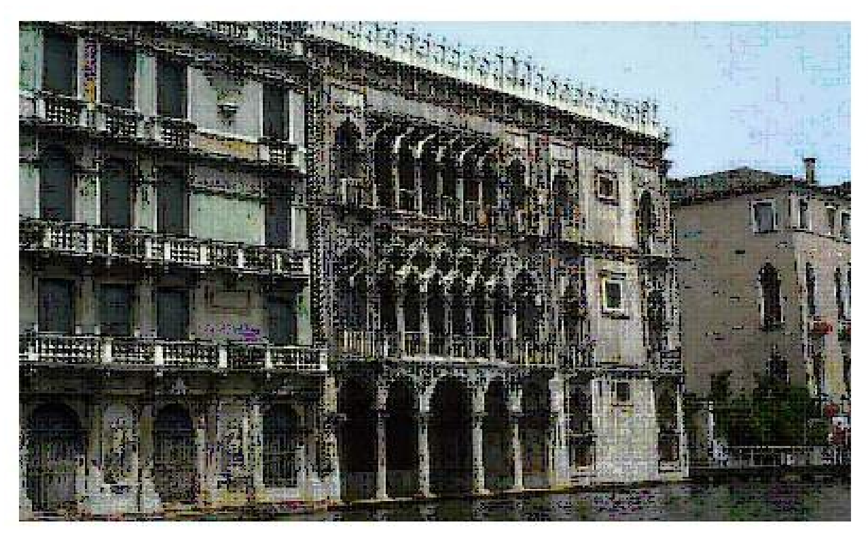
MATEMÁTICAS EN EL RENACIMIENTO



La nueva sociedad emergió de una combinación de factores, entre los cuales el cambio de perspectivas culturales fue decisivo.

11.1 En el camino hacia una nueva sociedad

El Renacimiento fue un movimiento intelectual y social que arrancó primeramente en la península italiana, especialmente en Venecia, Génova, Milán y Florencia. Fue relevante que estas ciudades se hubieran hecho independientes tanto en lo político como en lo económico. Podemos decir que se llegó a un equilibrio con el poder de la Iglesia Católica centrado en la ciudad de Roma.



Ca' d'Oro, Venecia, vista desde el Gran Canal, 1 422-1 440 d. C.

Afirmó un punto de vista moderno, pero contradictorio en varios aspectos. Bien lo señala Russell:

"El punto de vista moderno, como opuesto al medieval, comenzó en Italia con el movimiento llamado Renacimiento. Al principio, sólo unos pocos individuos, especialmente Petrarca, tenían ese criterio, pero durante el siglo XV se extendió a la gran mayoría de los italianos cultivados, tanto seglares como eclesiásticos. En algunos aspectos, los italianos del Renacimiento -con excepción de Leonardo y unos cuantos más- no tenían el respeto por la ciencia que ha caracterizado a la mayoría de los innovadores importantes desde el siglo XVII; con esta deficiencia está asociada su liberación tan parcial de la superstición, especialmente en cuanto a la astrología. Muchos de ellos conservaban aún el respeto por la autoridad que habían tenido los filósofos medievales, pero sustituían la autoridad de la Iglesia por la de los antiguos. Era, sin duda, un paso hacia la emancipación, puesto que los antiguos disentían unos de otros y era preciso el juicio individual para decidir cuáles de ellos habían de seguir. Pero muy pocos italianos del siglo XV se hubieran atrevido a sostener una opinión para la que no se hubiera podido hallar una autoridad, bien sea en la Antigüedad o en la doctrina de la Iglesia." [Russell, Bertrand: Historia de la Filosofía Occidental, Tomo II: La Filosofía Moderna, p. 115]

Un proceso múltiple

Este movimiento, sin embargo, se extendió por Europa. Por ejemplo, en Alemania así como en otros países el mismo se asoció a la búsqueda de la independencia religiosa y nacional. Una de sus consecuencias más importantes fue la reforma luterana. Permitió abrir vías a un cambio de las estructuras sociales y cognoscitivas dominantes, un camino para el cuestionamiento de la autoridad, un fundamento para el progreso de las ciencias. Esta reforma se desarrolló en varios países: Francia, los Países Bajos, Gran Bretaña, bajo la forma de lo que se suele llamar calvinismo. ¿Consecuencias? El poder y la autoridad de la Iglesia Católica se debilitaron de muchas maneras; esto potenciaba las posibilidades de cambios políticos y sociales y, por supuesto, culturales y cognoscitivos.

Se puede decir que tanto el Renacimiento como la Reforma, así como otras transformaciones políticas relevantes en la época, son partes de un solo proceso.

Cambios intelectuales y técnicos

Alrededor del siglo XV, se multiplicaron los contactos de los europeos con los trabajos griegos, a través de los bizantinos, quienes poseían la colección más grande de documentos griegos. Fue debido a la caída de Constantinopla, en 1 453, que muchos intelectuales de Europa oriental emigraron hacia el oeste, y en sus manos traían conocimiento de los manuscritos griegos y los mismos en muchos casos. Se desarrollaron importantes vínculos, visitas, entre italianos, por ejemplo, y los bizantinos, algunos inventos contribuyeron a una expansión de este desarrollo cognoscitivo: la imprenta, el uso de papel de lino y algodón en sustitución del papiro.

En buena medida, el Renacimiento encontró en la Antigüedad Griega Clásica nutrientes intelectuales importantes. En primer lugar, una preocupación por la naturaleza y el ser humano que definió una perspectiva vitalista y humanista. En segundo lugar, los nuevos elementos permitían una crítica del mundo intelectual y dominado por la escolástica y aquellos aspectos del pensamiento aristotélico, la lógica formal y la especulación abstracta, que fueron decisivos para ese tipo de pensamiento.

Mencionemos algunos elementos de este período que son relevantes para el progreso del conocimiento. Uno de ellos fue, a través del progreso de las artes técnicas, una cierta disminución de la separación entre las tradiciones eruditas y artesanales, algo dominante en la época medieval. Al avance de los tejidos, la minería, la metalurgia y también la vidriería, debe añadirse el progreso de las artes plásticas, que condujo a importantes avances en torno a la perspectiva, la anatomía, y la descripción misma de la naturaleza. Hay otros cambios importantes tanto en las matemáticas (estimulados por la necesidades militares y técnicas) y en la filosofía (un énfasis a mayor en las causas eficiente y material y no tanto en las finales del pensamiento aristotélico).



Cañones y proyectiles.

También, debe mencionarse, el influjo ocasionado por las nuevas rutas comerciales en los mundos descubiertos, que abrían un horizonte diferente en la perspectiva social y cultural. Además, algunas de los adelantos y logros económicos comerciales que se van a dar en esta época van a ser factores importantes para una traslación de los ejes nacionales de mayor desarrollo en Europa occidental. Por ejemplo, el papel relativo de la península italiana cedió terreno ante los progresos, por diferentes razones, tanto en España y Portugal, sobre todo en los Países Bajos e Inglaterra.

Desde el punto de vista social fue relevante la presencia de trabajadores o empleados pagados, artesanos libres, y una clase mercantil, cuya importancia se tradujo en el impulso de exploraciones geográficas alrededor de los siglos XV y XVI.

Debe subrayarse: la imprenta logró que estos libros y documentos estuvieran disponibles; múltiples ediciones y traducciones revolucionaron la cultura y la ciencia.

Georg von Peuerbach inició la traducción del Almagesto, por ejemplo. Regiomontano la completó.

Un ejemplo de estos cambios técnicos y su influencia es la primera edición impresa de los Elementos de Euclides en latín (realizada por Johannes Campanus) que apareció en Venecia en 1 482. También, los cuatro libros de las Secciones Cónicas de Apolonio, las obras de Pappus, la Arithmética de Diofanto y otras.

En el mismo sentido tuvo importancia la introducción de la brújula y la pólvora, que, respectivamente, permitieron la navegación mar adentro y nuevos elementos en los métodos para la guerra. Este tipo de elementos técnicos empujaba hacia la astronomía, el diseño de fortificaciones, los proyectiles, trayectorias, etc.

A los progresos que se dieron en la minería, la manufactura, el comercio y la agricultura, que exigían desarrollos técnicos adicionales, debe añadirse el desarrollo de nuevas líneas económicas y comerciales: todo un contexto que generaba importantes cambios políticos y sociales.

Debe subrayarse en este escenario el papel jugado por las técnicas asociadas a la navegación. Sin duda, el descubrimiento de América y otras rutas comerciales potenció métodos y demandas en la navegación. De una manera directa, sobre la astronomía. No es extraño, entonces, que haya sido en la astronomía y en la cosmología donde se debatió en sus inicios buena parte de las perspectivas y posibilidades de la ciencia moderna en sus inicios.

Debe decirse que las universidades de los siglos XV y XVI no jugaron un papel relevante en el desarrollo de los nuevos conocimientos, sobre todo porque estaban orientadas hacia el estudio de la teología, en donde, en buena medida, se consideraba el conocimiento completo y definitivo; la experimentación no era necesaria.

Se desarrolló una actividad realizada por los llamados humanistas que trató de establecer una crítica de las obras griegas y romanas que se había incorporado en el firmamento ideológico sobre todo a partir de los escolásticos. En el siglo XVI, sobresale entre ellos el italiano Gerolamo Cardano (1501 - 1576) que escribió sobre matemáticas, astronomía, astrología, medicina, astrología y muchos otros temas.

Ideas y actitudes nuevas

Lo más importante del Renacimiento puede decirse que fue una reforma profunda de ideas y actitudes frente a la sociedad, el hombre y el mundo. Una crítica del pasado que abría caminos novedosos en el presente y sobre todo de cara al futuro. En el Renacimiento fue significativa la presencia de influencias de otras culturas, como las árabes y chinas, aparte de los nuevos elementos extraídos de la Antigüedad Griega, así como el escenario político, económico y técnico que se había ido tejiendo en Europa occidental.



Venus y Marte, de Boticelli.

Es evidente que la existencia de una gran cantidad de datos geográficos, astronómicos, biológicos, por ejemplo, empujaba hacia una nueva visión de la realidad, que entraba en contradicción con el escenario intelectual de la época anterior. Por ejemplo, se empezó a dar un énfasis en el conocimiento de la naturaleza, el disfrute del mundo físico, el progreso de la mente y el cuerpo, la libertad del pensamiento, y, muy especialmente, un énfasis en las posibilidades de la mente humana. En general, se promovía una actitud humanista. Entonces, desde el comienzo del siglo XIV podemos señalar una ruptura con la forma de pensamiento y las actitudes anteriores donde sus ejes temáticos eran colocados por la ideología dominada por la Iglesia Católica. Por ejemplo, Dios, las almas, la salvación, etc. El nuevo énfasis orientado hacia el individuo, la vida terrenal, el ser humano, propició transformaciones importantes en toda las actividades culturales y, en particular, en las ciencias.

Una combinación específica de factores, internos y externos, políticos, culturales, económicos, técnicos, cognoscitivos, abrieron camino hacia la construcción de una nueva forma de sociedad.

11.2 Las matemáticas del Renacimiento

Sin duda fue más difícil el ingreso en Europa de trabajos matemáticos que aquellas obras de literatura, filosofía o de ciencias naturales. Por ejemplo, la complejidad o dificultad de textos griegos como los de Euclides o Arquímedes hacía más difícil que se pudiera apreciar el valor de estas obras. Por eso, aun con traducciones de los clásicos ya realizadas, se requirió mucho mayor

tiempo y otros trabajos adicionales para que esas obras pudieran ser apreciadas en su justa magnitud. En buena medida, los aspectos que más se tocaron fueron los más elementales de las matemáticas.

Las nuevas actitudes empujaron hacia una descripción cuantitativa del universo; sin embargo, esta etapa histórica y cultural no produjo grandes logros en las matemáticas. La importante, sin embargo, estaba en las condiciones sociales y culturales y más generales que servirían como un pivote y una plataforma importante para el progreso del conocimiento, las técnicas, las matemáticas.

Con Bell:

"El siglo XVI estuvo igualmente cuajado de grandes cosas para el futuro de la matemática. Los nombres de Leonardo de Vinci (1 452 - 1 519), Miguel Angel (1 475 - 1 564), y Rafael (1 483 - 1 520), tres de los mejores entre una pléyade, nos recordarán lo que esta época crítica, del siglo de Copérnico (1 473 - 1 543), fue en arte; paralelamente los de Torquemada (1 420 - 1 498), Lutero (1 483 - 1 546), Loyola (1 491 - 1 556) y Calvino (1 509 - 1 564) pueden sugerir lo que fue en los aspectos más elevados de la vida. Cardano (1 501 - 1 576) publicó (1 545) su Ars magna, la suma de los conocimientos en álgebra de aquella época, solo dos años después de que Copérnico recibiera en su lecho de muerte las pruebas de imprenta de su revolucionario De revolutionibus orbium coelestium." [Bell, E.T.: Historia de las matemáticas, p. 121]

Con el influjo de las obras griegas, conocimiento y valores, se potenció el interés en las matemáticas. En el siglo XV, una de las principales influencias fueron las obras de Platón: el diseño matemático de la naturaleza, que incorporaba las características de armonía, verdad y belleza. La naturaleza es descrita entonces a través de leyes inmutables dentro de una comprensión que es racional y estructurada.

De la Edad Media emergió una visión sobre la realidad que incluyó la idea cristiana de un plan que integra las cosas con la figura de Dios como un arquitecto y diseñador matemático del mundo. Se trataba de una doctrina presente durante los siglos XVI y XVIII que inspiró a los científicos del Renacimiento y de la Revolución Científica, como Copérnico, Galileo, Kepler, Newton o Leibniz. Para estos intelectuales, por medio de las matemáticas se desentrañaba el diseño divino.

Un elemento importante en la expansión del conocimiento y un fundamento de la ciencia moderna fue la traducción a lenguajes populares de varias obras griegas. Una traducción importante realizada en 1 543 fue hecha por Tartaglia: los Elementos de Euclides, del latín al italiano. En los siguientes años otros siguieron esta dirección, como Descartes y Galileo.

Las matemáticas para progresar requerían el florecimiento de las ciencias y esto, en general, sólo podía hacerse a través de una ruptura con la autoridad. Era necesario un cambio en la metodología de la ciencia que, en particular, se desprendiera de la escolástica y de ese matrimonio acrítico con las obras griegas.

En esa dirección, Leonardo da Vinci (1452 - 1519) es una de las más importantes referencias. Planteaba una actitud práctica frente a los métodos y conceptos medievales. No obstante, no estableció una metodología ni una filosofía de las ciencia plenamente. Su aproximación era más bien empírica e intuitiva. Ya volveremos a las rupturas con los métodos medievales y la construcción de una nueva metodología en las ciencias y las matemáticas.

Finalmente, a manera de valoración:

"En el Renacimiento las matemáticas tuvieron aplicación en la mecánica, el arte, la agrimensura, la contabilidad, la cartografía y la óptica. En general, se trataba de aplicaciones elementales o que recurrían a dimensiones de poco nivel matemático. También, en el mismo periodo, hubo interés por las obras griegas de mayor complejidad, pero no de una manera muy extendida. La ausencia de traducciones latinas de autores como Apolonio, Arquímedes, o Pappus era una debilidad." [Ruiz. A. y Barrantes, H.: Elementos de Cálculo Diferencial. Historia y ejercicios resueltos, p. 53]

11.3 La Perspectiva

Fueron los artistas durante el Renacimiento quienes manifestaron un interés en la naturaleza y aplicaron un sentido matemático en varios de sus trabajos; estudiaron, por ejemplo, a Vitruvius. Los artistas del Renacimiento se vieron comprometidos en diferentes tipos de tareas desde las construcciones y la ingeniería, la anatomía, la óptica, hasta la creación de obras de arte. A la vez que realizaban un trabajo práctico también abordaban asuntos de naturaleza abstracta.

Su trabajo abonó el terreno para la revolución científica y matemática que se daría en el siglo XVII. ¿Por qué? La arquitectura y las artes plásticas empezaron a utilizar de diferentes maneras el conocimiento creciente, la perspectiva y la anatomía, potenciando un tipo diferente de intelectuales, científicos y, si se quiere, que estaban preocupados tanto por las técnicas que se desarrollaba en los talleres de artesanos, por ejemplo, así como por los aspectos más teóricos que se generaban en las universidades. Es lo que se puede afirmar como una nueva relación entre las tradiciones eruditas y las prácticas, una nueva interacción que fue decisiva, en opinión de muchos historiadores de la ciencia, para la revolución científica que se daría propiamente durante el siglo XVII.

Debe mencionarse los siguientes pintores: Filippo Brunelleschi (1377 - 1446), Paolo Uccello (1397 - 1475) y Masaccio (1401 - 1428), como importantes estudiosos de la perspectiva, en la que aplicaron principios de geometría.

Se considera a Leone Battista Alberti (1404 - 1472) el mejor exponente en la perspectiva matemática. Por ejemplo, en su libro Della pittura, el cual además contiene trabajos sobre la óptica. En otro de sus trabajos, Ludi mathematici, introduce aplicaciones a la mecánica, a la topografía y asuntos militares relacionados con la artillería. Por supuesto, el gran Leonardo que puede decirse que afirmó la pintura como una ciencia que revelaba la naturaleza de la realidad [Trattato della pittura (1651, versión compilada por un autor anónimo)].

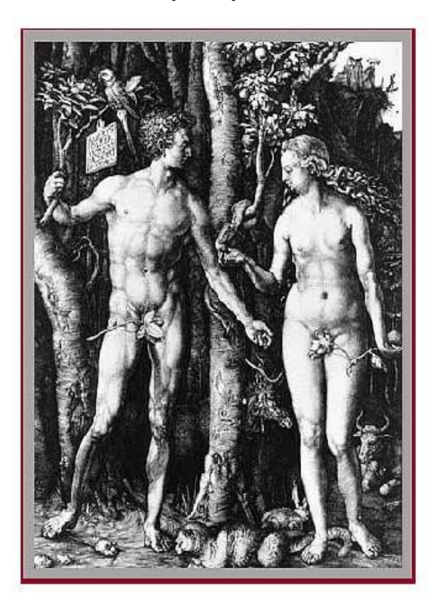
Es opinión aceptada que los principios matemáticos de la perspectiva fueron establecidos de una manera completa por Piero della Francesca (c. 1410 - 1492), con avances en la idea de proyección y sección en su trabajo De prospettiva pingendi (1482 - 1487).



Melancolía , pintura de Durero.

También es una opinión aceptada que el mejor matemático entre los artistas renacentistas fue el alemán Albrecht Dürer, Durero, (1 471 - 1 528). La obra relevante de Durero: Underweysung mid dem Zyrkel und Rychtscheyd, 1 525.

Otros trabajos sobre la perspectiva, de una manera mucho más definitiva, fueron escritos al final del siglo XVIII por los matemáticos Brook Taylor y J. H. Lambert.



Adam y Eva, por Durero.

En general, la geometría de estos siglos XV y XVI encontró sus fronteras en la perspectiva. Se afirma que el trabajo de Leonardo, Piero, Pacioli y Durero tuvo la principal virtud de ampliar el conocimiento sobre la geometría, aunque de manera muy limitada si se compara con la geometría clásica. Tal vez, valga la pena mencionar que, producto del trabajo de algunos de estos artistas y matemáticos, se estimuló el estudio de la estereometría.

11.4 Mapas

Otra de las actividades que requirieron matemáticas y que ayudaron a su desarrollo, de manera indirecta más que todo, fue la confección de mapas. El asunto, por supuesto, refería a cómo colocar en un plano una realidad esférica como el planeta Tierra. El método más importante en la construcción de mapas fue dado por Mercator (1512 - 1 594), Gerhard Kremer:

"En 1 564, el geógrafo flamenco Gerardus Mercator (1 512 - 1 594) propuso una proyección cilíndrica que tuvo una excelente acogida entre los navegantes (los cuales podían pagar con sus vidas los errores en los mapas de navegación). En esencia consistía en servirse de un cilindro imaginario que envolviera la Tierra y fuera tangente al ecuador. A continuación se trataba de representar las características de la superficie terrestre sobre el interior del cilindro, de modo que, al extender el cilindro, se obtuviera un mapa. En dicho mapa los meridianos y paralelos eran transformados en una retícula de rectas ortogonales, pero de modo que se respetaban las formas en torno a cada punto. El problema estaba en que la distorsión se acentuaba mucho cuando los territorios se alejaban del ecuador, siendo esta distorsión muy considerable en lo que hoy se denomina Groenlandia y la Antártida. Tenía, no obstante, la gran ventaja para el marino de que las loxodromias (curvas que en la superficie terrestre forman un ángulo constante con todos los meridianos y sirven para navegar con rumbo constante), en la proyección de Mercator, eran líneas rectas que marcaban rumbos posibles.

Según se suele destacar habitualmente, Mercator no dedujo las propiedades de su proyección por procedimientos matemáticos, sino empíricos; quien logró realizar un análisis teórico de dichas propiedades fue el matemático que da cuenta de la propiedad loxodrómica antes señalada en una obra titulada Certaine Errors in Navigation, publicada en 1 599. Esta obra permitió a Emery Molineux y a Jocodus Hondius corregir las siguientes ediciones de los mapas de Mercator.

Los trabajos del gran geógrafo belga dieron como resultado una obra monumental aparecida un año después de su muerte, cuyo título es elocuente: Atlas sive cosmographicae meditationes de fabrica mundi et fabricati figura. La palabra 'Atlas' provenía de la figura mitológica griega que llevaba el mundo a sus espaldas y que había hecho fortuna entre los editores de los libros de mapas. Pero, además de las colecciones de Mercator y sus sucesores, se publicaron también otras series de ellos entre las que destacan las de Abraham Ortelius (1 524 - 1 598). Su obra más difundida, Theatrum orbis terrarum, apareció en 1 570 y constituye una colección de setenta mapas en un volumen infolio de 53 hojas." [Rioja, Ana, Ordóñez, Javier: Teorías del Universo, Volumen II de Galileo a Newton, pp. 81-82.]

Durante el siglo XVI estos trabajos obtuvieron un mayor desarrollo, sin embargo, más adelante, servirían para lo que se llama la geometría diferencial.

11.5 Astronomía y matemáticas

Se afirma que durante la primera mitad del siglo XVI no se dieron grandes cambios en las matemáticas europeas más allá de lo que los árabes habían suministrado. Los cambios, sin embargo, arrancan en la segunda mitad, debido primordialmente a las necesidades prácticas que una nueva forma de sociedad y economía habían generado. Una de las actividades claves para

entender el progreso de las matemáticas y de las ciencias en general refiere directamente a la astronomía. ¿Por qué? Las grandes exploraciones geográficas de la época se habían convertido en asuntos decisivos para los europeos y éstas requerían mayor precisión en los cálculos astronómicos. Un ejemplo lo constituyen las tablas trigonométricas, las cuales debieron ser mejoradas para ajustar las observaciones a la nueva teoría astronómica.

Hubo importantes trabajos en la recolección de datos astronómicos, que fueron relevantes para la nuevas teorías. Mason recoge estos elementos:

"La astronomía de observación resurgió en el siglo quince en relación con el arte de navegar y con la reforma del calendario juliano que se estaba desfasando respecto al año solar. Este movimiento se inició con Geor von Peurbach, 1423 - 61, de la Universidad de Viena, y más especialmente con su discípulo Johann Müller, 1436 - 76, quien fue a Italia para estudiar las versiones griegas originales de la astronomía de Ptolomeo. Müller se estableció en Nuremberg, realizando observaciones con su amigo y patrón Bernhard Walther, 1430 - 1504, un rico comerciante que disponía de un observatorio privado. Walther tenía también una imprenta propia, con la que prepararon almanaques náuticos de gran utilidad para los navegantes portugueses y españoles. Müller fue el primero que introdujo en las observaciones astronómicas correcciones para la refracción atmosférica, así como el primero también en utilizar en astronomía el reloj mecánico. Más tarde, marchó a Roma para reformar el calendario, si bien murió antes de llevarlo a cabo. Walther y su amigo, el artista Albrecht Dürer, prosiguieron sus observaciones, de modo que cuando Nicolás Copérnico, 1473 - 1543, comenzó su trabajo, se disponía ya de un volumen considerable de observaciones moderas precisas." [Mason, Stephen F.: Historia de las ciencias. La Revolución Científica de los siglos XVI y XVII, pp. 7-8]

En ese escenario, se dio una gran cantidad de los esfuerzos del siglo XVI en álgebra orientados a la resolución de ecuaciones o identidades que aparecían en tablas trigonométricas.

Pero no todo refería a la astronomía y la navegación, las actividades bancarias o comerciales empujaron hacia un progreso en la aritmética.



Pacioli, estampilla.

Los trabajos de Pacioli, Tartaglia o Stevin (1548 - 1620) contienen muchos asuntos relacionados con esto último. Tampoco se puede dejar por fuera la empresa militar y, en particular, la construcción de cañones, que empujaban hacia el estudio de temas como el de los proyectiles y sus curvas de movimiento.



11.6 Trigonometría

Con relación a la trigonometría debe decirse que, aunque los peritos usaban los métodos geométricos romanos, se empezó a usar algo de trigonometría plana con un método iniciado por Leonardo de Pisa en su Practica Geometriae (1 220).

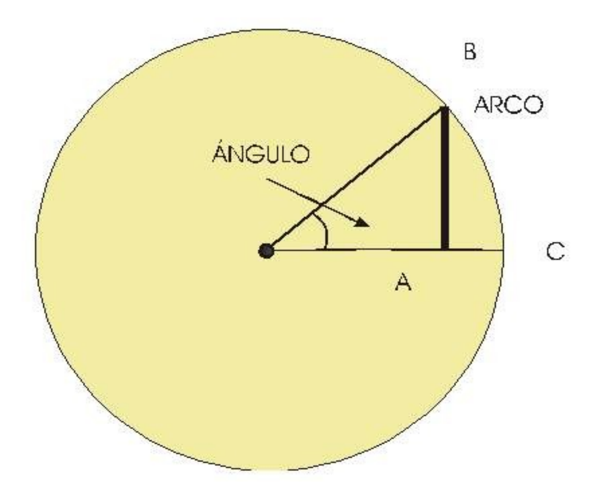
Otros avances fueron hechos por el mismo George Peurbach (1423 - 1461) de Viena, quien ofreció tablas trigonométricas más precisas y corrigió algunas traducciones latinas del Almagesto que habían sido realizadas desde versiones árabes y no griegas.

El más conocido, sin embargo, fue Johannes Müller (1436 - 1476), el famoso Regiomontano, que fue discípulo de Peurbach y del cardenal Bessarion (c. 1400 - 1472). Regiomontano no solo haría varias traducciones de obras griegas sino que también estableció su propia imprenta para imprimirlas. Entre ellas las Secciones Cónicas de Apolonio y partes de Arquímedes y Herón. Se sabe que en su libro De Triangulis, 1462 - 1463, Regiomontano se benefició de algunos trabajos árabes para expresar de una mejor manera el conocimiento disponible sobre trigonometría plana, geometría esférica, y trigonometría esférica.

Un detalle sobre Müller: Nicolás de Cusa (1401 - 1464), quien se supone fue el primer europeo que buscó resolver el problema clásico de la cuadratura del círculo, y un intelectual, incluso cardenal, que tendría importantes repercusiones, fue corregido por Regiomontano (1436 - 1476), quien le señaló algunos problemas o errores de razonamiento.

La construcción de tablas fue otro asunto importante durante los siglos XV y XVI. Por ejemplo, laboraron en eso George Joachim Rheticus (1514 - 1576), Copérnico, François Vieta (1540 - 1603) y Barthdolomaeus Pitiscus (1561 - 1613). En estos trabajos usaron números de unidades muchísimo más largos en el radio, de tal forma que los valores de las cantidades trigonométricas pudieran ser obtenidas con mayor precisión sin usar fracciones o decimales. Rheticus calculó una tabla de senos basado sobre un radio de diez a la diez unidades y otro basado en diez a la 15 unidades y dio valores para cada diez segundos del arco. Pitiscus corrigió algunos de estos trabajos. Se supone, precisamente, que la palabra trigonometría fue dada por él.

Un detalle interesante con Rheticus es que cambió el significado del seno. Antes se usaba como el seno del arco y no del ángulo (en una circunferencia), ahora era el seno del ángulo.



Más adelante toda la trigonometría plana y esférica fue sistematizada y extendida por Vieta. Su obra Canon Mathematicus (1 579) ofrece las fórmulas para la solución de los triángulos planos recto y oblicuo y la ley de las tangentes, elaborada por él mismo. Vieta ofreció más identidades trigonométricas que las que había establecido Ptolomeo.

Tal vez, lo más importante a señalar de la trigonometría del siglo XVI es su separación de la astronomía y su evolución como una rama propia de las matemáticas. No es que ésta ya no se usara en la astronomía, sino que era aplicada en otras dimensiones adicionales como, por ejemplo, la topografía.

11.7 Aritmética y álgebra

A principios del siglo XVI, el cero y los irracionales se aceptaban, más o menos en la tradición de los árabes e hindúes. Cardano, Stevin, Pacioli y el alemán Michael Stifel introdujeron nuevos tipos de irracionales. Vieta dio una aproximación del número π usando otras formas de irracionales. Stifel en su obra Aritmética Integra de 1 544 usó irracionales en forma decimal, aunque tenía sus dudas acerca de la naturaleza de los mismos, a los que no consideraba exactamente números de verdad.

Las dudas sobre los irracionales siguieron por siglos. Pascal y Barrow opinaron que números como la $\sqrt{3}$ eran simplemente magnitudes geométricas, o sea eran símbolos sin existencia independiente más allá de esas magnitudes, y acudían a la teoría de las magnitudes de Eudoxo para justificar la operación con ellos. Stevin, por el contrario, afirmaba que los irracionales eran números independientes, e incluso los aproximó por medio de números racionales. En la misma dirección, John Wallis y Descartes llegarían a afirmar que los irracionales eran números.

Un tanto similar ocurría con los números negativos. En los siglos XVI y XVII matemáticos como el mismo Stifel afirmaron que eran números absurdos. Cardano obtuvo números negativos en algunas ecuaciones, pero no los consideraba números; es más, afirmaba que eran absurdos, ficticios. Vieta los descartó completamente. Pascal consideraba un sin sentido restar 4 al 0. Descartes sí los aceptó, aunque solo en parte (a las raíces negativas las llamaba falsas).

En la solución de ecuaciones cuadráticas y al usar la raíz cuadrada los matemáticos de la época se toparon con otros números aun más problemáticos: los complejos. Por ejemplo, Cardano al resolver la ecuación

$x(10-x)=40$ encontró raíces complejas.

También en ecuaciones cúbicas aparecieron los complejos.

Algo similar ocurrió con Bombelli quien incluso llegó a formular las cuatro operaciones con los complejos en la forma actual. Pero tanto Cardano como Bombelli consideraban que se trataba de algo sin utilidad y de naturaleza sofística.

Aunque no tuvo mucha influencia en su tiempo, Albert Girard le dio valor a los complejos como soluciones formales de ecuaciones.

Descartes, a pesar de la gran amplitud de miras que siempre exhibía, rechazó a los complejos, no eran números verdaderos, y dijo que eran imaginarios, término que se quedaría como consignación de estos números. Para Newton se trataba de raíces imposibles.

Sea como sea, el uso de métodos algebraicos expandió las fronteras de lo que debía considerarse números. El proceso, sin embargo, tomó mucho tiempo para esclarecerse plenamente.

Otro resultado de la época fue el uso de las fracciones continuas. Por ejemplo, Bombelli las usó para aproximar raíces cuadradas (Algebra, 1 572), y, algunas décadas después, John Wallis para representar

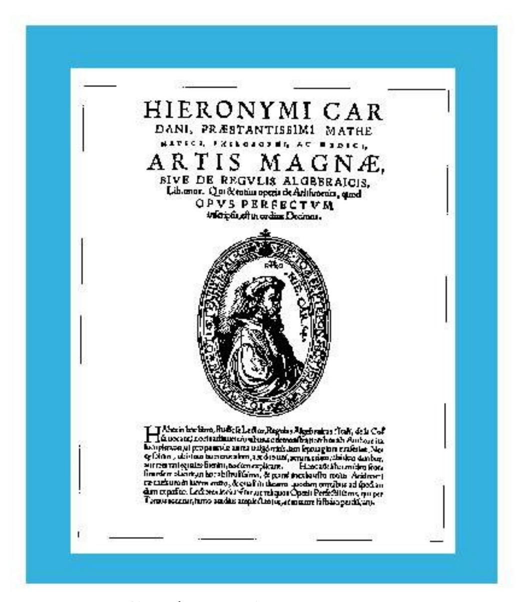
$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \ldots}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \ldots}$$

(Arithmetica Infinitorum, 1 655). Debe recordarse que los hindúes habían trabajado mucho las fracciones continuas para resolver ecuaciones indeterminadas.

Dos obras aritméticas tuvieron influencia durante los siglos XV y XVI: Triparty en la science des nombres de Nicolás Chuquet (francés) y la Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalita de Luca Pacioli (1445 - 1514).

En cuanto al primero, no se sabe cuánto es original de éste, y trata de las operaciones aritméticas racionales con números, incluye el estudio del sistema de numeración hindú-árabe. Hay, también, resolución de ecuaciones. Aunque este libro no fue publicado hasta 1 880, se sabe que Etienne de la Roche publicó en 1 520 y 1 538 un libro que contenía mucho del libro de Chuquet (Larismetique nouvellement composee).

El segundo libro era un compendio de aritmética, álgebra, geometría elemental y contabilidad (de doble entrada). Tampoco se puede decir que fuera original, no cita fuentes, por ejemplo. En su parte aritmética, explica métodos para multiplicar y hallar raíces cuadradas, en la de álgebra da las soluciones normales para ecuaciones lineales y cuadráticas.



Cardano, Ars Magna.

Mientras tanto, en el álgebra no se daría ningún desarrollo durante el Renacimiento hasta el trabajo de Cardano (Ars Magna, 1 545). No obstante, debe mencionarse el trabajo de Pacioli: Summa de Arithmetica, Geometria, Proportione et Proportionalita, 1 494, una recopilación de conocimientos y aplicaciones prácticas que, sin embargo, no tenían mucho más que lo que contenía el Liber Abaci de Leonardo de Pisa en 1 202. Podemos afirmar que:

"Parece haber consenso entre los historiadores de este periodo en que las matemáticas del Renacimiento se caracterizaron por el desarrollo del álgebra, no siguiendo el influjo geométrico griego, sino más bien las tradiciones medievales. Aunque las ciudades italianas sirvieron para la penetración de la ciencia árabe y griega antigua, también debe reconocerse la existencia de trabajos

germánicos en el álgebra. Una de las más importantes de éstas fue la Aritmética íntegra de Stifel (un tratado del álgebra muy completo de lo que existía en la época publicado en 1 544)." [Ruiz, A. y Barrantes, H.: Elementos de Cálculo Diferencial. Historia y ejercicios resueltos, p. 51]

Las ecuaciones de tercer y cuarto grados

Las cuadráticas fueron resueltas desde los babilonios, usando el método de completar cuadrados.

Con relación a la de tercer grado, Pacioli pensó que no era resoluble, sin embargo alrededor del 1500 algunas de ellas fueron resueltas por Scipione dal Ferro (1 465 - 1 526) de Bologna:

$$x^3 + ax = b.$$

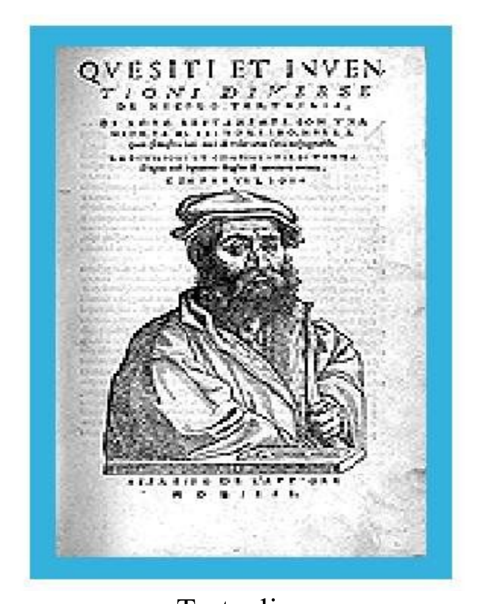
Un siguiente paso lo dio el famoso matemático Tartaglia, cuyo nombre era Niccolò Fontana de Brescia (1499 - 1557). Su seudónimo se debía a que quedó tartamudo después de que un soldado francés le cortara la cara. Resolvió varios tipos de ecuaciones de la forma:

$x^3 + ax^2 = b$ y $x^3 + ax = b$, con a y b positivos.

Cardano quien publicó en su Ars Magna el método de solución de Tartaglia se lo atribuyó con su discípulo Lodovico Ferrari (1 522 - 1 565) a dal Ferro, provocando una disputa con Tartaglia.

Con la solución de la ecuación cúbica, luego, se obtuvo la solución de la cuadrática, por medio de Ferrari.

Entonces, por el concurso de Tartaglia, Cardano y Ferrari se encontraron métodos para la resolución de las ecuaciones de tercer y cuarto grados. Pero, tiempo después, Vieta, además de la generalización que logró con el simbolismo, exploró un método general para usar en cualquier tipo de ecuación sin importar el grado.



Tartaglia.

Estos métodos desarrollados, de algunas maneras, se enseñan en la teoría elemental de las ecuaciones. Asuntos como la relación entre el grado y el número de raíces, o las calidades de éstas: cuántas positivas, negativas, complejas.

Cabe mencionar que Descartes, tiempo después, en La Géométrie, sugeriría la regla de los signos para las raíces: el número máximo de raíces positivas de $P(x) = 0$, con $P(x)$ un polinomio, es el número de alteraciones en el signo de los coeficientes y el máximo de las negativas es el número de veces que dos signos $+$ o dos signos $-$ ocurren sucesivamente. Y, además, en ese mismo libro estableció el teorema del factor, es decir que: $f(x)$ es divisible por $x - a$, con a positivo, si y solo si a es una raíz de $f(x) = 0$. Y por $x + a$ si a es un raíz ``falsa''.

Descartes realmente estableció el método moderno para encontrar raíces racionales de polinomios. Asuntos de la obra del genial francés que no son tan conocidos.

Otro resultado interesante de esta época es el uso del Triángulo de Pascal, que aunque lleva el nombre de este genial matemático fue usado anteriormente por otros como Tartaglia, Stifel y Stevin.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

. . . .

La expansión para $(a + B)^n$ con n entero, el llamado teorema del binomio, era conocida por los árabes del siglo XIII.



Página de una obra de Tartaglia.

En la teoría de números de la época, el principal impulso lo llegó a realizar Pierre de Fermat (1601 - 1665), quien partiendo del trabajo de Diofanto estableció la dirección de los trabajos en esta disciplina matemática por lo menos hasta Gauss. Ya desarrollaremos esto con detalle.

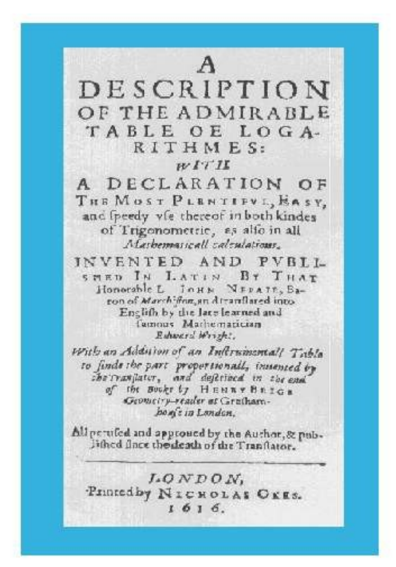
El progreso en los símbolos

Se suele reconocer que fue el mejoramiento del simbolismo en el álgebra uno de los resultados relevantes del siglo XVI, aunque no se tuviera plena conciencia de su importancia. Por ejemplo, desde el siglo XV, se usó p por más y m por menos, y en el mismo siglo por los alemanes los símbolos de $+$ y $-$. El símbolo $\times$ para indicar "veces" se le debe a Oughtred. Leibniz, años después, objetó que podía ser confundido con la x . Robert Recorde (1510 - 1558) introdujo el signo $=$. Para la igualdad Vieta usó $\sim$ y Descartes $\propto$.

Fue Thomas Harriot quien introdujo los signos $<$ y $>$. Descartes usó $\sqrt{}$.

Vieta

Probablemente fue Vieta quien realizó el salto más relevante en el simbolismo para el álgebra. Bajo la influencia de Cardano, Tartaglia, Bombelli, Stevin y especialmente Diofanto, introdujo letras para designar números de manera sistemática y consistente. Usó consonantes para las cantidades conocidas y vocales para las desconocidas. Su conciencia del papel del simbolismo y de la naturaleza general del álgebra lo llevó a hacer la famosa distinción entre logistica numerosa y logistica speciosa para separar aritmética y álgebra. Mientras que la numerosa refería a números, la speciosa a un método de operar sobre formas de cosas o especies, de ahí el nombre precisamente. Es decir, álgebra refiere a tipos generales. Una de las cosas que trató de hacer fue establecer las identidades algebraicas que había en los textos geométricos griegos de la Antigüedad.


A
DESCRIPTION
OF THE ADMIRABLE
TABLE OE LOGA-
RITHMES:
WITH
A DECLARATION OF
THE MOST PLENTIFVL, EASY,
and speedy vse thereof in both kindes
of Trigonometrie, as also in all
Mathematicall calculations.
INVENTED AND PVBLI-
SHED IN LATIN BY THAT
Honorable L. IOHN NEPAIR, Ba-
ron of Marchiston, and translated into
English by the late learned and
famous Mathematician
Edward Wright.
With an Addition of an Instrumentall Table
to finde the part proportionall, invented by
the Translator, and described in the end
of the Booke by HENRY BRIGS
Geometry-reader at Gresham-
house in London.
All perused and approved by the Author, & pub-
lished since the death of the Translator.

LONDON,
Printed by NICHOLAS OKES.
1616.

Libro de Napier.

Aunque muchos buscaron mejorar el trabajo de Vieta como Harriot, Girard y Oughtred, debe mencionarse que fue Descartes quien usó las primeras letras del alfabeto para cantidades conocidas y las últimas para las desconocidas, exactamente como se trabaja ahora (aunque Vieta y Descartes usaron los coeficientes literales solo para números positivos).

Leibniz, debe decirse, fue de los matemáticos más preocupados con el simbolismo.

11.8 Logaritmos: un resultado relevante

Puede decirse que el resultado más relevante de la aritmética de los siglos XVI y XVII fueron los logaritmos. Aparentemente, fue Stifel el primero en notar la correspondencia entre los términos de la sucesión geométrica $1, s, s^2, s^3, \dots$ y aquellos de la progresión aritmética formada por sus exponentes: 0, 1, 2, 3, 4,....

Al multiplicarse dos términos de la geométrica, el exponente del nuevo término así formado es la suma de los términos correspondientes en la aritmética. La división en la geométrica da la resta en la aritmética.

También Chuquet había notado esto (1484).

Pero fue John Napier (1550 - 1617) quien desarrolló los logaritmos, casi al terminar el siglo XVI, analizando la correspondencia entre las dos progresiones. Su motivación era, como era común en toda esta época, facilitar cálculos en trigonometría esférica que se usaba en asuntos de astronomía (de hecho, considera logaritmos de senos). Napier envió en consulta sus resultados al gran astrónomo Tycho Brahe. Dos obras condensan esos resultados: Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio y Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio, de 1614 y 1619 respectivamente.

Otro matemático que trabajó con logaritmos fue Henry Briggs (1561 - 1631), quien sugirió el 10 como base, simplificando las cosas, y creó tablas de logaritmos para números cercanos que todavía tienen alguna utilidad.

Un tratamiento similar al de Napier fue realizado por el suizo Joost Bürgi (1552 - 1632) quien, para que se aprecie la conexión astronómica, fue asistente de Kepler en Praga.

Tiempo después se construyeron otras tablas de logaritmos por vía algebraica, incluso usando series infinitas: James Gregory, Lord Brouncker, Nicholas Mercator, John Wallis y Edmond Halley ("padre" del famoso cometa Halley).

11.9 Una nueva relación

En este punto es relevante valorar la relación entre álgebra y geometría. Como herencia de los griegos, a pesar de los desarrollos en álgebra, siempre había una dependencia de la geometría. El punto de fondo refería a la justificación del álgebra, mejor dicho del pensamiento algebraico. Los matemáticos trataron primeramente de encontrar pruebas geométricas para asegurar el álgebra (como Cardano, Tartaglia, Pacioli o Ferrari).

Una dosis mayor de independencia se logró con los trabajos de Vieta y los de Descartes. En un principio el álgebra buscó servir como un método para sistematizar situaciones de la geometría, en las construcciones. Es ésta la motivación principal que se encuentra en el trabajo de Vieta In Artem Analyticam Isagoge. Se identificaba una contraposición entre álgebra y geometría equivalente a la que existe entre análisis y síntesis.

Vieta afirmaba el álgebra como un "arte analítico". El método analítico vislumbrado era asumir lo que se desea probar y por deducción llegar a verdades conocidas. Vieta buscó tratar los asuntos de proporciones de las magnitudes por medio del álgebra.

Esta relación mutua entre álgebra y geometría para estudiar las soluciones de problemas geométricos o, inversamente, para construir raíces de problemas geométricos, también se puede apreciar en obras del discípulo de Vieta, Marino Ghetaldi (1566 - 1627): Apollonius Redivivus y De resolutione et compositione matematica.

11.10 Biografías



Luca Pacioli

Luca Pacioli nació en 1445 en Sansepolcro, Italia. Su padre fue Bartolomeo Pacioli, pero al parecer nunca vivió con Luca, porque vivía con la familia Befolci en Sansepolcro. El pintor Piero della Francesca tenía un estudio y un taller en la ciudad, lo que hace suponer que Luca fue su estudiante. Luca se mudó a Venecia en donde trabajó como tutor de los tres hijos de Antonio Rompiansi y en donde continuó sus estudios matemáticos bajo la tutela de Domenico Bragadino. En 1470, publicó su primer libro sobre aritmética y lo dedicó a Rompiansi, el cual murió ese mismo año. Se trasladó a Roma y vivió en la casa del humanista Leone Battista Alberti que era, entre otras cosas, secretario en la Chancillería Papal. Gracias a la influencia de Alberti, Luca estudió teología y años después se convirtió en fraile de la Orden Franciscana.

A partir de 1477, impartió lecciones en la Universidad de Perugia, Universidad de Zara, Universidad de Nápoles y por último en la Universidad de Roma. Después de dos años en Roma, regresó a su cuidad natal y en 1493 fue invitado a predicar los sermones de la Cuaresma.

En 1494, Ludovico Sforza se convirtió en el duque de Milán y dos años después invitó a Luca a Milán para que enseñara matemáticas en su corte. En Milán, Leonardo Da Vinci entabló una estrecha amistad con Luca.

En 1499, Leonardo y Luca abandonaron Milán y se instalaron en Florencia.

En 1500, Luca fue elegido para impartir lecciones de geometría en la Universidad de Pisa, donde permaneció hasta 1 506, fecha en la que ingresa al monasterio de Santa Croce. También fue nombrado el superior de la Orden Franciscana en Romagna.



Leonardo da Vinci

Leonardo da Vinci nació el 15 de abril de 1 452 en Vinci, Italia. Su padre fue un florentino adinerado y su madre una mujer de campo. Como era costumbre en la época en que vivió da Vinci, su educación la recibió en casa, aprendió lo elemental acerca de la lectura, escritura y aritmética. En 1 467, inició como aprendiz de pintura, escultura y adquirió habilidades técnicas y mecánicas. En 1 472, fue aceptado en un gremio de pintores en Florencia, pero trabajó independientemente como pintor. En esos años esbozó bombas, armas militares y otras máquinas.

Entre 1 482 y 1 499 estuvo al servicio del Duque de Milán, Ludovico Sforza, durante este tiempo se interesó en geometría. Trabajó con Luca Pacioli y dejó por un tiempo la pintura para dedicarse a la geometría. Estudió a Euclides y empezó su propia investigación. Además, dio soluciones mecánicas a algunos problemas. Escribió un libro acerca de la teoría elemental de mecánica alrededor del año 1 498.

En 1 499, Leonardo junto a Pacioli dejó Milán para irse a Mantua, Venecia y luego a Florencia. En 1 506, volvió a Milán y retomó su trabajo científico haciendo diferentes estudios acerca de hidrodinámicos, anatomía, mecánica, matemática y óptica.



Niccolo Fontana Tartaglia

Niccolo Tartaglia nació en el año 1 499 en Brescia, República de Venecia. En 1 512, casi muere al ser gravemente herido en su rostro, cuando los franceses invadieron su pueblo natal. Su madre lo cuidó y se recuperó, pero por el resto de su vida llevó una barba para cubrir las cicatrices en su cara, además, hablaba con mucha dificultad y de ahí su apodo Tartaglia que significa tartamudo.

Enseñó en Verona y en Venecia y adquirió una reputación de matemático prometedor. En 1 535, se dio una competencia entre Tartaglia y Fior, un estudiante de Del Ferro que cuando estaba en el lecho de muerte le informó a su pupilo como resolver una ecuación cúbica. Fior confiado por la información que su maestro le había transmitido, sometió a Tartaglia a una serie de preguntas acerca de estas ecuaciones y en menos de dos horas Tartaglia pudo resolverlas. Fior perdió la competencia. Cardano, que presenció la competencia, le solicitó a Tartaglia su solución para incluirla en su libro, a lo que Tartaglia se negó. En 1 539, viajó a Milán a visitar a Cardano y en esta ocasión le reveló la solución. Tiempo después, Cardano junto a su asistente Ferrari publicaron las fórmulas y otras derivaciones de éstas y se acreditó a Del Ferro y a Tartaglia el descubrimiento, aún así Tartaglia estaba muy molesto.

Durante mucho tiempo mantuvo un conflicto abierto con Ferrari y el 10 de agosto de 1 548, se llevó a cabo un concurso en la Iglesia del Jardín de Frati Zoccolanti. Al final del primer día Tartaglia iba muy por debajo del nivel de Ferrari, por lo que esa misma noche abandonó Milán y le otorgó a Ferrari la victoria.

Murió el 13 de diciembre de 1 557 en Venecia, Italia.

Rafael Bombelli

Rafael Bombelli nació en enero de 1 526 en Bologna, Italia. Sus padres fueron, Antonio Mazzoli, un comerciante de lana y Diamante Scudieri, hija de un sastre. Rafael fue el mayor de seis hermanos. Nunca pudo ingresar a la universidad, pero recibió clases del Ingeniero en arquitectura Pier Francesco Clementi, del cual aprendería su profesión. No se sabe con exactitud, como Bombelli adquirió conocimiento en diferentes trabajos matemáticos, pero se sabe que en Bologna había bastantes eruditos en quien basarse y de quien aprender.

En 1 548, su profesor Pier Francesco Clementi, fue llamado para trabajar en la Cámara Apostólica y es probable que Rafael lo haya acompañado en este proyecto. En 1 551, trabajó para Alessandro Ruffini cuando este reclamó unas propiedades en los pantanos de Val di Chiana, que eran parte de los Estados Papales. Estuvo involucrado en esto hasta 1 555, cuando suspendieron el proyecto. En 1 557, inició a escribir un libro de álgebra pero en 1 560 cuando el proyecto de Val di Chiana reinició, aún Rafael no había terminado su libro.

En una de sus visitas a Roma, trabajó junto a Antonio Maria Pazzi en la traducción de un manuscrito de Diophantus (Diofanto). La traducción no se terminó por completo pero ésta influyó mucho en la obra de álgebra que Rafael escribió. Su obra consistió en cinco libros, los primeros tres fueron publicados en 1 572, y fue hasta 1 923, cuando Bortolotti descubrió los manuscritos de los dos últimos libros en la biblioteca de Bologna y los publicó en 1 929.

Murió en el año 1 572, probablemente en Roma, Italia.

Lodovico Ferrari

Lodovico Ferrari nació el 2 de febrero de 1 522 en Bolonia, Estados Papales (Italia).

A la edad de catorce años fue a la casa de Girolamo Cardano para servirle como sirviente. Cardano al darse cuenta de que el niño sabía leer y escribir lo contrató como su secretario, después de esto decidió impartirle clases de matemáticas ya que vio en él a un joven dotado de inteligencia. Cardano le dio paso a Ferrari a la edad de dieciocho años en la Fundación de Milán en 1 540.

Durante mucho tiempo mantuvo un conflicto abierto con Niccolo Tartaglia y el 10 de agosto de 1 548, se llevó a cabo un importante debate en Milán. Al final del primer día estaba claro que las cosas no iban de la manera que Tartaglia se las esperaba. De modo que salió de Milán esa misma noche y así Ferrari obtuvo la victoria de la contienda. De esta manera la reputación de Ferrari creció y empezó a recibir numerosas ofertas de empleo.

Retirado como un hombre joven y rico regresó a su pueblo natal en Bolonia, en donde consiguió una cátedra.

El 5 de octubre de 1 565 Ferrari murió debido a envenenamiento de arsénico, supuestamente administrado por su propia hermana.



Simon Stevin

Simon Stevin nació en el año 1 548 en Brujas, Bélgica.

Stevin fue el matemático e ingeniero holandés que fundó la ciencia de hidrostáticos. Antes de ingresar a estudiar, trabajó como librero en Antwerp y después fue empleado de una oficina de impuestos en Brujas. Se mudó a Leiden, donde inició sus estudios en la Escuela Latina, para después ingresar a la Universidad de Leiden en 1 583. Mientras estuvo de cabo en la marina holandesa, inventó la manera de inundar las tierras bajas y crear diques con el fin de evitar la entrada del ejército contrario.

Construyó molinos de viento, cerraduras y puertos. También, aconsejó al Príncipe Maurice de Nassau, en la construcción de fortificaciones para la guerra en contra de España. Realizó aportes significantes en trigonometría, geografía, fortificaciones, navegación y mecánica.

Murió en el año 1 620 en La Haya, Holanda.

Georg Joachim von Lauchen Rhaeticus

George Rhaeticus nació el 16 de febrero de 1 514 en Feldkirch, Austria. Sus padres fueron Georg Iserin, doctor de pueblo y oficial de gobierno y Tomasina de Porris, una mujer italiana.

Rhaeticus fue educado hasta los catorce años por su padre, hasta que éste fue decapitado. Después de esto Rhaeticus cambió sus apellidos. Aquiles Gasser tomó el puesto de médico en el pueblo y fue quien le ayudó a seguir con sus estudios.

Ingresó a la Escuela Latina en Feldkirch y de 1 528 a 1 531 estudió en Frauenmuensterschule. En 1 533, ingresó a la Universidad de Wittenberg y tres años después recibió una maestría. Philipp Melanchthon le ayudó para que lograra enseñar matemáticas y astronomía en la Universidad de Wittenberg en 1 536.

En 1 539, Rhaeticus llegó a Frauenberg en Ermland, en donde estuvo por casi dos años al lado de Copérnico. En 1 541, Rhaeticus regresó a la Universidad de Wittenberg y fue el deán de la Facultad de Artes. Un año más tarde, obtuvo el puesto de profesor de matemáticas en Leipzig y estuvo allí hasta 1 545. Por último, se trasladó a Krakóv por los siguientes veinte años a practicar la medicina.

Murió el 4 de diciembre de 1 574 en Kassa, Hungría.



Robert Recorde

Robert Recorde nació en el año 1 510 en Tenby, Gales. Estudió en las Universidades de Oxford y Cambridge.

Fue médico particular del Rey Eduardo VI y de la Reina María. Trabajó un tiempo en Irlanda, como Administrador de Minas. Estableció la Escuela Matemática Inglesa y fue uno de los primeros matemáticos en introducir el álgebra a Inglaterra.

Escribió muchos libros; uno de ellos que tuvo mucho éxito fue The Grounde of Artes, publicado en 1 540. El libro trataba acerca de la enseñanza de la aritmética. En 1 557, publicó su libro The Whetstone of Witte, en el cual aparece el símbolo que hoy conocemos como el igual '=', se basa en la explicación que dos segmentos de la recta paralela no pueden ser más iguales.

Aún así, este símbolo no fue tan popular cuando Recorde lo incluyó en su libro. Hasta mucho después de 1 700, se seguía utilizando el símbolo '||' o el 'ae' o 'oe', derivado de la palabra aequalis que significa igual.

Murió en prisión, preso aparentemente por deudas, en 1 558, en Londres, Inglaterra.



John Napier

John Napier nació en 1 550, en Merchiston, Edinburgo, Escocia.

En 1 563, John inició sus estudios en la Universidad de St. Andrews a la edad de trece años y fue aquí donde surgió su interés en la teología. No recibió su título en esa universidad porque partió hacia Europa a estudiar. No se sabe con exactitud en que universidades estudió en Europa, pero es muy probable que lo haya hecho en la Universidad de Paris.

En 1 571, regresó a Escocia a presenciar el segundo matrimonio de su padre. En 1 574, se completó la construcción del castillo de la familia en Gartness y John se fue a vivir ahí con su esposa.

Fue un hombre que desempeñó un papel activo en el ambiente controversial de su época. Como fiel protestante, escribió en 1 593, lo que sería su trabajo más importante: un libro acerca del descubrimiento de la revelación. El libro le hizo famoso no sólo en Escocia, sino también en el resto del continente, al ser éste el primer libro en Escocia que trataba sobre la interpretación de la Biblia.

Su contribución a las matemáticas significó un pasatiempo para él, ya que con frecuencia se encontraba trabajando en sus estudios de teología. Uno de sus más reconocidos logros fue la invención de los logaritmos.

Murió el 4 de abril de 1 617 en Edinburgo, Escocia.

Francisco Maurolico

Francisco Maurolico nació el 16 de setiembre de 1 494 en Messina, Italia. En 1 521, a la edad de veintisiete años, se ordenó sacerdote y poco tiempo después ingresó a la orden Benedictina. Toda su vida la pasó en Sicilia a excepción de periodos en que viajó a Roma y a Nápoles. Estuvo a cargo de las fortificaciones de Messina y fue asignado para escribir la historia de Sicilia.

Escribió muchos libros importantes acerca de matemáticas griegas, restauró y tradujo muchos textos de Theodosius, Menelaus, Autolycus, Euclides, Apollonius y Arquímedes. También, realizó trabajos en geometría y estudió con profundidad la teoría de números, las ópticas, la mecánica y la astronomía. Publicó los métodos para medir la Tierra y éstos fueron usados por Jean Picard en 1 670.

Murió el 22 de julio de 1 575 en Messina, Italia.

Albert Girard

Albert Girard nació en 1 595 en St. Mihiel, Francia.

A los veintidós años ingresó a la Universidad de Leiden, donde estudió matemáticas a pesar de que sus mayores intereses eran la música y el laúd. Basó sus estudios en álgebra, trigonometría y aritmética y a los treinta y un años publicó un tratado en trigonometría en donde por primera vez se utilizan las abreviaciones sin, cos, tan.

Como la mayoría de los matemáticos de su época, Girard estaba interesado en las aplicaciones militares de la matemática.

Aparentemente, Girard fue por un tiempo ingeniero del ejército holandés, después de haber publicado su estudio trigonométrico. Gassendi, al referirse a Girard, cuando éste murió, dijo que él prefirió morir describiéndose como un ingeniero que como un matemático.

El día de su muerte fue el 8 de diciembre de 1 632 en Leiden, Países Bajos.



Girolamo Cardano

Girolamo Cardano nació el 24 de setiembre de 1 501 en Pavía, Ducado de Milán, Italia. Fue hijo ilegítimo de Fazio Cardano y Chiara Micheria. Su padre fue abogado en Milán, pero tenía amplios conocimientos en geometría, tanto que algunas veces fue consultado por Leonardo Da Vinci. Fue mucho tiempo después de que Cardano nació, que sus padres se casaron. De joven, trabajó de asistente de su padre, pero debido a que era débil de salud el trabajo se volvió muy pesado para él. Su padre le había enseñado matemáticas y esto despertó el deseo en Cardano de estudiar en la universidad, después de una disputa su padre aceptó que ingresara a la Universidad de Pavía a estudiar medicina. Cuando la guerra inició, la universidad fue cerrada y Cardano se trasladó a la Universidad de Padua a completar sus estudios. Poco tiempo después su padre murió. Inició a apostar el poco dinero que le había dejado su padre para incrementar su capital y a pesar de que sus conocimientos en probabilidad le ofrecían una ventaja, en poco tiempo el juego se convirtió en su peor vicio. En una ocasión al creer que su oponente le hacía trampa, Cardano le acuchilló la cara, lo que sin duda dañaría su reputación.

En 1525, obtuvo su doctorado en medicina y aplicó para ingresar al Colegio de Médicos de Milán, en donde no fue aceptado debido a su mala reputación y al hecho de que era un hijo ilegítimo.

En 1531, se casó con Lucía, hija del capitán Aldobello Bandarini. Después de no tener éxito en su práctica de medicina y de encontrarse en serios problemas económicos, solicitó el puesto que sostuvo su padre en la Fundación Piatti. Este puesto, en adición con curaciones consideradas casi milagrosas, hizo que su reputación mejorara notablemente.

Henri Briggs

Henri Briggs nació en febrero del año 1 561 en Warleywood, Yorkshire, Inglaterra. A pesar de que su fecha de nacimiento fue registrada por la Iglesia Halifax, J. Mede describe la muerte de Briggs a los setenta y cuatro años, con lo que propone su fecha de nacimiento en 1 556. Su hermano Richard, fue director de la escuela en Norfolk y tuvo amigos de la altura de Ben Jonson, dramaturgo, poeta y crítico literario. Briggs, asistió a una escuela cerca de Warleywood, en donde estudió Griego y Latín.

En 1 577, ingresó al Saint John's College de la Universidad de Cambrigde. En 1 581, recibió el título de bachillerato y cuatro años más tarde su maestría. En 1 588, fue elegido miembro del San John's College. En 1592, se le acreditó como profesor conferencista de física, puesto fundado por el Dr. Linacre. Además, ese mismo año fue asignado conferencista de matemáticas en Cambrige. En 1 596, se convirtió en el primer profesor de geometría en Gresham College en Londres, puesto que

mantuvo por veintitrés años.

Alrededor del año 1 609, se hizo amigo de James Ussher, amistad que mantendría por mucho tiempo. En 1 615, viajó a Edimburgo a conocer a Napier para trabajar en su estudio de logaritmos. En 1 619, Savile fundó el puesto de presidencia de geometría en Oxford, puesto que Briggs ocuparía poco tiempo después. Fue el responsable de la aceptación científica de los logaritmos en el mundo. Se dice que era un hombre modesto, justo y de carácter agradable.

Murió el 26 de enero de 1 630 en Oxford, Inglaterra.

Michael Stifel

Michael Stifel nació en el año 1 487 en Esslingen, Alemania. Asistió a la Universidad de Wittenberg donde obtuvo una maestría.

Dedicó su vida a la religión y en 1 511, fue ordenado en el Monasterio Agustino en Esslingen. Sin embargo, no estuvo satisfecho con la fe católica y se decía infeliz al vivir con el dinero de los pobres, así que en 1 522, fue forzado a salir del monasterio. Ingresó entonces, a la orden de los Luteranos y vivió en la casa de Martín Lutero por un tiempo.

En 1 523, obtuvo la posición de pastor y cinco años después fue enviado a una parroquia en Lochau. Cometió el error de predecir el final del mundo, por lo que fue arrestado y destituido del puesto.

En 1 535, fue a una parroquia en Holzdorf y se estableció ahí por doce años.

En 1 547, en la guerra religiosa de Schmalkaldic, Stifel fue forzado a salir de nuevo de su parroquia. Se mudó a Prusia y obtuvo una parroquia en Königsberg. Stifel comienza a impartir conferencias de matemáticas y teología en la Universidad de Königsberg.

En 1 559, obtuvo un puesto en la Universidad de Jena en donde impartió conferencias de aritmética y geometría.

Murió el 19 de abril de 1 567 en Jena, Alemania.

11.11 Síntesis, análisis, investigación

1. Explique las implicaciones de la caída de Constantinopla para la Europa Occidental en lo que se refiere a la ciencia y la cultura.
2. Estudie el siguiente texto:

   "La Reforma y la Contrarreforma, a la par, representan la rebelión de naciones menos civilizadas contra el dominio intelectual de Italia. En el caso de la Reforma, la rebelión fue también política y teológica: la autoridad del Papa se rechazaba y el tributo que había obtenido por el Poder de las llaves dejó de ser pagado. En el caso de la Contrarreforma, hubo solamente una rebelión contra la libertad moral e intelectual de la Italia del Renacimiento; el Poder del Papa no era disminuido, sino exaltado, mientras que al mismo tiempo, era evidente que su autoridad era incompatible con la cómoda relajación de los Borgias y de los Médicis. Hablando en términos generales, la Reforma fue alemana y la Contrarreforma, española; las guerras de religión fueron, al mismo tiempo, guerras entre España y sus enemigos, coincidiendo con el período en el que el poder de España estaba en su apogeo." [Russell, Bertrand: Historia de la Filosofía Occidental, Tomo II: La Filosofía Moderna, p. 143]

   Describa con mayor detalle qué fueron la Reforma y la Contrarreforma. Consulte otra bibliografía. Comente la posición de Russell.
3. Explique la relación entre navegación y astronomía.
4. ¿Qué fue lo más importante del Renacimiento con relación al progreso de la cultura y el conocimiento?
5. Comente la existencia de un mayor acercamiento entre las tradiciones eruditas y artesanales durante el Renacimiento.
6. Comente la relación entre matemáticas y las técnicas de la perspectiva en pintura.
7. Lea con cuidado el siguiente texto:

   "El prefacio de este 'Curso del arte de la medición', que, como el tratado sobre proporciones humanas, está dedicado a Pirckheiner, es la primera exposición pública de la duradera convicción de Durero, que se repetiría más de una vez a la que se aludirá en alguno de sus puntos en nuestras discusiones: que los pintores alemanes eran iguales a los demás en habilidad práctica ('Brauch') y en poder imaginativo ('Gewalt'), pero que eran inferiores a los italianos --que habían 'descubierto' de nuevo, doscientos años atrás, el arte venerado por los griegos y los romanos y olvidado durante mil años-- según un conocimiento racional ('Kunst') que les evitaba los 'errores' y 'falsedades' de su trabajo. 'Y puesto que la geometría es el verdadero fundamento de la pintura', Durero continúa:

   'He decidido enseñar sus rudimentos y principios a todos los jóvenes ávidos de arte... Espero que mi empresa no sea criticada por ningún hombre razonable, ya que... puede no sólo beneficiar a los pintores sino también a los orfebres, escultores, picapedreros, carpinteros, y a todos aquellos que tengan que confiar en la medición.'

Por lo tanto, el 'Unterweisung' es un libro de uso práctico y no un tratado de matemática pura. Durero quería ser comprendido por artistas y artesanos. Ya se ha mencionado que adaptó el lenguaje antiguo técnico de éstos, y él mismo lo utilizó. Le gustaba explicar las deducciones posibles de un proyecto conocido, incluso si tenía que interrumpir su contextura sistemática, como cuando enseña el uso de la espiral construida para capiteles o para báculos de obispo laminados. Se abstiene de divagaciones eruditas y da sólo ejemplo --el primero de las letras alemanas-- de una rigurosa experiencia matemática. Pero por otra parte sus amigos eruditos le tuvieron informado de aquellas nuevas ideas y problemas --para citar del excelente Johannes Werner, al que Durero parece estar obligado por más de un motivo-- que 'desde Grecia habían vagado hasta los geómetras latinos de su época'. Además de su conocimiento directo de Euclides, había establecido contacto con el pensamiento de Arquímedes, Herón, Sporus, Tolomeo y Apolonio; y más importante que todo esto, es que fue un geómetra nato. Tenía idea clara del infinito (por ejemplo, cuando dice que una línea recta 'puede ser prolongada indefinidamente, o que al menos así puede considerarse', o cuando distinguió entre paralelismo y convergencia asintótica, subrayó la diferencia básica entre una figura geométrica en lo abstracto y su realización concreta a pluma y tinta (el punto matemático, dice, no es un 'punto' en todo caso pequeño, sino que puede ser 'situado mentalmente tan alto o tan bajo, que ni siquiera podamos llegar a él físicamente', y lo que se aplica al punto, se aplica a las líneas a fortiori; nunca confundió las construcciones exactas con las aproximadas (siendo las primeras exactamente 'demonstrative', y las últimas meramente 'mechanice'); y presentó su material en perfecto orden metódico.

El primer libro, que empieza con las definiciones usuales, trata de los problemas de geometría lineal, desde la línea recta hasta las curvas algebraicas que ocuparían a los grandes matemáticos del siglo XVII; Durero incluso se atreve con las construcciones de hélices, concoides (muschellinie, 'líneas en concha') y epicicloides (Spinnenlinie, 'líneas en tela de araña'). Uno de los rasgos más interesantes del Primer Libro es el primer estudio en alemán sobre secciones cónicas, cuya teoría acababa de ser revivificada, basándose en fuentes clásicas. Sin duda, Durero debe su familiaridad con los términos y descripciones de Apolonio (parábola, hipérbola y elipse) al mencionado Johannes Werner, que vivió en Nuremberg y cuyo valioso Libellus super viginti duobus elementis conicis había aparecido en 1 522, tres años antes al 'Unterweisung der Messung'. Pero Durero se acercó al problema de un modo completamente diferente al de Werner o de cualquier matemático profesional. En vez de investigar las propiedades matemáticas de la parábola, hipérbola y elipse, trató de imaginarlas justo como había tratado de construir sus espirales y epicicloides; y logró esto por medio de la ingeniosa aplicación de un método familiar a todos los arquitectos y carpinteros, pero nunca aplicado anteriormente en la resolución de un problema puramente matemático, dejando aparte los problemas ultramodernos de secciones cónicas: el método de proyección paralela. Representó el cono, cortado según el caso, en elevación lateral y en el plano horizontal y trasladó un número suficiente de puntos de la primera representación a la última. Entonces la hipérbola normal --producida por una paralela en sección transversal al eje del cono-- puede ser interpretada directamente, cuando se desarrolla una elevación central de los otros dos diagramas, mientras que las parábolas y elipses prolongadas por secciones oblicuas y apareciendo por lo tanto en reducción en cualquier diagrama, excepto en la elevación lateral, deben ser obtenidas alargando proporcionalmente sus ejes

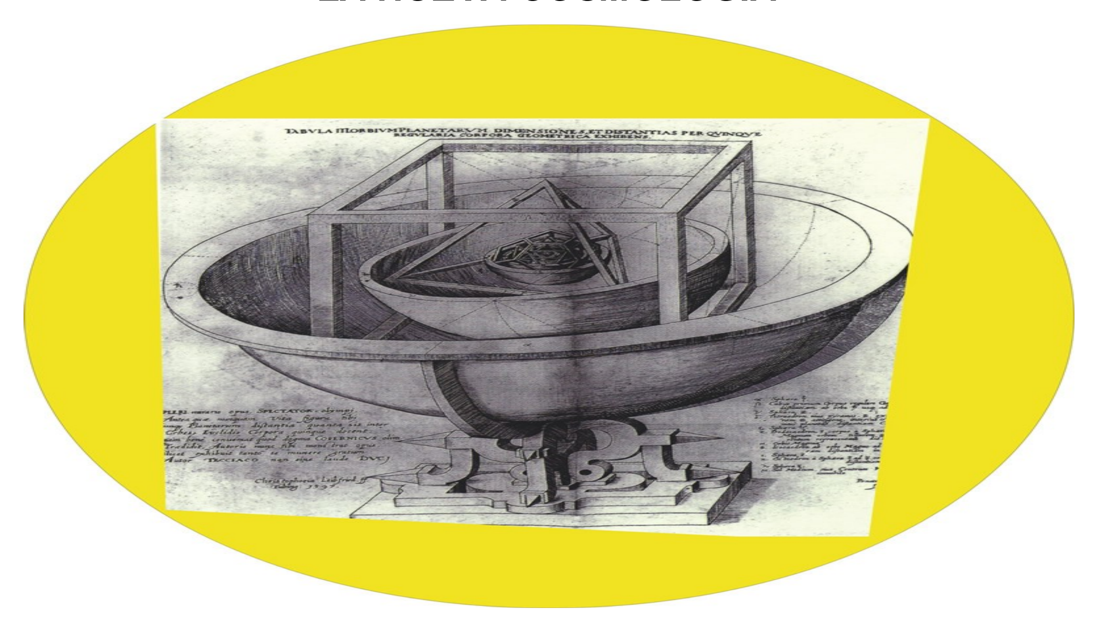
principales. Por más superficial que sea este método, que puede ser llamado genético en oposición al descriptivo, anuncia, en cierto modo, el procedimiento de la geometría analítica y no dejó de llamar la atención a Kepler, quien corrigió la única falta cometida por Durero en su análisis. Como un colegial, Durero encontró difícil imaginar que una elipse fuera una figura perfectamente simétrica. No pudo substraerse a la idea de que se ensanchaba en proporción con la abertura del cono y falseaba involuntariamente la construcción hasta que terminaba en una 'Eierline ' ('línea en huevo') y no en una elipse correcta, más estrecha en la parte superior que en la inferior. Incluso con los primitivos métodos de Durero, el error pudo haber sido evitado fácilmente. El que fuera cometido, no sólo hace notar un conflicto importante entre el pensamiento geométrico abstracto y la imaginación visual, sino que también prueba la independencia de Durero en sus investigaciones. Después de la publicación de su libro, inventó un ingenioso compás, que le hubiera evitado dicho error, pero es innecesario decir que este instrumento resuelve el problema de la elipse sólo 'mechanice ' y no 'demonstratiive'". [Panofsky, Erwin: "Durero como matemático", p. 206, 207, 208]

Describa los aportes de Durero a las matemáticas.

8. ¿Cuál fue la contribución de Gerardus Mercator a las matemáticas?
9. Comente la relación entre navegación y matemáticas.
10. ¿Para qué se desarrollaron las tablas trigonométricas con mayor precisión?
11. ¿Cuál es la obra más importante de Cardano?
12. ¿Quiénes resolvieron las ecuaciones de tercer y cuarto grados? Explique.
13. Mencione algunas contribuciones de Vieta al álgebra. Comente su propuesta de la utilización de un método analítico.
14. ¿Cuál fue la razón social o cultural más importante para la creación de los logaritmos?

CAPITULO XII

LA NUEVA COSMOLOGÍA



El Renacimiento motivó un cambio de actitudes en la intelectualidad. Pero no había un salto cualitativo o radical hacia la nueva ciencia. Para eso tendrían que darse más cosas. Fue decisivo el escenario de las cosmologías, porque precisamente integraba matemáticas, ciencias, metodología cognoscitiva y, también, un mundo ideológico que era esencial para el orden social y político establecido.

12.1 La Revolución Científica como un proceso múltiple

Debe interpretarse la revolución científica como un proceso con varios componentes donde jugó un papel decisivo inicial el Renacimiento. Esta se asocia estrechamente con la reforma protestante y las revoluciones políticas de los siglos XVII y XVIII y, tiempo después, con la revolución industrial del siglo XVIII. Todos ellos fueron procesos imbricados que abrieron la sociedad occidental moderna, con sus ventajas y, por supuesto, también sus desventajas.

Ahora bien, fueron, precisamente, las contribuciones científicas y metodológicas del siglo XVII las que transformaron el pensamiento de la época y empujaron la construcción del modelo moderno de la ciencia occidental. En esta gran epopeya encontramos figuras intelectuales de la talla de Galileo, Harvey, Descartes, Fermat, Newton y muchos otros. En particular, la mecánica celeste que desarrollaría este último propulsó un paradigma (es decir un modelo teórico mayoritariamente aceptado) en torno al conocimiento de las leyes del mundo que no hace mucho todavía regía. Podemos decir que la revolución científica constituyó una ruptura cualitativa con el pensamiento anterior de clara filiación griega y medieval y el parto de una nueva época. Para algunos, se trata de una de las más importantes hazañas de la especie humana. Afirma Butterfield: "... se debería

colocar -junto con el éxodo de los antiguos o la conquista de los grandes imperios de Alejandro el Grande y de la antigua Roma- entre las aventuras épicas que han hecho de la raza humana lo que es hoy". Russell subraya el momento de la Modernidad:

"Casi todo lo que distingue al mundo moderno de los siglos anteriores es atribuirle a la ciencia, que logró sus triunfos más espectaculares en el siglo XVII. El Renacimiento italiano, aunque no es medieval, no es moderno; es más afín a la mejor época de Grecia. El siglo XVI, con su preocupación por la teología, es más medieval que el mundo de Maquiavelo. El mundo moderno, por lo que se refiere a la actitud mental, comienza en el siglo XVII. Ningún italiano del Renacimiento hubiera sido ininteligible para Platón o Aristóteles; Lutero habría horrorizado a Tomás de Aquino, pero no hubiera sido difícil para él entenderle. En el siglo XVIII es diferente: Platón y Aristóteles, Aquino y Occam no hubieran podido comprender nada de Newton." [Russell, Bertrand: Historia de la Filosofía Occidental, Tomo II: La Filosofía Moderna, p. 146.]

La Revolución Científica, con sus conceptos, métodos y actitudes, así como con las ideas políticas, filosóficas, económicas y éticas de este tiempo, se incorporó a los fundamentos de una nueva sociedad. Debe subrayarse en las actitudes y métodos las contribuciones de Francis Bacon, René Descartes, Galileo Galilei, en la primera mitad del siglo XVII. Sus aportes en el progreso de los métodos experimentales y empíricos y la descripción matemática y mecánica de la realidad, así como su ruptura con el pensamiento medieval, abrieron las rutas que seguiría nuestra especie. Esto lo desarrollaremos con detalle posteriormente.

Con especial relevancia, las nuevas ideas y métodos confrontaban el pensamiento medieval, aristotélico y escolástico, que había establecido su corazón ideológico sobre una cosmología geocéntrica. Entonces, en el debate de teorías cosmológicas, cargadas de ideologías pero, también, de hechos y resultados empíricos, de auténticos elementos científicos, es que se impulsaría el desarrollo de las ciencias modernas, en particular de las matemáticas.

La astronomía

Los matemáticos renacentistas tradujeron obras del griego y el árabe, compilaron muchos trabajos con el conocimiento existente y, con ello, abrieron el camino para el progreso de las matemáticas en los siglos siguientes. En el caso del álgebra se dio una continuación de las actividades establecidas por los árabes y en la geometría se trabajó sobre algunos problemas heredados de los artistas. Pero las principales creaciones matemáticas que realizaron los europeos tuvieron su origen en otros asuntos de carácter científico y tecnológico en general. Con toda propiedad, se puede decir que fue la revolución en la astronomía, realizada por Copérnico y Kepler, la principal fuente de desarrollo de las matemáticas en los siglos XVII y XVIII.

La idea de que la Tierra se mueve alrededor del Sol ya había sido considerada con cierto desarrollo por algunos árabes, así como por medievales y renacentistas: Bîrûnî (973 - 1048), Oresme y también Nicolás de Cusa (1401 - 1464).

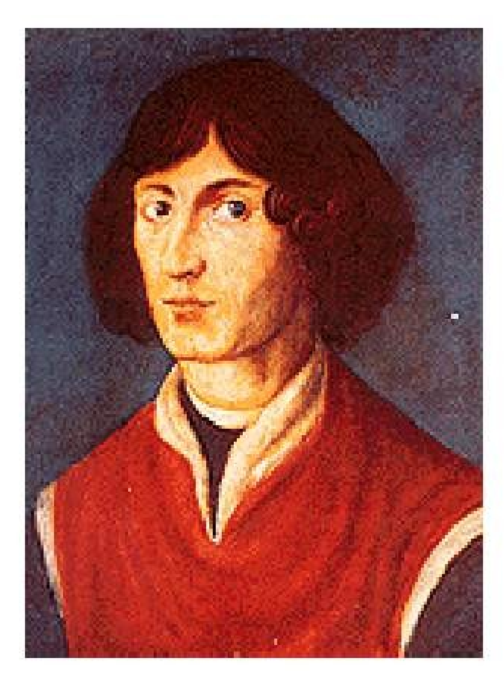


Copérnico.

12.2 Copérnico

Nicolás Copérnico dio el primer paso en la revolución cosmológica de la Modernidad. Su teoría heliocéntrica se dirigió frontalmente contra la cosmología aceptada por la autoridad política y religiosa de la época: aristotélica y ptolomeica. Copérnico retomó ideas ya presentes en los pitagóricos y en Aristarco de Samos que afirmaban un movimiento de los astros y los planetas alrededor del Sol. En el caso de los pitagóricos tanto los planetas como el Sol mismo giraban alrededor de un gran fuego central. Habían afirmado un movimiento circular de los astros y subrayado su forma esférica. Fue, sin embargo, el principal astrónomo del periodo alejandrino, Aristarco (quien había creado métodos ingeniosos para el cálculo de distancias relativas entre Sol, la Luna y la Tierra, la relación entre el diámetro terrestre y el lunar), quien afirmó que el Sol permanecía inmóvil con relación a las estrellas fijas y que era precisamente la Tierra la que se movía alrededor del Sol, de una manera circular una vez al año.

Copérnico había nacido en el año 1473 en Polonia y había realizado sus estudios en la Universidad de Cracovia en las matemáticas y las ciencias. También estudió medicina y derecho canónico. Es relevante en su biografía el hecho que a los 23 años de edad fuese a estudiar a Italia, específicamente en Bolonia. Pues, debe enfatizarse, Italia era un puntal de una amplia revolución en las actitudes intelectuales que se condensan con el Renacimiento. Al regresar a su natal Polonia, Copérnico asumió la administración de la catedral de Frauenburg (Frombork) durante más de 30 años hasta el momento de su fallecimiento en 1543. Fue precisamente en ese año que vio la luz su gran obra: De rebolutionivus orbium coelestium ("La revolución de los cuerpos celestes").



Copérnico, joven.

La publicación de ésta se considera tradicionalmente el comienzo de la Revolución Científica. Resulta interesante señalar, sin embargo, que Copérnico no albergaba intenciones de introducir ideas muy radicales en su cosmología en un primer momento. Se sabe que su objetivo principal residía en la búsqueda por restablecer la pureza de la tradición griega en la astronomía, lo que implicaba la eliminación de algunas de las ideas que había introducido Ptolomeo. Al realizar la crítica profunda de las teorías de Ptolomeo, Copérnico generó una auténtica revolución en la astronomía.

Copérnico, aunque se inclinaba desde joven por el heliocentrismo, prefirió evadir la confrontación con la autoridad. De hecho, su obra salió a la luz pública, gracias a los oficios de su asistente Osiander, con un prefacio que advertía que las ideas que se encontraban en la misma no eran más que hipótesis matemáticas y no auténticas posiciones de Copérnico. Nadie quiso atreverse a defender o propagar esta obra. La historia tendría que esperar para ello a Galileo. Como era natural suponer, cuando la obra comenzó a difundirse la Iglesia Católica calificó el sistema de Copérnico de herético y, ya que estaba en "contradicción" con las Sagradas Escrituras, su libro fue incluido en el Índice Expurgatorio de la Curia Romana el día 5 de marzo de 1616. Una fecha triste para la libertad de pensamiento: 73 años después de la publicación del libro.

El año de 1543 fue especial para las ciencias. Es el mismo año en que Vesalio publicó su De humani corporis fabrica , que fue la primera descripción completa de la anatomía del cuerpo humano; daba un tratamiento más preciso y detallado de los órganos y la estructura del cuerpo humano, basado en sus mismas disecciones, y también incluía muchas ilustraciones que suponían un gran mejoramiento de cualquier otro texto de esta materia. Debe mencionarse, también, que este último científico había fundado la escuela de medicina de la Universidad de Padua, una tradición que conectaría años más tarde con los trabajos del mismo William Harvey.

¿Cuál era el significado de la teoría heliocéntrica de Copérnico? ¿Por qué entraba en contradicción con las Sagradas Escrituras? Con relación a la segunda, ya la responderemos. Para contestar a la primera pregunta, citemos una bella síntesis realizada por el físico británico Stephen Hawking:

"Aristóteles creía que la Tierra era estacionaria y que el Sol, la Luna, los planetas y las estrellas se movían en órbitas circulares alrededor de ella. Creía eso porque estaba convencido, por razones místicas, de que la Tierra era el centro del Universo y el movimiento circular era el más perfecto. Esta idea fue ampliada por Ptolomeo en el siglo II después de Cristo, hasta constituir un modelo cosmológico completo. La Tierra permaneció en el centro, rodeada por 8 esferas que transportaban la Luna, el Sol, las estrellas y los cinco planetas conocidos en aquel tiempo, Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno. Los pla-ne-tas se movían en círculos más pequeños engarzados en sus res-pec-ti-vas esferas, para que así se pudieran explicar sus relativamente complicadas trayectorias celestes. La esfera más externa transportaba a las llamadas estrellas fijas las cuales siempre permanecían en las mismas posiciones relativas, las unas con respecto de las otras, lo que había detrás de la última esfera nunca fue descrito con claridad, pero ciertamente no era parte del Universo observable por el hombre.

El modelo de Ptolomeo proporcionaba un sistema razonablemente preciso para predecir las posiciones de los cuerpos celestes en el firmamento. Pero, para poder predecir dichas posiciones correctamente, Ptolomeo tenía que suponer que la Luna seguía un camino que la si-tua-ba en algunos instantes dos veces más cerca de la Tierra que otro. ¿Y esto significaba que la Luna debería aparecer a veces con tamaño doble del que usualmente tiene?

Ptolomeo reconocía esta inconsistencia, a pesar de lo cual su mo-de-lo fue amplia aunque no universalmente aceptado. Fue adoptado por la Iglesia Cristiana como la imagen del Universo que estaba de acuerdo con las Escrituras, y que, además, presentaba la gran ventaja de dejar fuera de la esfera de las estrellas fijas una enorme cantidad de espacio para el cielo y el infierno." [Stephen Hawking, Historia del tiempo, 1 988].

En realidad, la teoría de Copérnico no estaba en mayor acuerdo con las observaciones empíricas registradas que la teoría de Ptolomeo con sus modificaciones posteriores. ¿Cual era entonces su mérito? Eran varios. Puede decirse que el legado que dejó Copérnico fue importante para el progreso de la ciencia de una forma significativa. En primer lugar, la introducción rigurosa del pensamiento matemático en la cosmología daba un golpe a la física aristotélica del sentido común, y con ello potenciaba los cuestionamientos a las barreras intelectuales que suponía este pensamiento. En segundo lugar, su concepto de una Tierra en movimiento afirmó a la Tierra como un planeta más, lo que era vital para poder enfrentar las visiones defendidas por la ideología dominante. Otro asunto clave fue su explicación acerca de por qué no se podía detectar el paralaje estelar, limitación que él afirmaba se debía a la enorme distancia de la Tierra con relación a las estrellas fijas. Esto por supuesto ponía en el tapete la discusión sobre la naturaleza del universo. Pero, hay más, el salto positivo que daba la teoría de Copérnico era una simplificación de las explicaciones, es decir introducía menos elementos. Por ejemplo, la teoría de Ptolomeo incluía numerosos epiciclos y poseía una gran complejidad, los epiciclos además aumentaban cada vez que se empleaban las observaciones empíricas. Un ejemplo: para explicar los movimientos de la luna y los seis planetas conocidos, el simple hecho de poner al Sol como centro y no a la Tierra permitía un esquema con sólo 34 círculos, mientras que en el esquema ptolomaico había 77.

Copérnico preservó de la astronomía de Ptolomeo el uso del círculo como la curva básica para la explicación de los movimientos de los cuerpos celestes.

¿Por qué círculos?

"Lejos de una actitud positivista, Copérnico busca el sistema de círculos que sea, no más acorde con las observaciones, sino más racional. Es decir, no sólo se trata de dar cuenta de los movimientos aparentes de los planetas, sino de hacerlo de modo que ponga al descubierto el orden inteligible que subyace en el cosmos. Para ello entiende que han de establecerse siete postulados, en los que renuncia nada menos que al reposo de la Tierra y a su posición central." [Rioja, Ana y Ordóñez, Javier: Teorías del universo. Volumen I. De los pitagóricos a Galileo, p. 112.]

Aunque la teoría de Copérnico no correspondía de una mejor manera con las observaciones que la teoría de Ptolomeo junto con las modificaciones que le habían sido hechas, su explicación basada en el movimiento de la Tierra alrededor del Sol permitía explicar las principales irregularidades en los movimientos de los planetas sin emplear tantos epiciclos.

Otro aspecto en la simplificación que ofrecía la teoría copernicana refiere al tratamiento general de todos los planetas, lo que en el sistema ptolemaico era diferente. En esta última, Mercurio y Venus se trataban de una manera distinta a los planetas Marte, Júpiter y Saturno.

También, otra de las ventajas del sistema de Copérnico era su mayor facilidad para el cálculo de las posiciones de los cuerpos celestes. Esto último permitía crear nuevas tablas de posiciones.



Tycho Brahe.

Frente a Copérnico se levantó una gran oposición. Astrónomos de la talla de Tycho Brahe (1546 - 1601) abandonaron esta teoría en busca de algo intermedio, porque la teoría de Copérnico mostraba ciertas discrepancias con las observaciones. Vieta elevó argumentos semejantes y se dedicó a mejorar la teoría ptolemaica. Una de las dificultades del planteamiento de Copérnico residía en las matemáticas mismas: su complejidad.

Debe mencionarse, Copérnico trató de evadir la polémica:

"La verdad es que el sabio polaco deseaba a toda costa evitar la polémica. Quizá por ello se ocultó durante tanto tiempo. Animado por el éxito del escrito de Rheticus o por cualquier otra razón, el hecho es que por fin en 1542 inicia las acciones oportunas para que el De Revolutionibus salga a la luz pública. Por diversas vicisitudes, la responsabilidad de conducir el manuscrito original a la imprenta quedó a cargo primero del propio Rheticus y después del teólogo luterano Andreas Osiander. La fecha y el lugar de su aparición es mayo de 1 543 en la ciudad de Nuremberg. Pero para su autor era ya demasiado tarde. En diciembre anterior había sufrido un derrame cerebral con la consecuencia de parálisis parcial y pérdida de las facultades mentales. La primera copia de la obra llegaba a sus manos en los días precedentes a su muerte." [Rioja, Ana y Ordóñez, Javier: Teorías del universo. Volumen I. De los pitagóricos a Galileo, p. 109]

¿Por qué esta actitud?

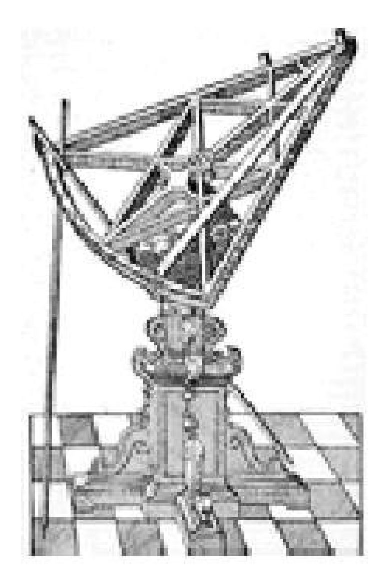
Antes de seguir con Kepler, debe hacerse un comentario general sobre las ideas de la época: "Heliocentrismo y atomismo representaban dos corrientes de pensamiento profundamente heterodoxas para filósofos escolásticos y teólogos. La defensa del movimiento de la Tierra se oponía a la literalidad de la Biblia y a la enseñanza de Aristóteles, convertida en soporte intelectual de la teología. La doctrina de los átomos pasó asimismo a ser objeto de disputa a causa de los problemas que planteaba su conciliación con el dogma de la eucaristía." [Rioja, Ana, Ordóñez, Javier: Teorías del Universo, Volumen II de Galileo a Newton, Madrid, pp. 113-114]



Giordano Bruno.

Ahora bien, enfrentarse a la autoridad y a todas sus consecuencias no era fácil en esos tiempos.

Una de las barreras más importantes para la recepción de la visión heliocéntrica de Copérnico fue la existencia de otra teoría planetaria que se quedaba entre la visión ptolemaica y la de Copérnico. Esta teoría era la de Tycho Brahe, el gran astrónomo danés, considerado el más importante astrónomo observacional desde Ptolomeo, quien no adoptó el sistema de Copérnico y, más bien, intentó mejorar el esquema ptolomaico.



Sextante de Brahe.

Brahe observó una nueva estrella en el año 1 572 y, también, un cometa cinco años después. Estas observaciones cuestionaban una idea aristotélica: la inmutabilidad de los cielos. Pero no solamente significaba eso. También, era una prueba de eventos que ocurrían sobre la región lunar, aquella que se suponía era perfecta e incorruptible. El cometa, además, debía cortar las esferas cristalinas de aquel universo cerrado.

A pesar de este rechazo de la astronomía y física tradicionales, Brahe no quiso adoptar la teoría heliocéntrica. Se inclinó por un sistema alternativo: los planetas giraban alrededor del Sol pero el conjunto del sistema giraba alrededor de una tierra estática y su luna. No puede negarse que la fama de este astrónomo, a la vez que la introducción de un sistema capaz de acomodar los fenómenos observables, representaba una alternativa viable para aquellos que querían quedarse en la mitad del camino. Es decir, para aquellos que estando en desacuerdo con la visión de Ptolomeo no estaban dispuestos a aceptar todavía la teoría heliocéntrica, que entraba en contradicción con la ideología dominante.

Los méritos de la nueva astronomía los caracteriza Russell de la siguiente manera:

"Aparte del efecto revolucionario sobre la imagen del cosmos, los grandes méritos de la nueva astronomía fueron dos: primero, el reconocimiento de que lo que se había creído desde los tiempos antiguos podía ser falso; segundo, que la prueba de la verdad científica es la paciente compilación de hechos, combinada con la audaz adivinación de las leyes que agrupan estos hechos. Ninguno de los dos méritos se halla tan plenamente desarrollado en Copérnico como en sus sucesores, si bien ambos están ya presentes en alto grado de su obra." [Russell, Bertrand: Historia de la Filosofía Occidental, Tomo II: La Filosofía Moderna, p. 149]

Mucho del destino de la teoría de Copérnico se jugó luego en el trabajo de Kepler (1 571 - 1 630).

12.3 Kepler

La vida de Kepler estuvo siempre llena de dificultades. Había nacido en Leonberg, Alemania, hijo de un alcohólico que de mercenario pasó a cantinero. La esposa de Kepler y varios de sus hijos murieron, su madre fue acusada de brujería y, como si fuera poco lo anterior, fue perseguido por los católicos debido a su fe luterana. Es extraordinario cómo perseveró este hombre en sus estudios científicos y matemáticos con estas difíciles vicisitudes. Pues bien, Kepler estudió las teorías astronómicas de Ptolomeo y Copérnico en la Universidad de Tübingen.



Kepler.

Aunque en un principio Kepler deseaba convertirse en cura, lo convencieron para enseñar matemáticas en Graz. Desde muy joven se inclinó por las tesis de Copérnico. Por ejemplo, se expresaba en esa dirección en su obra Mysterium Cosmographicum. Kepler fue asistente de Brahe en Praga en 1 600. A la muerte de este último en 1 601 Kepler siguió sus investigaciones y observaciones. Kepler fue quien sucedió a Brahe como matemático del emperador Rodolfo II.

Debe subrayarse que no sólo adoptó el heliocentrismo sino que utilizó en su descripción del movimiento de los planetas la elipse, y no el círculo, figura mítica desde la Antigüedad. Copérnico continuó defendiendo la estrecha visión de universo cerrado y el movimiento de los planetas como uniforme y circular. Por eso, afirma la mayor parte de historiadores de la ciencia que su trabajo fue más revolucionario que el que había realizado el mismo Copérnico: Kepler rompió más radicalmente con la autoridad y la tradición al usar la nueva figura y además velocidades no uniformes.

Resulta interesante que Kepler concebía a la ciencia como independiente de las doctrinas filosóficas y religiosas y que subrayaba que las teorías deben someterse a la prueba de la experiencia empírica. Una actitud radicalmente moderna. Bien lo comenta Mason:

"En su Epítome de la astronomía copernicana, escrito en 1618 - 21, Kepler da una descripción del método astronómico que difiere enormemente del de Copérnico. En la Astronomía, decía Kepler, hay cinco partes. En primer lugar, la observación de los cielos; en segundo lugar, las hipótesis para explicar los movimientos aparentes observados; en tercer lugar, la física o metafísica de la cosmología; en cuarto lugar, el cómputo de las posiciones pasadas o futuras de los cuerpos celestes,

y en quinto lugar, una parte mecánica que versa acerca de la fabricación y uso de los instrumentos. Kepler sostenía que la tercera parte, la metafísica de la cosmología, al igual que el prejuicio griego de que los movimientos planetarios habrían de ser uniformes y circulares, no era esencial para el astrónomo. Si sus hipótesis casaban con un sistema metafísico, tanto mejor; pero en caso contrario había que eliminar la metafísica. La única restricción de las hipótesis, decía Kepler, era que debían ser razonables, siendo el objetivo principal de una hipótesis 'la demostración del fenómeno y su utilidad en la vida diaria'." [Mason, Stephen F.: Historia de las ciencias. La Revolución Científica de los siglos XVI y XVII, p. 19]

Es también interesante que tanto Kepler como Copérnico fueron muy religiosos, pero, sin embargo, ambos negaron la idea medieval de que el hombre y la Tierra eran el centro de la creación, lo que era en esencia el principal fundamento ideológico para apuntalar la teoría geocéntrica de Ptolomeo. Debe mencionarse que aunque Kepler era muy religioso, esta fe tenía una característica: creía que la gloria de Dios se manifestaba en la creación. Se dice que Kepler se dedicó a la astronomía prácticamente con una vocación religiosa. Ahora bien, cabe mencionar que se había comprometido tanto con el sistema de Copérnico como con las ideas neoplatónicas que estuvieron presentes desde el Renacimiento. Ambas, de diferentes maneras, empujaron su búsqueda por patrones armónicos que deberían existir en el firmamento.

Muchas otras importantes obras científicas y técnicas fueron publicadas en la época: la Pyrotechnica de Biriguccio (1480 - 1539), De re metallica de Agrícola (1490 - 1555) o, más tarde, libros como los de Gesner (1516 - 1565), Rondelet (1507 - 1566) y Belón (1517 - 1564). La proyección de las ideas y actitudes nuevas fue multiplicada por el uso de la imprenta.

Fue en el año 1 609 cuando Kepler enunció sus dos primeras leyes en la obra Astronomia Nova:

(a) que los planetas se mueven alrededor del Sol con órbitas elípticas y que el Sol es uno de los focos de la elipse;

(b) y que el radio vector que va del Sol a un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.

Estas leyes no fueron aceptadas con entusiasmo por los astrónomos del tiempo de Kepler. De hecho, la primera tuvo una aceptación muy fría y pensaban que para confirmarla se requería de mucha investigación adicional. La segunda, lamentablemente, fue ignorada por casi cerca de 80 años.

En el año 1619, en un libro titulado Harmonice mundi, Kepler enunció una tercera ley:

"Los cuadrados de los periodos de los planetas son proporcionales a los cubos de los radios medios de sus órbitas".

Esta ley tuvo más suerte y fue aceptada desde un primer momento.

Es necesario mencionar que la segunda ley incluía una técnica numérica muy semejante al cálculo integral, y las dos primeras, globalmente, habían sido formuladas con relación al planeta Marte.

Kepler contribuyó con 2 obras más al progreso de la teoría de Copérnico: Epitome astronomiae copernicanae (1618 - 1621) y Tablas Rodolfinas (1627), esta última con base en observaciones de Brahe y las nuevas leyes que él mismo había establecido.

La búsqueda de una explicación heliocéntrica arranca en Kepler de varios asuntos, que consignan Rioja y Ordóñez:

"Según se ha comentado ya con detalle, si el sistema copernicano es verdadero, las numerosas armonías matemáticas que subyacen en el universo podrán descubrirse a partir del análisis de los datos y sus causas. En concreto, Kepler se formula los siguientes interrogantes:

1. ¿Por qué son seis los planetas? De entre las clases de cuerpos que componen en universo, unos -las estrellas- parecen ser incontables; otros en cambio -los planetas- existen en muy reducido número: sólo seis. ¿Por qué precisamente seis, y no más o menos? ¿Qué razón hay para que este hecho sea así y no de otra manera?

2. ¿Por qué las distintas medias al Sol son las que son? La teoría copernicana permitiría medir el tamaño de las órbitas planetarias y, por tanto, sus distancias relativas. En la figura 3.2 se aprecia que Saturno está muy alejado de Júpiter, y éste a su vez de Marte, mientras que el resto de los planetas se hallan más próximos entre sí. ¿A qué se deben estas diferencias de magnitud?

3. ¿Por qué la proporción o disposición de los planetas es la que conocemos y no otra? Aquí se trata de comprender la distribución de las partes -las esferas planetarias- en relación al todo -la esfera cósmica-. Copérnico ha establecido el orden de esas esferas, incluyendo la de la Tierra, que ocupa su posición entre Venus y Marte. Pero tampoco esto debe ser aceptado como un puro dato, sino que es necesario indagar su causa. ¿Por qué a los planetas les ha correspondido una determinada ordenación y no otra?

Los presupuestos para responder a estas cuestiones son éstos: 'Ninguna cosa ordenada ocurre por casualidad' y 'Dios siempre geometriza'. Ello supone que hay una razón para cada hecho y que esa razón ha de buscarse en la geometría. Pero a partir de aquí la conclusión no es automática. Kepler manifiesta haber dado vueltas una y otra vez a las anteriores preguntas sin lograr hallar la respuesta." [Rioja, Ana y Ordóñez, Javier: Teorías del universo. Volumen I. De los pitagóricos a Galileo, p. 196.]

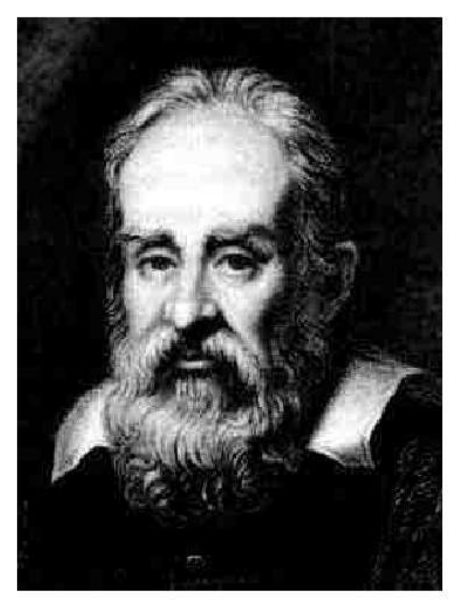
Uno de los asuntos que probablemente pesó en el progreso del heliocentrismo tiene que ver con la significativa simplificación y belleza matemáticas que las teorías de Copérnico y Kepler exhibían. Pero había razones de orden "ideológico". De muchas maneras, la suposición de que la ciencia debía exhibir matemáticamente el orden divino, lleno de armonía, simetría, pesó en la aceptación. De hecho, no resulta extraño que muchos de los primeros en aceptar el enfoque revolucionario fueran precisamente matemáticos; aquellos convencidos de que el universo había sido diseñado de una manera matemática. La realidad, como veremos, es que hasta que Galileo realizó su exploración de los cielos a través del telescopio fue posible obtener mayores evidencias a favor del heliocentrismo.

Kepler enfrentó algunos problemas para propagar y fortalecer sus ideas. En primer lugar, pesó la existencia de un estilo en su obra; en segundo lugar, la gran exigencia matemática también cosechó un problema; en tercer lugar, algunos afirman la existencia de compromisos metafísicos en su trabajo, que también creaban distancias. Sea como sea, debe decirse que en gran medida sus contemporáneos ignoraron sus resultados. Incluso Galileo, con quien tuvo correspondencia, nunca se refirió a las tres leyes de Kepler.

En la perspectiva histórica, a la larga, fueron importantes la simplificación en los cálculos y la superioridad matemática así como la coincidencia de las observaciones para apuntalar la teoría de Copérnico, aunque esto último -debe reconocerse- tomaría más tiempo.

12.4 Galileo

Fue la figura relevante en la defensa de la teoría heliocéntrica de Copérnico, para lo que asumió los resultados empíricos que habían sido obtenidos por Kepler y Brahe.



Galileo.

Si bien Galileo usó resultados matemáticos obtenidos durante la época renacentista, por ejemplo de Cardano y Tartaglia, debe decirse que el arma fundamental con la que libró sus batallas fue el telescopio. Esto fue así en tanto que por medio de este instrumento logró descubrir hechos que debilitaban poderosamente la visión geocéntrica y fortalecían la interpretación de Copérnico. Por ejemplo, Galileo descubrió que la Luna tenía montañas y depresiones, que Saturno parecía estar dividido en tres partes, que Venus al igual que la Luna posee fases, y que alrededor de Júpiter había 3 satélites y que el Sol tiene manchas. Por diversas razones, estos resultados afectaban la cosmovisión dominante en esa época. ¿Cuáles?

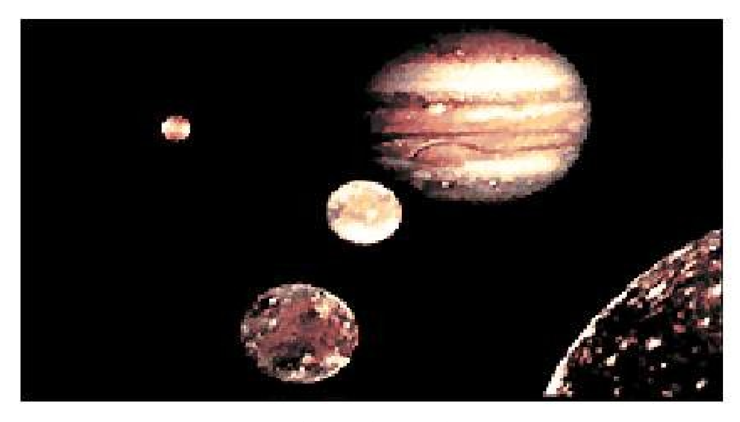
La vida de Galileo fue extraordinariamente interesante. Nació el 15 de febrero de 1564 en Pisa, Italia. Su padre fue Vincenzo Galilei (1520 - 1591), un músico profesional. Galileo recibió sus primeros estudios con los monjes de Vallombrosa y luego inició sus estudios en Pisa no en las matemáticas sino en medicina. Sin embargo, su interés en los trabajos de Arquímedes y Euclides lo motivó decisivamente hacia las matemáticas. Galileo enseñó de manera privada en Florencia y luego en la Universidad de Pisa, posteriormente sería contratado como profesor de matemáticas en la Universidad de Padua en el año 1 592. Es importante señalar que Padua estaba en el Principado de Venecia, que era independiente de la Roma papal, y que debido a la existencia de condiciones especiales de libertad permitía un importante ejercicio del pensamiento crítico. Esto era decisivo para el progreso de la indagación científica. Dos décadas después, aproximadamente, Galileo fue contratado por Cósimo II de Medici, el Gran Duque de Toscana, como su matemático y filósofo natural. En Florencia, Galileo continuó su obra y su batalla y, por supuesto, tuvo conflictos alrededor de la visión cosmológica heliocéntrica.

Sus observaciones revolucionarias fueron integradas en su obra Sidereus Nuncius (Mensajero de las Estrellas), en el año 1 610. Veamos por qué estas observaciones debilitaban la cosmología dominante.

Esta visión integraba algunas de las ideas que había afirmado Aristóteles en su Física: por un lado, el universo estaba limitado, era incorruptible y, por supuesto, era geocéntrico. Una de sus características: se trataba de un firmamento inmutable y, en particular, el número de astros era fijo. Se puede uno imaginar el impacto que ejerció el telescopio sobre ese esquema. Galileo mostró que el número de astros que se podía ver a simple vista era realmente muy pequeño. De hecho, Aristóteles había sugerido menos de 2000 estrellas. Con el telescopio todo cambiaba, había muchísimas más estrellas y muchos astros celestes. Lo más grave aún era que todo esto ponía en cuestión la idea de un firmamento inmutable.

Por otra parte, Galileo mostró que la Luna no era la esfera perfecta, liza y brillante que había establecido Aristóteles (1609), y que más bien era comparable al mismo planeta Tierra. Galileo decía:

"Cuando alguno quisiera parangonarla a la Tierra, las manchas de la Luna corresponderían a los mares y la parte luminosa a los continentes de la superficie terrestre, y yo verdaderamente he tenido desde antes la opinión de que, si se viera de gran distancia el globo terrestre, iluminado por el Sol, más lúcido sería el aspecto del terreno y más oscuro el de los mares".



Satélites de Júpiter.

Lo mismo sucedía al mostrar las lunas de Júpiter, pues en ese tiempo no se podía admitir la existencia de astros que giraran alrededor de otros aparte de la Tierra. Galileo descubrió cuatro de las 17 lunas de Júpiter. Al mostrar las fases de Venus, que son similares a las que tiene la Luna, la conclusión parecía inevitable: Venus tenía una órbita alrededor del Sol y no de la Tierra.

Y con relación a las manchas solares: para los aristotélicos el Sol era incorruptible, las manchas destruían esta percepción. Además, Galileo por medio del estudio de las manchas mostró el movimiento de rotación del Sol.

Estas observaciones iban, sin duda, directamente contra la idea de que la Tierra era el centro del universo. ¿Cómo iba a crearse al hombre en un lugar que no fuera el centro del universo? Cualquier duda que se ejerciera sobre la teoría geocéntrica debilitaba, entonces, esta concepción aceptada por la autoridad eclesiástica. Es por eso que debe entenderse bien la opinión del cardenal jesuita

Roberto Bellarmino:

"Como es de vuestro conocimiento, el Concilio de Trento prohibe la interpretación de las Escrituras de modo contrario a la común opinión de los santos padres. Ahora bien, si Vuestra Reverencia lee, no ya a los padres, sino a los modernos comentaristas del Génesis, los Salmos, el Eclesiatés y Josué, descubrirá que todos están de acuerdo en su interpretación de que literalmente enseñan que el Sol se halla en el firmamento y gira alrededor de la Tierra con enorme velocidad, que la Tierra se halla muy distante del cielo, en el centro del universo e inmóvil".

Se trataba de una carta dirigida al padre Paolo Foscarini, donde Bellarmino sintetiza los temores de la Iglesia:

"... querer afirmar de manera certísima que el Sol se halla en el centro del universo y Solo gira alrededor de su eje, sin efectuar movimiento de oriente a poniente, es una actitud muy peligrosa y que se supone que agitaría no Solo a los filósofos y teólogos escolásticos sino que a la vez perjudicaría a nuestra santa fe al contradecir a las Sagradas Escrituras". (12 de abril de 1 615).

Se afirma que Galileo recibió en el año 1{}616 una advertencia por parte de la Santa Inquisición para no seguir su defensa de la teoría de Copérnico, pero no se conoce con certeza el contenido de la misma. Veinte años después de aquel libro, en 1 632, Galileo volvió a la carga en confrontación directa contra la cosmología geocéntrica y la filosofía aristotélica. Esto lo hizo en un libro famoso: Dialogo dei massimi sistemi (Diálogo concerniente a los dos sistemas del mundo: el ptolomeico y el copernicano).

Esta obra fue publicada en Florencia e incluso dedicada al Papa. Fue escrita en italiano con el propósito de lograr una mayor audiencia, lo que revela el carácter de cruzada que había asumido la lucha de Galileo. Se sabe que el Papa Urbano VIII le había dado permiso a Galileo para que publicase este libro pero solo si lo hacía de manera matemática y no involucrara la doctrina.



Urbano VIII.

No obstante, Galileo fue llevado a juicio en el año 1 633. La Inquisición lo condenó a arresto domiciliario durante el resto de su vida. Además, tuvo que retractarse de sus ideas y no volver a publicar nada más. ¿Por qué Galileo escribió este libro de manera tan polémica? Nadie podría negar que se trataba de una auténtica "provocación". Probablemente, Galileo consideró que siendo viejo ya no tenía relevancia su audacia o, incluso, a lo mejor pensó que dado su prestigio y dada su

amistad con el Papa Urbano VIII no sería duramente castigado. Esos elementos seguramente salvaron su vida y, a pesar del sufrimiento personal que tuvo, logró una mayor proyección de las nuevas ideas cosmológicas y, más que eso, potenciar el progreso de la nueva ciencia.

A pesar de todo, Galileo logró escribir una obra que resumía mucho de su trabajo de años alrededor de la mecánica y el movimiento: Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nuove szience (Diálogo y Demostraciones Matemáticas Concernientes Dos Nuevas Ciencias).

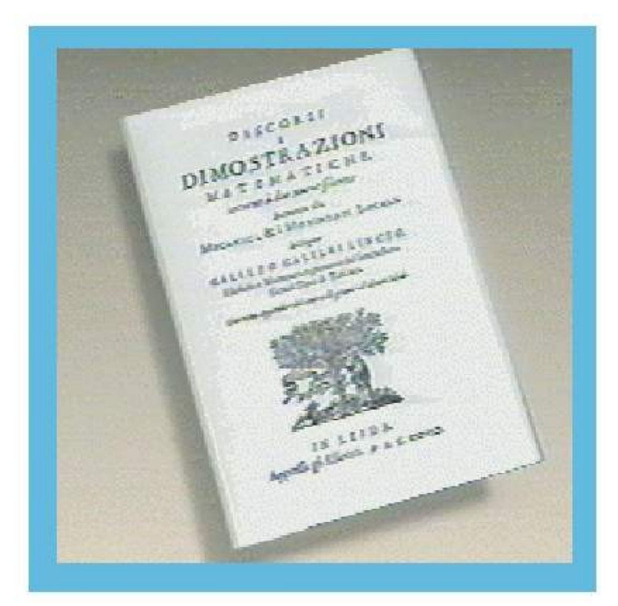
Este libro se sacó de Italia y se publicó en Holanda (Leiden) en el año de 1 638, teniendo una gigantesca repercusión en el destino de la metodología científica. Ya volveremos sobre esto.

Aunque durante bastantes años no se pudo publicar nada a favor de Galileo, finalmente el Papa Benito XIV en abril de 1 757 anuló el decreto de 1 616 que había prohibido apoyar o enseñar el sistema de Copérnico. Más aún, en el año 1 893 la Iglesia aceptó las opiniones de Galileo (Encíclica Providentissimus Deus, del Papa León XIII). Hacia finales del siglo XX la Iglesia Católica reconoció que el juicio de Galileo había sido un error y pidió perdón.

Aunque la Iglesia Católica llevó la batuta en esta historia de intolerancia no fue la única en ella: el padre de la reforma protestante, Martín Lutero, se expresó de Copérnico de la siguiente manera:

"... las gentes prestan oido a un astrónomo advenedizo que trató de demostrar que la Tierra gira, no el cielo o el firmamento, el Sol y la Luna. Quien quiere aparecer inteligente debe concebir algún sistema nuevo o que sea, por cierto, el mejor de ellos. Este necio desea dar vuelta a toda la ciencia astronómica; pero la Sagrada Escritura nos dice que Josué ordenó al Sol que se detuviera y no a la Tierra".

Más aún, la Facultad de Teología Protestante de Upsala en Suecia había condenado al científico Niels Celsius por su defensa y enseñanza del sistema de Copérnico. Y, hay que recordar, que el español Miguel Servet fue quemado vivo con todos sus libros en Ginebra el día 27 de octubre de 1 553, siendo el gran inquisidor en esta ocasión uno de los grandes padres de la fe protestante: Calvino.



Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nuove szience.

La historia de Galileo y su batalla por el sistema heliocéntrico lo sintetiza de la siguiente manera el físico británico Hawking:

"El libro, Diálogo sobre los dos máximos sistemas del mundo, fue terminado y publicado en 1632, con el respaldo absoluto de los censores, y fue inmediatamente recibido en toda Europa, como una obra maestra, literaria y filosófica. Pronto el Papa, dándose cuenta de que la gente estaba viendo el libro como un convincente argumento en favor del copernicanismo, se arrepintió de haber permitido su publicación. El Papa argumentó que aunque el libro tenía la bendición oficial de los censores, Galileo había contravenido el decreto de 1616. Llevó a Galileo ante la Inquisición, que lo sentenció a prisión domiciliaria de por vida y le ordenó que renunciara públicamente al copernicanismo. Por segunda vez Galileo se sometió. Galileo siguió siendo un católico fiel, pero su creencia en la independencia de la ciencia no había sido destruída. Cuatro años antes de su muerte, en 1 642, mientras estaba aún preso en su casa, el manuscrito de su segundo libro importante fue pasado de contrabando a un editor en Holanda. Este trabajo, conocido como Dos nuevas ciencias, más incluso que su apoyo a Copérnico, fue lo que iba a constituir la génesis de la física moderna." [Stephen Hawking: Historia del tiempo, 1 988].

Ahora bien, debe señalarse que la polémica era inevitable. Opina Paolo Rossi:

"El tono de diálogo dista mucho de estas actitudes de prudencia. El coloquio se desarrolla en Venecia en el palacio del patricio veneciano Giovan Francesco Sagredo (1571 - 1620), que encarna el espíritu libre y sin prejuicios, proclive al entusiasmo y a la ironía. El segundo personaje es el florentino Filippo Salviati (1583 - 1614), que representa al copernicano convencido y que se presenta como un científico que une a la solidez de las convicciones la disposición al diálogo del saber constituido, que no es ingenuo ni incauto, sino que defiende un orden que le parece no modificable, y considera peligrosa toda tesis que se aparte de ese orden: 'Este modo de filosofar tiende a la subversión de toda la filosofía natural y a desordenar y desbaratar el cielo, la tierra y todo el universo. 'Salviati representa además al público al que se dirige el Diálogo. Escrita en lengua vulgar, la obra no va dirigida a convencer a los 'profesores' representados por Simplicio. El público al que Galileo quiere persuadir es el de las cortes, de la burguesía y del clero, de las nuevas clases intelectuales. La primera de las cuatro jornadas que componen el Diálogo está dedicada a la destrucción de la cosmología aristotélica, la segunda y la tercera al movimiento diurno y anual de la Tierra, respectivamente, la cuarta a la prueba física del movimiento terrestre, que Galileo cree haber conseguido con la teoría de las mareas.

El Diálogo no es un libro de astronomía, en el sentido de que no expone un sistema planetario. Su único objetivo es demostrar la verdad de la cosmología copernicana y aclarar las razones que hacen insostenible la cosmología y la física aristotélicas; la obra no aborda los problemas de los movimientos de los planetas ni pretende explicarlos. Ofrece una representación simplificada del sistema copernicano, que carece de excéntricas y de epiciclos. A diferencia de Copérnico, Galileo hace coincidir el centro de las órbitas circulares con el Sol y no se entretiene en explicar las observaciones sobre el movimiento de los planetas." [Rossi, Paolo: El nacimiento de la ciencia moderna en Europa, p. 97 y 98.]

Debe mencionarse que a pesar de su gran defensa del sistema de Copérnico y el gran trabajo que desarrolló Galileo en la mecánica, continuó aceptando algunas ideas viejas. Por ejemplo, que las órbitas planetarias eran circulares. De hecho, como señala Mason:

"La gran obra de Galileo sobre los sistemas del mundo se publicó en 1632, unos trece años después de que Kepler hubiera dado a conocer la última de sus tres leyes del movimiento planetario. Mas Galileo ignoraba la obra de su amigo y mantuvo hasta el final que las órbitas de los planetas eran círculos y no elipses, como Kepler había demostrado en 1609." [Mason, Stephen F.: Historia de las ciencias. La Revolución Científica de los siglos XVI y XVII, pp. 52-53]

Otra debilidad: su opinión de que el universo era cerrado. También, finalmente, una extraña reticencia a aplicar las matemáticas sistemáticamente en la astronomía, como lo había hecho en la mecánica terrestre. Se afirma que estas debilidades le impidieron obtener la ley de la inercia.

Sería Newton quien establecería una fusión entre el cielo y la tierra.

La trayectoria y los resultados de Galileo deben poderse interpretar, también, dentro de un entorno más complejo y libre de un simple maniqueísmo. Galileo, por ejemplo, trató de encontrar sustento en las Sagradas Escrituras a la tesis copernicana, con lo que la comprometía de alguna manera. Señala Paolo Rossi:

"Galileo luchaba por conseguir la separación entre las verdades de la fe y las que procedían del estudio de la naturaleza. Pero no hay que olvidar que Galileo se movía también en un terreno mucho más resbaladizo: buscaba en las Escrituras una confirmación de las verdades de la nueva ciencia. En una carta escrita a Piero Dini el 23 de marzo de 1 614, Galileo se basa en el texto del Salmo 18, que el propio Dini le había señalado como uno de los pasajes considerados 'más contrarios al sistema copernicano (ibidem: V, 3 001)'. 'Dios puso en el Sol su tubernáculo... ': Comentando este texto y apuntando significados 'congruentes' con las palabras del profeta, Galileo presenta tesis típicamente platónicas y 'ficianas'. Una sustancia 'sumamente brillante, tenue y veloz', capaz de penetrar en cualquier cuerpo sin oposición, tiene su sede principal en el Sol. Desde allí se esparce por todo el universo y calienta, vivifica y torna fértiles a todas las criaturas vivientes. La luz, creada por Dios el primer día y el espíritu fecundante se han unido y fortalecido en el Sol, situado por ello en el centro del Universo, y desde allí se difunden nuevamente. El Sol es 'el punto de concurrencia en el centro del mundo del calor de las estrellas' y, como fuente de vida, lo compara Galileo con el corazón de los animales que continuamente regenera los espíritus vitales (ibidem: V, 297-305)". [Rossi, Paolo: El nacimiento de la ciencia moderna en Europa, p. 90]

Con ello:

"Galileo pretende demostrar con estas palabras que en los textos bíblicos se encuentran algunas verdades del sistema copernicano. En la Biblia estaría incluido el conocimiento de que el Sol está en el centro del universo y de que la rotación que realiza de sí mismo es la causa del movimiento de los planetas. El salmista conoce una verdad fundamental de la astronomía moderna: no se le ocultaba, escribe Galileo, que el Sol `hace girar a su alrededor todos los cuerpos móviles del mundo' (ibidem: V, 304).

Desde el momento en que Galileo utiliza toda su habilidad dialéctica para hallar en el texto sagrado una confirmación de la nueva cosmología, se arriesga a comprometer el valor de su tesis de carácter general, que establece una rigurosa distinción y separación entre el campo de la ciencia y el de la fe, entre la investigación acerca de cómo va el cielo" y cómo 'se va al cielo' (ibidem: V, 319)." [Rossi, Paolo: El nacimiento de la ciencia moderna en Europa, Barcelona: Crítica, 1998, p. 91]

Finalmente, estas batallas en el territorio de la cosmología deben interpretarse dentro de una perspectiva mucho más amplia: el combate contra la intolerancia y por la libertad del pensamiento, condiciones fundamentales para el progreso del conocimiento, de las ciencias y las tecnologías. Y, más que eso, del progreso en la calidad de vida de la especie humana.

12.5 Biografías



Johannes Kepler

Johannes Kepler nació el 27 de diciembre de 1 571 en Weil der Stadt, Württemberg, Alemania. En 1 576, su familia se mudó a Leonberg; durante ese mismo año, su padre, que era un soldado mercenario, dejó el hogar y aparentemente muere en la guerra de los países bajos. Su madre era hija de un posadero y fue en la posada de su abuelo donde Kepler vivió con su madre.

Estudió en una escuela local y después ingresó a la Universidad de Tübingen, ahí estudió astronomía con el reconocido astrónomo Michael Mastlin. El sistema enseñado en ese entonces era el geocéntrico, el cual se basa en el sistema ptolemaico que consistía en suponer que los siete planetas, vistos hasta ese momento, giraban alrededor de la tierra en movimientos circulares.

Kepler publica un trabajo en 1 596, donde asegura que los movimientos de los planetas no eran circulares, además considera que la luna no es otro planeta sino que es un satélite. Kepler llevó cursos de griego, latín y hebreo, idiomas que le fueron de utilidad para las lecturas acerca del estudio de las matemáticas. Kepler fue un hombre profundamente religioso, todos sus trabajos y escrituras estaban basadas en la idea de que Dios había creado al hombre y al universo de acuerdo a un plan matemático.

Los años en que Kepler vivió en Praga (1 594 - 1 600) fueron años muy productivos para él, además allí conoció al principal astrónomo de la época, Tycho Brahe. Hubo un cambio negativo en su destino en 1 611, cuando su hijo de siete años murió y luego su esposa Bárbara. En 1 612, Kepler fue excomulgado, lo que le causó mucho dolor. Entonces tuvo que salir de Praga, él y sus hijos se mudaron a Linz (Austria). En 1 613 se casó con Susanna, por la necesidad de que alguien cuidara de sus hijos.

Murió el 15 de noviembre de 1 630 en Regensburg, después de una corta enfermedad.



Tycho Brahe

Tycho Brahe nació el 14 de diciembre de 1 546 en Knudstrup, Dinamarca. Estudió leyes y filosofía en las Universidades de Copenhagen y Leipzig; pero sus intereses se desviaron a la astronomía, y pronto se convertiría en un reconocido astrónomo. Mantuvo intereses científicos en la alquimia y se hizo creyente de la astrología.

El 11 de noviembre de 1 572, descubrió una supernova en la constelación de Casiopea que después llevaría su nombre. Con ayuda económica del Rey de Dinamarca Federico II, construyó en 1 576 un observatorio en la Isla de Hveen en Copenhagen Sound. Este observatorio se llamó Uraniborg y en el sótano se instaló un laboratorio de alquimia. Tycho trabajó en el observatorio alrededor de veinte años hasta que tras mantener una disputa con el nuevo Rey, Tycho se vio obligado a cerrar el observatorio.

En 1 599, fue elegido como el Matemático Imperial del Emperador Romano Rodolfo II, en Praga. Johannes Kepler fue su asistente y después de que él muriera, su sucesor.

Murió el 24 de octubre de 1 601 en Praga, Bohemia, República Checa.

Nicolás Mercator

Nicolás Mercator nació en 1 620 en Eutin, Alemania. Ingresó a la Universidad de Rostock en 1 632. Nueve años después en 1 641, recibió su titulo y partió a Leiden por un periodo corto. En 1 642, regresó a la Universidad de Rostock, pero esta vez con un puesto de enseñanza.

En 1 648, comenzó a enseñar en la Universidad de Copenhagen, se marchó seis años después, a causa de la plaga. Mientras trabajó allí, publicó varios libros sobre trigonometría esférica, geografía y astronomía.

En 1 660 se mudó a Inglaterra, donde realizó más trabajos sobre astronomía. Allí dio también clases privadas y fue elegido Miembro de la Sociedad Real en 1 666. En 1 682, se mudó a Francia para diseñar una fuente en Versailles.

Murió el 14 de enero en París, Francia.

12.6 Síntesis, análisis, investigación

1. Lea cuidadosamente el siguiente texto

   "Hay sobrados motivos para poner en duda que Ptolomeo lograra restablecer la unidad de la imagen física del cosmos que Aristóteles persiguió con tanto afán. Lo que sí consiguió es sistematizar y perfeccionar la más exacta teoría astronómica que se formuló en muchos siglos. Durante la Baja Edad Media y el Renacimiento, Aristóteles y Ptolomeo simbolizarán dos modos distintos e incompatibles de enfocar el estudio del Cielo. El filósofo estagirita proporciona una concepción sistemática del cosmos en su totalidad, fundamentada en criterios físicos y cosmológicos. No arroja, en cambio, ninguna luz acerca de cómo calcular y predecir las posiciones de los astros.

   Por el contrario, el astrónomo alejandrino aporta cuantos procedimientos geométricos son necesarios para cumplir este último objetivo. Pero sus hipótesis cosmológicas tienen un alcance muy limitado. La tradición posterior afirmará sin vacilar que el cosmos realmente está constituido por un conjunto de ocho esferas concéntricas a la Tierra (tesis que a veces se atribuyó erróneamente al propio Ptolomeo). La física, esto es, la teoría de la materia y sus movimientos terrestres y celestes avala este modelo cosmológico simplificado. Otras cosa es el conjunto de círculos excéntricos, epiciclos, etc., del que el astrónomo se sirve para llevar sus cómputos celestes a buen fin. La astronomía, a diferencia de la física, no puede adoptar compromisos cosmológicos." [Rioja, Ana y Ordóñez, Javier: Teorías del universo. Volumen I. De los pitagóricos a Galileo, p. 83]

   Explique las diferencias entre las visiones cosmológicas de Ptolomeo y Aristóteles.

2. ¿Qué obra se considera el comienzo de la Revolución Científica?
3. Explique por qué la tesis heliocéntrica de Copérnico se planteó en su obra como una simple hipótesis? ¿Por qué evadió la polémica?
4. Explique los méritos de la teoría de Copérnico.
5. ¿Por qué la teoría de Copérnico usó círculos y no por ejemplo elipses?
6. ¿Cuál era la posición de Tycho Brahe frente a la teoría heliocéntrica? ¿Qué propuso?
7. Comente las creencias religiosas de Copérnico y Kepler y su relación con sus teorías cosmológicas.
8. Escriba las tres leyes de Kepler. Consigne cuándo fueron enunciadas por Kepler y en cuáles obras.
9. Investigue quién era Giordano Bruno. Escriba una biografía de una página.
10. ¿Cuál fue el principal instrumento que usó Galileo en su lucha por la teoría heliocéntrica? Explique cómo esta arma le permitía obtener hechos que iban en contra del esquema aristotélico y ptolomaico. Precise con detalle.
11. Comente las citas que incluimos con las palabras del cardenal Bellarmino.

12. Mencione las debilidades que Galileo tuvo con relación a la astronomía y que le impidieron obtener la ley de la inercia (Newton).

13. Lea cuidadosamente el siguiente texto:

"La sentencia a muerte del sistema aristotélico-ptolemaico se firma no en el momento de publicación del De Revolutionibus (1 543), sino cuando los copernicanos, aproximadamente medio siglo después, comienzan a defender una filosofía corpuscular y mecanicista totalmente incompatible con los supuestos básicos del mencionado sistema. La alianza entre heliocentrismo, corpuscularismo y mecanicismo resultará fatal para la idea del cosmos que los europeos habían hecho suya tras la recuperación del saber griego en el siglo XII.

Un universo nuevo se alumbra en el Barroco, del que todos nosotros somos herederos. Kepler y Galileo (incluidos en el volumen I de la presente obra) desarrollaron con acierto temas parciales de una nueva física celeste y terrestre. Pero la construcción del moderno mundo-máquina tiene otros protagonistas principales: Descartes (en la primera mitad de siglo) y Newton (en la segunda mitad). Ellos darán nombre a los dos sistemas mecánicos sobre los que se discutirá durante décadas y que influirán decisivamente en el pensamiento posterior. Finalmente se impondrá por méritos propios la mecánica newtoniana, eclipsando a la cartesiana. Además, el sistema del mundo de Newton incorporará las decisivas contribuciones de Kepler y Galileo, de modo que estos personajes quedarán unidos para la historia (a pesar de proceder de tradiciones filosóficas diferentes: Kepler no era ni atomista ni mecanicista; Galileo era lo primero, pero no lo segundo; Newton ambas cosas). No es posible, sin embargo, pasar por alto el completo edificio mecánico que Descartes trató de levantar a favor de Copérnico y, por encima de todo, en contra de Aristóteles y la escolástica." [Rioja, Ana, Ordóñez, Javier: Teorías del Universo, Volumen II de Galileo a Newton, pp. 120-121.]

¿Cuáles son las principales ideas que expresa el texto? Comente, con base en sus opiniones y las lecturas que ha hecho en este libro, las razones por las que una amalgama de heliocentrismo, corpuscularismo y mecanicismo ponían en cuestión el orden ideológico existente en la Edad Media.

14. Copérnico mismo afirmaba varias razones para proponer la visión heliocéntrica:

"La primera se refiere a la necesidad de llevar a cabo una reforma del calendario. Se trata pues de un motivo de carácter práctico. La segunda, por el contrario, obedece a criterios enteramente teóricos de inspiración pitagórico-platónica. Repugna a la razón, como dirá más adelante (Libro I, cap. 4), la sola idea de un mundo en el que los cuerpos celestes se muevan de forma irregular. El universo es un todo ordenado y, en consecuencia, racional. Violar un principio fundamental de orden, como es el de uniformidad, equivale a renunciar a la inteligibilidad del cosmos.

Por último, se esgrime como argumento la necesidad de conciliar astronomía y cosmología. Puesto que tal conciliación no puede llevarse a cabo desde los postulados de la astronomía geocéntrica tradicional, se propone la sustitución de éstos por otros nuevos. Si con ellos se logra proporcionar la verdadera forma del mundo y la simetría de sus partes, sin menoscabo de la precisión en el cálculo y la predicción, querrá decirse que el estudio del Cielo habrá entrado al fin por el buen camino. Y dicho camino no es otro que aquel que nos haya de

conducir a la obtención de conocimientos tal útiles como verdaderos y tan verdaderos como útiles." [Rioja, Ana y Ordóñez, Javier: Teorías del universo. Volumen I. De los pitagóricos a Galileo, p. 118]

Explique con cuidado la opinión de los autores.

15. Lea el siguiente texto con cuidado.

"Podemos, pues, resumir la situación a finales del siglo XVI y principios del XVII del modo siguiente. La hipótesis atomista era una doctrina tan difundida como controvertida. Giordano Bruno, Thomas Harriot (1560 - 1621), Isaac Beeckman (1588 - 1637), Pierre Gassendi (1592 - 1655) o el propio Galileo se encontraban entre sus partidarios. Enfrentados a ella estaban los defensores de la filosofía aristotélica y los teólogos católicos (que con frecuencia eran los mismos). Especialmente ilustrativo es lo ocurrido en los jesuitas. En su libro sobre el atomismo de Galileo, Pietro Redondi (1990) cuenta cómo el día 1 de agosto de 1632 (un año antes del proceso contra aquel) la Compañía de Jesús prohibió formalmente que la doctrina de los átomos fuera enseñada en todas sus escuelas y colegios (por cierto, muy prestigiosos). La razón esgrimida fue justamente la referida al problema de la interpretación del dogma eucarístico. Aquellos profesores de filosofía que dentro de sus filas habían sostenido esa herética posición fueron apartados de la docencia. Es el caso del español padre Rodrigo de Arriaga, profesor de la universidad jesuítica de Praga desde 1 623, que fue cesado por tal motivo diez años después." [Rioja, Ana, Ordóñez, Javier: Teorías del Universo, Volumen II de Galileo a Newton, p. 114]

Comente el debate entre religión y ciencia a partir de este texto y de la exposición que se hace en este capítulo.

16. Vamos a analizar el siguiente texto de Russell.

"Algunos de los hombres a quienes comunicó Copérnico su teoría eran alemanes luteranos, mas cuando ésta llegó al conocimiento de Lutero, el reformador se quedó profundamente sorprendido. 'La gente presta oídos -dijo- a un astrólogo advenedizo que se esfuerza por demostrar que la Tierra gira, no los cielos o el firmamento, el Sol y la Luna. Cualquiera que desee parecer inteligente tiene que idear algún nuevo sistema, el cual, de todos los sistemas, es, desde luego, el verdaderamente mejor. Este necio desea trastornar toda la ciencia de la astronomía; pero la Sagrada Escritura nos dice que Josué mandó pararse al Sol, y no a la Tierra.' Calvino, de modo análogo, demolió a Copérnico con el texto: 'El mundo está tan bien establecido, de modo que no puede ser movido' (Al. XCIII, I), y exclamó: ' ¿Quién se atreverá a colocar la autoridad de Copérnico por encima de la del Espíritu Santo?' El clero protestante era por lo menos tan intransigente como los sacerdotes católicos; a pesar de todo, pronto empezó a haber mucha más libertad de especulación en los países protestantes que en los católicos, porque en aquéllos el clero tenía menos Poder. El aspecto importante del protestantismo fue el cisma, no la herejía, pues aquél condujo a las Iglesias nacionales y las Iglesias nacionales no eran bastante fuertes para controlar al Gobierno secular. Esto fue en su totalidad una ganancia, pues las Iglesias, en todas partes, se opusieron prácticamente cuanto pudieron a toda innovación que procurara un aumento de felicidad o de saber en la Tierra." [Russell, Bertrand: Historia de la Filosofía Occidental, Tomo II: La Filosofía Moderna, p. 149]

Usted sabe que la Reforma protestante fue un proceso relevante en la constitución de la nueva sociedad. ¿Cómo explicaría usted la reacción tan negativa de los protestantes contra la cosmología copernicana?

17. Lea las siguientes citas.

"La obra cosmológica anterior de Kepler, El misterio del universo, aparecida en 1 596, poseía un carácter un tanto místico. Buscaba armonías matemáticas entre las órbitas de los planetas del sistema copernicano, hallando que los cinco sólidos regulares podían hacerse encajar entre las esferas de las órbitas planetarias. Cuando se vio en posesión de las observaciones de Tycho Brahe, su obra tornose más concluyente, si bien durante mucho tiempo se sintió obsesionado por la idea de que los movimientos de los cuerpos celestes habían se ser circulares y uniformes. Con todo, halló que tal idea no conseguía arrojar predicciones tan exactas como las mediciones de Tycho Brahe, ni con el sistema copernicano, ni con el ptolemaico, ni con el tychónico. Consiguientemente abandonó la idea y, al ensayar otras figuras geométricas, halló en 1609 que la elipse encajaba perfectamente, arrojando predicciones con el grado deseado de precisión." [Mason, Stephen F.: Historia de las ciencias. La Revolución Científica de los siglos XVI y XVII, p. 18]

Y:

"Copérnico y Kepler, en sus comienzos, no consideraban a las matemáticas como una mera herramienta intelectual, como un método de desarrollar una teoría científica con independencia del contenido de dicha teoría. Sus matemáticas eran de carácter metafísico, incorporando las preconcepciones de Pitágoras y Platón. Los cuerpos celestes eran necesariamente esféricos por lo que respecta a la forma, mientras que sus movimientos eran necesariamente circulares. La observación habría de acomodarse a estos presupuestos, ya que las formas matemáticas, las armonías, determinaban la estructura del universo, siendo una realidad previa a la percepción de los órganos de los sentidos." [Mason, Stephen F.: Historia de las ciencias. La Revolución Científica de los siglos XVI y XVII, pp. 34-35]

¿Qué nos enseña sobre la naturaleza de la construcción científica la información que se brinda en estos dos textos? Comente.

18. Analice con cuidado la relación entre física y cosmología que se encuentra señalada en el texto siguiente.

"Hay que reconocer, de todos modos, que durante veinte siglos los astrónomos fueron capaces de dar razón de movimientos orbitales no circulares y no uniformes mediante la sola combinación de círculos. Lo único que necesitaron es poder multiplicar su número cuanto fuera preciso, sin verse sometidos a restricciones físicas o de otro tipo. Así, según se ha visto, no pretendieron que sus artificios geométricos tuvieran realidad material. Y en general aceptaron como mal menor que las construcciones astronómico-geométricas no fueran compatibles con las hipótesis físicas. Su libertad para concebir modelos teóricos, en el marco de los postulados platónicos, estaba por encima de la conveniente conciliación entre física y astronomía. Por ello la astronomía había sido pura geometría celeste o, si se quiere, cinemática celeste.

Con Kepler, sin embargo, asistimos a una curiosa circunstancia. Tanto la primera como la segunda ley, formuladas en los términos que todos conocemos, son de carácter cinemático. Así, nos dicen cómo es la forma de las órbitas y cómo varía la velocidad de un planeta cualquiera al recorrerla. Pero de su enunciado no forma parte la explicación de las causas o fuerzas que determinan que las cosas sean así. En tanto que leyes cinemáticas representan la culminación de la astronomía heredada de la Antigüedad.

Sin embargo, Kepler no concibe la astronomía sin la física. En todo momento su investigación ha sido dirigida por hipótesis dinámicas, falsas en su mayoría, pero sin las cuales no hubiera llegado a formular las leyes que le han hecho famoso. En resumen, empleando una terminología anacrónica, puede decirse que trató de deducir la cinemática de la dinámica, fiel a la convicción de que la astronomía no es sino física celeste. No obstante, con el transcurso posterior de la ciencia y en especial con la obra de Newton, sus planteamientos cinemáticos se consolidaron plenamente, en tanto que sus especulaciones dinámicas pasaron al olvido. De ahí que todas las historias de la ciencia recojan su nombre asociado a tres leyes cinemáticas, y poco más. Algo que horrorizaría a su autor, y que tal vez lo consideraría como la última de las desgracias que se suma a la muchas que padeció en vida." [Rioja, Ana y Ordóñez, Javier: Teorías del universo. Volumen I. De los pitagóricos a Galileo, pp. 220-221]

¿Cuáles son la diferencias entre cosmología y astronomía según ese texto? Explique la relación entre cinemática y astronomía.

19. Estudie los siguientes textos de un gran historiador de la ciencia del siglo XX que aportó mucho a la metodología de esa disciplina: Thomas Kuhn.

"Tanto la historia como mis conocimientos me hicieron dudar de que quienes practicaban las ciencias naturales poseyeran respuestas más firmes o permanentes para esas preguntas que sus colegas en las ciencias sociales. Sin embargo, hasta cierto punto, la práctica, de la astronomía, de la física, de la química o de la biología, no evoca, normalmente las controversias sobre fundamentos que, en la actualidad, parecen a menudo endémicas, por ejemplo, entre los psicólogos o los sociólogos. Al tratar de descubrir el origen de esta diferencia, llegué a reconocer el papel desempeñado en la investigación científica por lo que, desde entonces, llamo 'paradigmas'. Considero a éstos como realizaciones científicas universalmente reconocidas que, durante cierto tiempo, proporcionan modelos de problemas y soluciones a una comunidad científica. En cuanto ocupó su lugar esta pieza de mi rompecabezas, surgió rápidamente un bosquejo de este ensayo." [Kuhn, Thomas S.: La estructura de las revoluciones científicas, págs. 13-14]

"Los paradigmas obtienen su status como tales, debido a que tienen más éxito que sus competidores para resolver unos cuantos problemas que el grupo de profesionales ha llegado a reconocer como agudos. Sin embargo, el tener más éxito no quiere decir que tenga un éxito completo en la resolución de un problema determinado o que dé resultados suficientemente satisfactorios con un número considerable de problemas. El éxito de un paradigma -ya sea el análisis del movimiento de Aristóteles, los cálculos hechos por Tolomeo de la posición planetaria, la aplicación hecha por Lavoisier de la balanza o la matematización del campo electromagnético por Maxwell- es al principio, en gran parte, una promesa de éxito discernible en ejemplos seleccionados y todavía incompletos. La

ciencia normal consiste en la realización de ésa promesa, una realización lograda mediante la ampliación del conocimiento de aquellos hechos que el paradigma muestra como particularmente reveladores, aumentando la extensión del acoplamiento entre esos hechos y las predicciones del paradigma y por medio de la articulación ulterior del paradigma mismo." [Kuhn, Thomas S.: La estructura de las revoluciones científicas, págs.: 51-52]

Explique qué es un paradigma. ¿Qué es ciencia normal? ¿El éxito de un paradigma garantiza su pertinencia o verdad? Use este concepto para explicar la polémica entre geocentrismo y heliocentrismo.

CAPITULO XIII

NUEVOS MÉTODOS EN LAS CIENCIAS



¿Cuál era el principal problema de los métodos escolásticos en relación con el conocimiento? En primer lugar, el asunto giraba en torno a que las verdades debían ser obtenidas por medio de la revelación divina y no por el concurso de la razón o la experiencia práctica. Durante la época medieval y antes del Renacimiento, no fueron muchos los que intentaron basarse en la experiencia como una fuente de conocimiento, o más bien, no lograron obtener mucho éxito. Sería, sin embargo, la experiencia sistemática junto a la descripción matemática, el principal mecanismo para la construcción de la ciencia moderna.

Aunque hay indicios de que en otras épocas se desarrollaban métodos experimentales o experiencias controladas, como en la Grecia antigua o en el mundo musulmán, fue sin embargo en el contexto europeo del siglo XVII cuando adquirirían la relevancia metodológica que provocaría un progreso sustantivo en el conocimiento.



Francis Bacon.

13.1 Bacon

Mucha relevancia para la metodología de la ciencia la tuvo Francis Bacon (1561 - 1626). Más que un científico, Francis Bacon fue un filósofo y un gran promotor del método experimental y de la búsqueda de medios institucionales o colectivos para el fomento de las ciencias. Llegó a ser Lord Canciller de Inglaterra bajo Jaime I.

En el año 1605 publicó Advancement of Learning (El avance del saber) y en 1620 (parcialmente) el Novum Organum, con un análisis sobre el método de la ciencia. Mason sintetiza su trabajo así:

"Bacon era fundamentalmente un filósofo y no un científico. Se propuso explorar las posibilidades del método experimental, ser un Colón de la filosofía, como él decía, interesando a otras personas para que llevasen a término dichas posibilidades. Su primera obra sobre el tema era El avance del saber, publicada en 1605, que constituía una primera exposición popular de sus opiniones. Su obra fundamental fue La gran instauración del saber, que se publicó parcialmente 1620, no acabándose de hecho nunca. Bacon pensaba dividirla en seis partes, primero una introducción general para lo que, según decía, serviría El avance del saber. La segunda parte, la más completa, consta de un análisis del método científico o El nuevo instrumento, como la llamaba. La parte tercera iba a ser una enciclopedia del saber artesanal y de hechos experimentales, mientras que la cuarta, que falta, había de mostrar cómo habría que aplicar el nuevo método a tales hechos. La parte quinta se ocuparía de las teorías científicas pasadas u presentes, dedicándose la sexta a la propia filosofía nueva, la síntesis final de las hipótesis extraídas de la enciclopedia de hechos y de la teoría científica existente." [Mason, Stephen F.: Historia de las ciencias. La Revolución Científica de los siglos XVI y XVII, pp. 25-26]

Su punto de partida refería a la observación como principio del conocimiento. La dimensión que enfatizó fue la inducción científica frente a la generalización, es decir la organización y análisis sistemático de las observaciones y hechos particulares y su repetición. De esta manera, él decía que el conocimiento no se podía mezclar con las causas finales; la lógica y la retórica sólo servían para organizar lo que ya se sabía, no para descubrir nuevo conocimiento.

No obstante, Bacon no le dio relevancia a las matemáticas y a la lógica deductiva, probablemente porque concebidas de otra forma habían estado presentes en los métodos típicos del orden medieval. Esto sería una importante debilidad en su pensamiento.

Experiencia y tradiciones artesanales

Bacon rechazó la construcción de un sistema filosófico y, más bien, subrayó la relevancia del método. Se colocó en la línea de conducta de Roger Bacon y aquellos primeros empiristas que dentro del mismo mundo medieval buscaron vías alternativas para la obtención de conocimiento. Rescataba una tradición de experimentación desarrollada por artesanos. No separados de ésta se encontraban en otros campos, por ejemplo, Vesalius (1514 - 1564), Aldrovandi (1522 - 1605) y Cesalpino (1519 - 1603), respectivamente, fisiólogo, zoólogo y botánico. También, debe citarse el trabajo de William Gilbert (1540 - 1603) sobre el magnetismo, codificado por ejemplo en su famosa obra De Magnete. Bacon enfatizó las tradiciones artesanales. Como nos informa Mason:

"Así pues, señalaba Bacon, el primer requisito del nuevo método para hacer avanzar a las ciencias y las artes era la investigación de nuevos principios, procesos y hechos. Tales hechos y principios

podrían derivarse del saber artesanal y de la ciencia experimental. Una vez comprendidos, llevarían a nuevas aplicaciones tanto en las artes como en las ciencias. Pensaba que muchos principios hallábanse ocultos e inapercibidos en los procesos artesanales de todos los días, los cuales se convertían por ello en una valiosa fuente de conocimiento científico. Tales procesos resultaban de particular interés por cuanto que poseían un carácter activo y experimental, entrañando el cambio y transformación de las sustancias naturales." [Mason, Stephen F.: Historia de las ciencias. La Revolución Científica de los siglos XVI y XVII, p. 28]

De hecho, más aun, debe subrayarse la existencia de esta tradición artesanal y práctica separada de la tradición erudita, pues se sabe que, con varios puntos de intersección, avanzaron recíprocamente y en conjunto, y apuntalaron el conocimiento. Las necesidades empíricas empujaron a la formulación de principios cada vez más generales y a asuntos más complejos en los que intervino el conocimiento matemático. Uno de los ejemplos fue el trabajo de Nicolo Tartaglia (1499 - 1557) quien estableció vínculos relevantes entre técnicos y arquitectos y las matemáticas. Se considera un punto medio entre Leonardo y Galileo. Esta relación entre prácticos y eruditos constituyó uno de los principales factores en la construcción de la nueva ciencia.

Los métodos en la ciencia y las matemáticas

Debe decirse que durante este periodo las matemáticas encontraron un relieve decisivo en la explicación científica de la realidad. Tanto por su influjo en la práctica como en la ciencias naturales, las matemáticas adquirirían un rostro diferente, cada vez más atadas a la explicación y manipulación de la realidad física. Por ejemplo, en la escogencia misma de la teoría heliocéntrica por Kepler y Copérnico pesó la conveniencia matemática propiamente que ésta suponía. Todo ello a pesar de las inconveniencias ideológicas, religiosas o políticas que el hacerlo suponía.

En el siglo XVII debe reconocerse el papel jugado por Descartes y por Galileo en la nueva visión de la ciencia y su método. Sin duda, transformaron los conceptos, las metas y la metodología de la ciencia, planteamientos revolucionarios en la búsqueda y el desarrollo del conocimiento.

13.2 Descartes

Nació en La Haya, Turena, Francia, en el año 1596. Se graduó como abogado en la Universidad de Poiters. Sin embargo, muy pronto se dedicó a las matemáticas. Éstas serían una gran pasión para este intelectual francés quien incluso fue soldado durante nueve años de su vida. Vivió cerca de veinte años en Holanda, donde escribió la mayoría de sus obras. Probablemente, fue en este país en el que encontró las condiciones, en particular la paz social y política, para desarrollar su pensamiento. Descartes, con un gran sentido pragmático y tal vez incluso defensivo, no quiso entrar en contradicción en Francia con su religión y sus leyes y prefirió instalarse en Holanda desde el año 1629. Una neumonía acabó con su vida, en el año 1650, después de haber estado un año en la corte de la Reina Cristina de Suecia.

Descartes fue un gran intelectual en su tiempo. Un gran filósofo, físico y matemático, e incluso uno de los fundadores de la biología moderna. Tuvo una importante influencia durante el siglo XVII. Sus dos primeros libros fueron Regulae ad Directionem Ingenii ("Reglas para la dirección de la

mente") en 1628, y Le Monde ("Sistema del mundo") en 1634. Esta primera obra publicada de manera póstuma.

En cuanto a la segunda obra, Descartes no la quizo publicar por temor a la persecución de la Iglesia Católica. En ella explicaba cómo los planetas giraban alrededor del Sol. Sin duda, la obra más decisiva intelectualmente fue el Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences ("Discurso del Método"), 1637, que contiene 3 apéndices que no suelen incorporarse en las típicas ediciones modernas del libro. Estos son: La Géométrie, La Dioptrique y Les Méteores.

Descartes fue un religioso devoto. De hecho, ofreció una prueba de la existencia de Dios a través de su método. Sin embargo, la Inquisición decidió castigar sus obras colocándolas en el Índice de libros prohibidos poco tiempo después de su fallecimiento.

El método

Descartes se colocó en ruptura con los planteamientos escolásticos y medievales. Trató de proponer un método diferente para el establecimiento del conocimiento verdadero del mundo.

Llegó a la conclusión de que ese método era, en esencia, el de las matemáticas, o por lo menos lo que él pensaba que era el método de éstas. Descartes establecía tres principios: en primer lugar, la aceptación como cierto solamente de aquello que aparezca en la mente como cierto y verdadero; en segundo lugar, que este proceso ofrezca ideas básicas, claras y distintas y, en tercer lugar, finalmente, que a partir de estas ideas y a través de la deducción lógica es posible obtener el conocimiento verdadero.

Para Descartes existen verdades innatas, claras y distintas. Para ello se basaba en un "principio de la evidencia". Formula la "duda metódica" que exige una evidencia racional para el conocimiento. Usando este método, Descartes concluye ciertas verdades. La primera es la existencia propia, con su famoso "pienso luego existo". En segundo lugar, concluye la percepción del mundo exterior: el mundo existe. En tercer término, es la comprensión de la estructura matemática del mundo: la estructura de la realidad es matemática. Claro, Descartes se pregunta si estas evidencias podrían ser el resultado o la acción de un genio maléfico y es aquí, precisamente, donde hace intervenir la existencia de Dios. La existencia de Dios es el fundamento de sus evidencias racionales.

Las matemáticas

Para Descartes la esencia de la ciencia estaba constituida por las matemáticas. La geometría, por ejemplo, ofrecía primeros principios para deducir las propiedades del espacio. Esto hacía Descartes al reducir la naturaleza de la materia a las propiedades de forma, extensión y movimiento en el espacio y el tiempo. Extensión y movimiento eran la clave. Precisamente, por ser estas propiedades expresables matemáticamente, Descartes afirmaba la naturaleza matemática de la realidad.

El sentido matemático, sin embargo, tenía para Descartes un origen divino. Dios creó el mundo bajo un diseño matemático. Si bien este gran intelectual de todos los tiempos ayudó en la ruptura con el pensamiento medieval escolástico y aristotélico, abriendo posibilidades para el pensamiento libre y para el progreso de las ciencias, también enfatizó la existencia de verdades a priori sin recurrir a la experiencia sensorial práctica, es decir, verdades de naturaleza metafísica.

Para Descartes, hay dos dimensiones decisivas de las matemáticas: la axiomática y la derivación lógica. Él pensaba que estas dimensiones podían ser aplicadas en todas las áreas del conocimiento. De hecho, los apéndices que hemos mencionado buscaban ser aplicaciones de este método.

Ruptura con el pensamiento medieval

¿Y cómo se separaba del pensamiento medieval y escolástico? La escolástica había establecido un modelo de la realidad organicista. A la par de esta metodología que enfatiza las matemáticas, Descartes propuso una visión mecanicista en el conocimiento de la realidad. Se trataba de entender que todos los fenómenos de la naturaleza se podían describir a través de leyes de la mecánica. Hay aquí, por supuesto, una influencia de los hallazgos en mecánica y física de la época. Esta visión ha tenido una gran influencia en la cultura y la ciencia occidentales hasta nuestros días. Entonces: Descartes se oponía a la visión medieval con un esquema mecanicista y matemático.

Otro ejemplo: Descartes afirmaba que la tierra y los astros eran de la misma naturaleza. Más aun, afirmaba que el universo era indefinido e, incluso, pensaba que eran posibles alteraciones momentáneas de la leyes de la naturaleza. Esto era una confrontación directa con la visión aristotélica y escolástica que establecía un mundo creado e inmutable que se conservaba perpetuamente.

Por otra parte, para Descartes los dominios de la ciencia y la fe debían ser separados claramente. Los argumentos de la fe y la autoridad no podía formar parte del razonamiento crítico y científico. En esto, Descartes convergía también con Kepler y Galileo.

Mientras que Bacon enfatizó el papel de la experiencia empírica, Descartes promovió el método deductivo y el poder de la razón. En éste las matemáticas eran decisivas. En su visión mecanicista del mundo, reducía el espacio a las categorías de extensión y movimiento, dentro de una cosmología regulada por la leyes de la mecánica, y buscaba reducir esta última precisamente a la geometría. No puede olvidarse que Descartes es uno de los creadores de la geometría de coordenadas, y de una visión de las matemáticas que reafirmaba el papel del álgebra de una manera novedosa, a pesar de que siempre consideraba a la geometría como la disciplina más importante de las matemáticas.

Énfasis diferentes

A diferencia de Bacon, Descartes buscó construir un sistema filosófico que fuera alternativo al esquema aristotélico y escolástico y que integrara de alguna manera a la nueva ciencia y los nuevos métodos.

No está de más mencionar que a partir de las ideas de Bacon y Descartes se establecieron dos tradiciones en la metodología de la ciencia moderna. Por un lado, el empirismo y, por el otro, el racionalismo. Mientras que en la primera se enfatiza la experiencia sensorial como fuente de verdad, en la segunda es la razón la que establece la verdad. En el desarrollo de la ciencia, las tradiciones racionalistas han ido cediendo espacio a las empiristas, aunque no puede decirse que estas discusiones de naturaleza epistemológica hayan sido sancionadas definitivamente.

Ya sea con el énfasis en la razón, en el mecanicismo y la deducción lógica, o en el imperio de la experiencia sensorial, la inducción y la observación sistemática, o una combinación de experiencia o experimentos controlados junto con descripciones matemáticas cuantitativas, con Descartes, Bacon y Galileo se afirmaron los fundamentos metodológicos que ayudarían al progreso de la nueva ciencia. Es posible afirmar que mientras Bacon descuidó el papel de las matemáticas, Descartes descuidó el papel de la experiencia empírica. Es tal vez en Galileo donde se obtiene una visión más equilibrada de la metodología de la ciencia. Aunque es mejor pensar en Newton como el gran realizador y condensador de estos métodos.

Un detalle que se debe esclarecer es el lugar para la experiencia en la construcción cognoscitiva. En la visión aristotélica había lugar para la experiencia. Es posible afirmar que la clave de la nueva ciencia además de retomar la experiencia sensorial y la recurrencia a la observación se encontraba precisamente en el establecimiento de descripciones matemáticas de los procesos físicos. Es este elemento de cuantificación, una búsqueda consciente y sistemática, lo que establece la diferencia fundamental. A partir de ellos, Newton y los científicos de los siglos siguientes construirán el conocimiento por medio de leyes matemáticas sobre la realidad.

13.3 Galileo

En este territorio adquiere especial relieve el trabajo de Galileo. De hecho, además de su batalla por la teoría heliocéntrica de Copérnico, más bien su ruptura con el pensamiento medieval y aristotélico, fue precisamente en en el estudio de la mecánica y la descripción matemática del movimiento que Galileo desarrolló su principal contribución al pensamiento científico propiamente. Lo que estableció como principio metodológico fue la cuantificación matemática de las afirmaciones sobre el mundo. Esto significaba una profunda ruptura cognoscitiva, el esquema cualitativo, rígido, abstracto, inflexible, del mundo medieval.



Galileo, retrato por Di Tito.

A esta visión metodológica debe añadirse un especial énfasis en la realización de experimentos controlados para probar la validez de sus teorías o para rechazarlas o para modificarlas y apuntar a nuevas más acertadas.

La descripción matemática

¿Cuál fue el corazón de la construcción de los nuevos métodos en las ciencias? ¿La astronomía o la mecánica? ¿Dónde arrancó y por qué? El siguiente pasaje de Mason nos da buenas respuestas:

"En el siglo diecisiete las matemáticas habían pasado a formar parte de la lógica del método científico, siendo una herramienta neutral de investigación más bien que un determinante a priori de la naturaleza de las cosas, constatando Descartes el profundo cambio que había tenido lugar en la condición de las matemáticas. El cambio no tuvo lugar principalmente en la astronomía, sino en la ciencia de la mecánica. En esta área se había dado una larga tradición tanto de práctica artesanal como de discusión culta, siendo en la mecánica donde surgió el método científico experimental-matemático. La ciencia de la mecánica y el método matemático experimental se desarrolló durante el siglo dieciséis en el norte de Italia, que era entonces quizá la región más avanzada técnicamente de toda Europa, especialmente por sus arquitectos e ingenieros. Frente a ello, Inglaterra, que se hallaba menos desarrollada técnicamente, produjo la ciencia del magnetismo y el método inductivo cualitativo, mientras que los alemanes, empleando viejos métodos, desarrollaron la ciencia de la astronomía." [Mason, Stephen F.: Historia de las ciencias. La Revolución Científica de los siglos XVI y XVII, p. 35.]

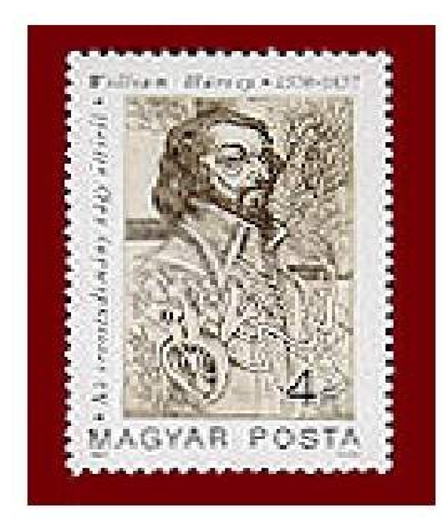
Galileo no solo estableció que por medio de las matemáticas era posible describir la leyes del mundo, sino que, además, afirmó que los primeros principios, aquellos de los que había que partir para luego deducir las leyes matemáticamente, debían ser establecidos a través de la experiencia y la experimentación. Esto representaba una extraordinaria ruptura con el pensamiento medieval y con la Antigüedad griega clásica, e, incluso, en relación con pensadores de su tiempo, como el mismo Descartes. La mayoría de los pensadores previos a Galileo afirmaban que los primeros principios debían ser extraídos de la mente. Descartes, por ejemplo, afirmaba ideas claras y distintas de las que todo debería partir. Para Galileo, el nuevo énfasis era la experiencia y sobre todo las matemáticas.

Es interesante notar que la mayoría de estos grandes científicos del siglo XVII y del siglo XVIII, más que grandes experimentadores, eran básicamente matemáticos buscando ofrecer formulaciones matemáticas y cuantitativas del mundo físico.

Si se entiende bien, esta metodología que afirma la experiencia y la cuantificación matemáticas en la descripción de la realidad externa, poseía una fuerza revolucionaria incluso más profunda que cualquier revolución en la cosmología. Con ella se establecía una ruptura con los criterios básicos medievales y escolásticos para el establecimiento y defensa de las verdades. La nueva ciencia ponía en jaque a la columna vertebral epistemológica del pensamiento anterior.

Fue una época de grandes realizaciones. No puede dejar de mencionarse que Harvey, quien ofreció una explicación mecánica de la circulación sanguínea, fue contemporáneo de Galileo, y en el año 1 628 publicaba su libro Exencitatio anatomica de motu cordis et sanguinis in animalibus que, en la tradición de Vesalio, significaba una nueva visión sobre la anatomía y la fisiología. De hecho, esta propuesta sobre la circulación de la sangre se realizó en el marco de una metodología experimental

y teniendo a la mano una visión mecanicista de la realidad. Antes que Harvey, Miguel Servet había descubierto la circulación sanguínea; su trágico destino ya lo mencionamos.



Harvey, estampilla.

La visión de Galileo afirmaba el carácter matemático de las leyes de la naturaleza. Esto lo establecía, por ejemplo, en el movimiento uniformemente acelerado, en el movimiento de los proyectiles, etc. Ahora bien, cabe preguntarse si esta aproximación era diferente a la sostenida por Platón. Al fin y al cabo, bajo la influencia pitagórica probablemente, Platón entendía las matemáticas como fundamento de la realidad. Esto es cierto. Sin embargo, la visión de Platón era dogmática y abstracta y más que interpretar la realidad y el mundo y describirlo por medio de relaciones cuantitativas matemáticas, buscaba hacer lo contrario: reducir el mundo a las matemáticas. No se trataba de encontrar armonía entre matemáticas y realidad a partir de la experiencia y la observación, sino imponer los objetos matemáticos al mundo. Para Galileo, por ejemplo, si la noción matemática no servía para explicar la realidad, simplemente había que encontrar otra relación. Para Platón, la realidad eran precisamente los objetos matemáticos, el mundo sensible y empírico era imperfecto.

Uno de los ejemplos clásicos con el que se ilustra el método revolucionario de Galileo es el de la caída libre. Para los aristotélicos y otros pensadores medievales los cuerpos caen porque tienen un peso y lo hacen hacia la tierra porque los objetos buscan su lugar natural, que es precisamente el centro de la tierra. Para Aristóteles, los cuerpos caían con una velocidad de acuerdo al peso de éstos. Es decir, un cuerpo más pesado cae más rápido que uno más liviano. Galileo demostró que eso era falso pues los cuerpos caen a la misma velocidad, si se elimina la fricción del aire. Esto, por supuesto, era un resultado conocido en la época. De hecho, el matemático Simón Stevin (1546 - 1620), en Estática e Hidrostática (1586), había descrito sus experimentos sobre la caída de los cuerpos. De nuevo, acudimos a la opinión de Hawking:

"La tradición aristotélica también mantenía que se podían deducir todas las leyes que gobiernan el Universo por medio del pensamiento puro: no era necesario comprobar por medio de la observación. Así nadie antes de Galileo se preocupó de ver si los cuerpos con pesos diferentes caían con velocidades diferentes. Se dice que Galileo demostró que las anteriores ideas de

Aristóteles eran falsas dejando caer diferentes pesos desde la torre inclinada de Pisa. Es casi seguro que esta historia no es cierta, aunque lo que sí hizo Galileo fue algo equivalente, dejó caer bolas de distintos pesos a lo largo de un plano inclinado. La situación es muy similar a la de los cuerpos pesados que caen verticalmente, pero es más fácil de observar porque las velocidades son menores. Las mediciones de Galileo determinaron que cada cuerpo aumentaba su velocidad al mismo ritmo, independientemente de su peso. Por ejemplo, si se suelta una bola en una pendiente que desciende un metro por cada diez metros de recorrido, la bola caerá por la pendiente con una velocidad de un metro por segundo después de un segundo, de 2 metros por segundo después de dos segundos, y así sucesivamente, sin importar lo pesada que sea la bola. Por supuesto que una bola de plomo caerá más rápidamente que una pluma, pero ello se debe únicamente a que la pluma es frenada por la resistencia del aire. Si uno soltara dos cuerpos de plomo caerían con la misma rapidez.

Las mediciones de Galileo sirvieron de base a Newton para la obtención de sus Leyes del Movimiento." [Stephen Hawking, Historia del tiempo, 1 988]

En todo esto, hay que entender lo esencial: la sustitución de una metodología cualitativa, la aristotélica, por otra novedosa que afirmaba la experiencia y la descripción matemática, es decir: lo cuantitativo. Es precisamente a partir de este cambio metodológico que se modifican los términos cualitativos y no cuantificables por otros sujetos a la cuantificación.



Galileo, estampilla.

Galileo y Descartes

Hay consenso en que la metodología para la ciencia sugerida por Galileo era más efectiva y avanzada, más concreta que aquella planteada por Descartes. Al igual que aquel, Galileo visualizaba un mundo de naturaleza matemática y mecánica, separado de lo especulativo y místico, y también de la teología. Para Galileo Dios también había creado un diseño matemático del universo. La matemáticas eran verdades absolutas sobre la realidad, menos cuestionables incluso que las Santas Escrituras. A la par de ello, Galileo, cosa que no se conoce mucho, afirmaba cierta forma de atomismo en la perspectiva de Demócrito.

Para Galileo, la ciencia debe seguir la ruptura de las matemáticas estableciendo proposiciones iniciales a partir de las cuales deducir conocimiento. Esto, sin embargo, no era nuevo en la historia del pensamiento porque el mismo Aristóteles concebía la ciencia estructurada a la manera de la geometría. La diferencia de fondo se encontraba en la forma de establecer esos primeros principios o axiomas. Para Galileo éstos eran extraídos de la experiencia y la experimentación. En esto, repetimos, Galileo se separó también de Descartes quien enfatizaba las verdades a priori sin la recurrencia, metodológicamente, a la experiencia como fuente de principios primeros. Esta posición era convergente con la del filósofo inglés Francis Bacon. Pero era más que eso, porque la experimentación en Galileo pretendía también corregir los errores de las consecuencias lógicas y deductivas y de los primeros principios establecidos por experiencia sensorial. Es decir, hay experiencia y experimentación en el principio y a lo largo del proceso.

Se sabe, no obstante, que a pesar de la propuesta metodológica de Galileo, este mismo realizó experimentos más bien mentales y no reales con toda la fuerza física de la experiencia. En esto, probablemente, pesó su visión de una realidad diseñada matemáticamente.

Matemáticas y experiencia

Puede decirse que para Galileo como también para Newton, Descartes, Huygens, y para muchos otros, las matemáticas jugaban un papel más importante que la propia experimentación. Es decir, de alguna manera, veían a la naturaleza y a la construcción científica con ojos de matemáticos. En ese sentido, la cantidad de experimentos o experiencias controladas específicas que se usaron no fueron muchas. De hecho, en esto tuvo que haber jugado un papel importante el énfasis en la astronomía con características específicas como ciencia y una mecánica que no brindaba todavía gran relevancia a la experiencia.

El método de Galileo implicaba el uso de la abstracción matemática de los objetos de la realidad, concentrando su atención en las propiedades básicas de éstos. De igual manera, enfatizó el uso de descripciones cuantitativas y no cualitativas de lo real. Al hacer esto último se separaba de los métodos aristotélicos y medievales así como de las aproximaciones de otros intelectuales de la época. Pero, más que eso, al colocar en el terreno de la descripción del cómo y no tanto del por qué, evitaba mayores discusiones en el territorio de la metafísica y por supuesto de las premisas de la ideología dominante.

El énfasis en la descripción cuantitativa constituye uno de los grandes aportes a la metodología de la construcción científica de todos los tiempos. El paso hacia delante dado por Galileo significaba, también, la adopción de nuevos términos y conceptos en los que trabajar. Mientras que para los aristotélicos, por ejemplo, términos como fluidez, rigidez, esencias eran los usuales, a partir de Galileo fueron adoptados los conceptos de distancia, tiempo, velocidad, aceleración, fuerza, masa, peso y otros. Estos últimos tenían la característica de poder ser medidos, cuantificados. Poder trabajar con términos y conceptos de objetos referidos, explicarlos, describirlos, sin necesidad de acudir a las razones profundas de su realidad, debe entenderse también como algo propio al momento o a la fase de la evolución del conocimiento.

Las respuestas a los "por qué" siempre requerirán dosis extraordinarias de conocimiento, y en muchos casos, incluso ya en el siglo XXI, no estamos en condiciones de proporcionarlas. Enfatizar los "por qué" en algún momento sólo podía servir para obstaculizar la aventura del conocimiento

científico, abrir puertas para la especulación metafísica, ideológica, religiosa, y debilitar su progreso.

Puede decirse que la escogencia de la descripción matemática en lugar de una explicación física no fue aceptada por todos los grandes científicos de la época. Para Huygens, por ejemplo, la idea de gravitación era absurda. Leibniz pensaba que era un poder incorpóreo inexplicable.

Sea como sea, la situación en el conocimiento físico fue el predominio de este énfasis en la descripción matemática, incluso la subordinación de la física a las matemáticas, explicando en parte por qué se dio una gran identificación entre matemáticos y físicos durante todos estos siglos.

13.4 Universidades y sociedades científicas

La nueva ciencia tuvo que enfrentarse a grandes adversarios. Por supuesto, tuvo que adoptar los mecanismos de las luchas políticas y sociales. Por ejemplo, el mismo Galileo que usaba activamente su telescopio escribía en italiano y no en latín culto, para poder así tener un auditorio más amplio e influir más en la sociedad de la época. Lo mismo sucedía con Bacon quien entendió la relevancia de la organización de los intelectuales y científicos y luchó por muchos medios para lograr su institucionalización y promoción más decididas.

Las viejas universidades eran extremadamente conservadoras, respondían a las necesidades, intereses e ideas medievales y no dejaban espacios para los nuevos métodos en la ciencia (excepción tal vez de la Universidad de Leiden). Por ejemplo, en la universidad en que estudió Newton, Cambridge, entre los años 1 600 y 1 630 no hubo ningún profesor de matemáticas. Durante el siglo XVII en Inglaterra, en las primeras décadas, el currículo no incluía matemáticas. En Francia la situación tampoco era diferente. Es por eso que fuera de ellas se construyeron importantes sociedades de científicos y librepensadores interesados en fortalecer estos nuevos procesos en el conocimiento. Las academias fueron un instrumento que cobijó los nuevos esfuerzos intelectuales.

Esta contradicción entre universidad y acción científica la recoge bien Rioja y Ordóñez:

"Y el hecho es que la fructífera empresa intelectual que resultó ser la universidad tras la recuperación del saber griego por obra y gracia de los musulmanes, en el siglo XVII se había convertido en un recinto simbólicamente amurallado al que se procuraba no accediera ninguna de las nuevas filosofías no aristotélicas que habían comenzado a proliferar de la mano de planteamientos corpuscularistas y mecanicistas. El conjunto de conocimientos que hoy bautizamos con el nombre de 'ciencia moderna' no encontraba su sitio en la vieja institución. Las dificultades de Galileo con sus colegas profesores pueden tomarse como ejemplo de una situación de conflicto entre los viejos y los nuevos planteamientos que no se limitaba a las universidades de las repúblicas italianas.

Como consecuencia de esta situación, quienes estaban interesados en las nuevas corrientes de pensamiento empezaron a constituir grupos informales fuera de los solemnes y rígidas aulas universitarias, cuyo objetivo era la libre discusión, comunicación y divulgación de cuantas ideas iban surgiendo, especialmente en el campo de la filosofía natural." [Rioja, Ana, Ordóñez, Javier: Teorías del Universo, Volumen II de Galileo a Newton, p. 164.]

Es en este escenario que debe inscribirse la creación de la Royal Society de Londres (1662) y la Académie Royale de Sciences de Francia (1666). La Royal Society se dio como resultado de un proceso de reorganización de creadores y amigos de la ciencia, en el cual jugó un papel muy relevante John Wilkins (1614 - 1672).

Desde 1644, Wilkins había creado un grupo que se llamó a sí mismo "Colegio Invisible"; y luego crearía la "Sociedad filosófica" que sobrevivió hasta 1690. Por otro lado, desde 1579 se había fundado el Gresham College, el centro científico de Inglaterra que también sería la sede de la Royal Society. La Royal Society y la Académie en realidad funcionaron de manera activa hasta más o menos 1690.

En Italia la primera sociedad notable fue la Academia Secretorum Naturae, de Nápoles (alrededor de 1560); la siguiente fue la Academia dei Lincei en Roma, que estuvo activa entre 1601 y 1630 bajo el patrocinio del duque Federico Cesi (entre sus miembros estaba el mismo Galileo). La última de esas sociedades científicas italianas fue la Academia del Cimento de Florencia, entre 1657 y 1667. En esta última estuvieron Vincenzo Viviani 1622 - 1703, y Torricelli, quienes fueron discípulos de Galileo.



Torricelli, estampilla.

En Francia, antes de la fundación de la Académie varios grupos se reunían: en Aix, en la casa del padre Claude de Peiresc (1620); en París, en la celda de Marin Mersenne se reunían Desargues, Descartes, Gassendi, Fermat y Pascal; también en la celda de Montmor. La Académie contó con el apoyo de Luis XIV.

En Alemania se había establecido la Societas Ereunética en Rostock en 1622 por obra del botánico Joachim Jung, y de igual manera el Collegium Curiosum sive Experimentale en 1672 en Altdorf. En estos casos, no obstante, tuvieron poca trascendencia. La Academia de Ciencias de Berlín se fundó en 1700, y tuvo como primer presidente a Leibniz. Tiempo después, Pedro el Grande de Rusia, en 1724, fundó la Academia de Ciencias de San Petersburgo.

Las sociedades favorecían el contacto entre los científicos de la época y el intercambio de las ideas, pero además crearon diferentes revistas académicas. La primera revista, aunque no fue creada por una sociedad sirvió a los mismos propósitos: Journal des Savants se inició en 1665. en el mismo año se creó Philosophical Transactions of the Royal Society. La Académie inició Histoire de l'Académie Royale des Sciences avec les Mémoires de Mathématique et de Physique. También publicó Mémoires de Mathématique et de Physique Présentés à l'Académie Royale des Sciences par Divers Sçavants et Lus dans ses Assemblées. Ya hemos mencionado el Acta Eruditorum fundada por Leibniz en 1682. La Academia de Berlín apoyó Histoire de l' Académie Royale de Sciences et Belles-lettres.

Estas organizaciones académicas promovían el trabajo de los científicos y matemáticos de su tiempo no sólo con el establecimiento de intercambios de ideas o de contactos directos, sino, también, por medio del estímulo a las investigaciones con remuneración económica, premios y apoyando de múltiples maneras una profesión que no tenía todavía un reconocimiento social suficiente como para poder vivir de ella.

Como dijimos al principio de este capítulo, debe entenderse la Revolución Científica como partícipe de un proceso con múltiples dimensiones: Renacimiento, reforma protestante, revoluciones políticas y una transformación decisiva de las expectativas del pensamiento. La ruptura con los esquemas del pensamiento de la época medieval y los nuevos cambios en los métodos de las ciencias influyeron en las nuevas formas de organización social y política. Por eso, puede afirmarse con propiedad que la Ilustración estuvo plenamente emparentada con la Revolución Científica del siglo XVII. No resulta extraño, entonces, que las teorías de Newton fueran introducidas en Francia por Voltaire y usadas políticamente contra el Ancien Régime.

13.5 Biografías



Gregorius Saint-Vincent

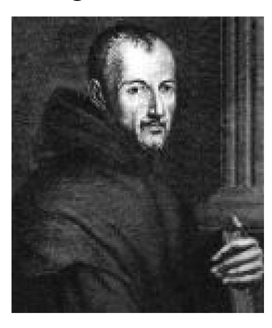
Gregorius Saint-Vincent nació el 8 de setiembre de 1 584 en Brujas, Bélgica.

En 1 595, inició sus estudios en la Universidad Jesuita de Brujas. En 1 601, se trasladó a Douai, en Francia, con el objetivo de estudiar matemáticas y filosofía. En 1 607, ingresó a la Orden Jesuita. En Roma, fue estudiante de Cristóforo Clavius. En 1 612, fue a Louvain a completar sus estudios en teología. Un año mas tarde, impartió lecciones de griego en diferentes lugares: primero en Bruselas, luego en Hertogenbosch y por último en Coutrai.

En 1 616, lo nombraron capellán de las tropas españolas en Bélgica. Tiempo después, enseñó en la Escuela Jesuita en Antwerp. De 1 621 a 1 625 impartió lecciones en Louvain y el año siguiente fue nombrado una vez más, como capellán del Emperador Romano Fernando II, en Praga.

En 1 632, tras el ataque del ejército sueco, huyó y dio clases en la Universidad Jesuita en Ghent, hasta su muerte.

Murió el 27 de enero de 1 667 en Ghent, Bélgica.



Marin Mersenne

Marin Mersenne nació el 8 de septiembre de 1 588 en Oize, Francia. Realizó sus estudios en el Colegio de Mans, y a partir de 1 604 estudió cinco años en el Colegio Jesuita en La Fleche. De ahí pasó a la Sorbona en donde estudió teología entre 1 609 y 1 611, año en el que se incorporó en la orden de los Mínimos.

En 1 612 regresó a París en donde se hizo sacerdote en la Place Royale. Allí, solía reunirse en su celda con Fermat, Pascal, Gassendi, Roberval, Beaugrand y otros matemáticos importantes. Además, desempeñó un papel esencial al difundir conocimientos matemáticos en Europa. Su interés le llevó a investigar los números primos, buscando una fórmula que los representara a todos.

Fue un gran defensor, ante las críticas teológicas, de Descartes y de Galileo. De hecho, gracias a él, el trabajo de Galileo fue conocido fuera de Italia. También buscó exponer las pseudo ciencias de la alquimia y la astrología. Al proponerle a Huygens el uso del péndulo como objeto para medir el tiempo, Huygens se inspiró y creó el tan conocido reloj de péndulo.

Murió el 1 de septiembre en París, Francia.



Pierre Gassendi

Pierre Gassendi nació el 22 de enero de 1 592 en Champtercier, Francia. Asistió a la escuela de Digne de 1 599 a 1 606, luego estudió en su casa supervisado por su tío y en 1 608 entró a la Universidad de Aix, en donde estudió filosofía y teología.

De 1 612 a 1 614 fue director del Colegio de Digne, recibió un doctorado en teología en la Universidad de Avignon y se ordenó en 1 615.

Fue profesor de filosofía en la Universidad de Aix de 1 617 a 1 623. Durante esos años, viajó a Flanders y Holanda y trabajó en sus estudios en ciencia y filosofía.

En 1 624, Mersenne trató de persuadirlo de dejar las matemáticas y la teología y practicar solamente la filosofía.

En 1 645 fue profesor de matemáticas en el Colegio Real de París.

Se considera que las teorías de Gassendi ayudaron a estructurar los métodos empíricos modernos. Fue un seguidor de la filosofía de Epicuro y estuvo implicado en ataques a las teorías de Aristóteles y de Descartes.

Se retiró en 1 648 y murió el 24 de octubre de 1 655 en Paris, Francia.

Pierre Rémond De Montmort

Pierre Rémond De Montmort nació el 27 de octubre de 1 678 en París, Francia. Pierre comenzó a estudiar leyes bajo el consejo de su padre, pero sus estudios se volvieron aburridos y Pierre decidió dejarlos e irse a viajar. Es así como partió a Inglaterra y recorrió todo el país, después visitó Alemania y otros lugares en Europa. Al recibir la herencia de su padre, compró una propiedad en Montmort (de ahí su nombre).

En 1 699, regresó a Francia e inició sus estudios bajo la tutela de Malebranche, quien le enseñó la filosofía y la física de Descartes. Después, prosiguió su estudio de las matemáticas, se inclinó hacia el álgebra y la geometría.

En 1 715 fue elegido como miembro de la Sociedad Real y un año más tarde fue elegido como miembro en la Academia de Ciencias.

Murió el 7 de octubre de 1 719 en París, Francia.



Evangelista Torricelli

Evangelista Torricelli nació el 15 de octubre de 1 608 en Roma, Italia

En 1 624, ingresó a la Universidad Jesuita en Faenza y luego ingresó a la Universidad Sapienza en Roma, donde mostró un gran talento. Tuvo por profesor a Castelli, con el tiempo se convirtió en su secretario y estuvo en este puesto de 1 626 a 1 632. Luego, por un periodo de nueve años, fue el secretario de Ciampoli y por último de 1 641 a 1 642, fue el secretario de Galileo.

Cuando Galileo murió, se desempeñó como profesor de filosofía y matemáticas en la Academia Florentina. Descubrió el principio del barómetro, con un experimento que realizó con su colega Vincenzo Viviani, luego construyó el instrumento. Fabricó telescopios y un tipo de microscopio.

Vivó sus últimos años en Florencia, donde fue el matemático oficial del Duque Fernando II de Toscana. Murió el 25 de octubre de 1 647 en Florencia, Toscana, Italia.

13.6 Síntesis, análisis, investigación

1. ¿Cuál era el punto de partida metodológico para la ciencia que proponía Francis Bacon?
2. Diga cuál fue la obra más relevante de René Descartes para el pensamiento occidental y mencione los títulos de sus apéndices.
3. Mencione los principios básicos del método cartesiano.
4. ¿Cómo se separaba Descartes del pensamiento escolástico y medieval? Explique con detalle.
5. Compare las diferencias entre las aproximaciones de Bacon y Descartes.
6. Explique el sentido de las leyes de la naturaleza que propuso Galileo.
7. Compare las visiones sobre la relación entre matemáticas y realidad que tenían Galileo y Platón.
8. Explique la teoría de la caída libre que propuso Galileo y por qué se separaba de la aristotélica.
9. Compare las posiciones de Galileo y Descartes en torno a la metodología de la ciencia.
10. Para el progreso de la ciencia, ¿qué es más importante, la matemática o la experiencia sensorial?

11. Comente el papel de las universidades durante esta época y explique la necesidad de crear sociedades de científicos.

12. ¿Qué hacían las sociedades científicas?

13. Estudie el siguiente texto.

    "Los estudiosos y los artesanos contribuyeron de modos diversos al nacimiento de la ciencia moderna. Diéronse dos elementos principales en la revolución científica del inicio de los tiempos modernos: en primer lugar, el surgimiento de un nuevo método de investigación, el método científico, y en segundo lugar, una transformación intelectual, el desarrollo de un nuevo modo de considerar el mundo. Los artesanos contribuyeron a la formación del método experimental de la ciencia moderna, mientras que los hombres de la tradición culta contribuyeron inicialmente más bien a la revolución intelectual, empleando métodos tradicionales tal y como veremos en el caso de Copérnico. No obstante, ambos elementos de la revolución científica dependían en última instancia de la convergencia e interpretación de las tradiciones artesanal y culta, proceso que podemos ver en marcha en los casos de un estudioso como Vives, que se ocupaba de las artes prácticas, o de un artesano como Leonardo, que se interesaba por la teoría del ímpetus. De este modo, la analogía de la máquina que más tarde formará parte del nuevo modo de considerar las cosas se extrajo de las artes, mientras que las matemáticas de los estudiosos se introdujeron en el modo de operar del método científico." [Mason, Stephen: Historia de las Ciencias 1. La Ciencia Antigua, la Ciencia en Oriente y en la Europa Medieval, pág. 159]

    Comente el influjo tanto de la tradición artesanal como la erudita en la formación de la ciencia moderna.

14. Lea cuidadosamente el siguiente texto.

    "Los hombres que fundaron la ciencia moderna tuvieron dos méritos que no se encuentran reunidos necesariamente: inmensa paciencia en la observación y gran audacia en la construcción de hipótesis. El segundo de estos méritos había pertenecido a los primero filósofos griegos; el primero existió, en grado considerable, en los últimos astrónomos de la Antigüedad. Pero ninguno, entre los antiguos, salvo quizá Aristarco, poseyó ambos méritos, y en la Edad Media nadie poseyó ninguno de ellos. Copérnico, como sus grandes sucesores, poseyó los dos. Supo todo lo que podía saberse, con los instrumentos existentes en su tiempo, acerca de los movimientos aparentes de los cuerpos celestes en la esfera celeste y se dio cuenta de que la rotación diurna de la Tierra era una hipótesis más económica que la revolución de todas las esferas celestes. Conforme al criterio moderno, que considera todo movimiento como relativo, la sencillez es la única ganancia resultante de su hipótesis, pero este no era su criterio ni el de sus contemporáneos. En lo que respecta a la revolución anual de la Tierra hubo también una simplificación, no tan notable como en la rotación diurna. Copérnico necesitó todavía epiciclos, pero menos que los exigidos por el sistema tolemaico. Hasta que Kepler no descubrió sus leyes, no adquirió la nueva teoría toda su simplicidad." [Russell, Bertrand: Historia de la Filosofía Occidental, Tomo II: La Filosofía Moderna, pp. 148-149]

    Explique las ideas principales que expresa Russell en torno a los métodos de la ciencia moderna.

15. Estudie la siguiente cita.

"Bacon rechazaba los axiomas metodológicos de los griegos, como la superioridad de los cuerpos celestes y la circularidad de sus movimientos, si bien aceptaba parte del contenido de sus doctrinas, como la posición central de la tierra en el universo. En general sólo resultaba original por lo que respecta al nuevo método que promovía, e incluso éste no recibió una aplicación inmediata. Durante el siglo diecisiete, el progreso en la ciencia se produjo principalmente gracias al método matemático-deductivo desarrollado por Galileo y elaborado por Descartes, siendo tan sólo en el siglo diecinueve cuando el método cualitativo-inductivo de Bacon llegó a su apogeo con el desarrollo de la geología y la biología evolucionista. Fue entonces cuando se recogieron de todo el globo vastas colecciones de hechos, básicamente de carácter cualitativo, aplicándose el razonamiento inductivo a la elaboración de teorías geológicas y biológicas." [Mason, Stephen F.: Historia de las ciencias. La Revolución Científica de los siglos XVI y XVII, p. 32]

Comente las diferencias entre el método deductivo y el inductivo con base en el texto anterior. ¿Por qué piensa usted que el deductivo en Occidente fue decisivo antes que el inductivo? ¿O fue al revés?

16. Lea con cuidado la siguiente cita.

"Bacon destacó el aspecto esencialmente práctico del nuevo movimiento, sus aplicaciones al mejoramiento de las artes y su utilidad para lograr una apreciación del mundo que nos rodea, más conforme con el sentido común. Por haber vivido en la corte de Inglaterra isabelina y jacobiana, advirtió que sus dificultades no provenían tanto de la existencia de sistemas rígidos de pensamiento, como de la necesidad de establecer sólidos fundamentos institucionales para una filosofía nueva y que fuese generalmente aceptable. Esto tenía que hacerse no sólo sustituyendo las viejas concepciones, sino también poniendo orden en el caos de las especulaciones que la Reforma había suscitado en Inglaterra. Descartes, por su parte, tuvo que luchar en contra de un sistema medieval atrincherado en las universidades oficiales de Francia; y únicamente podía tener éxito empleando una lógica más clara e intelectualmente más apremiante que la de sus opositores." [Bernal, John D.: La Ciencia en la Historia, pp. 420-421]

Explique el papel del sentido común en la metodología de Bacon, según Bernal. Refiérase a la institucionalización de las ciencias. Comente la comparación entre Descartes y Bacon.

17. Considere los dos textos que citamos a continuación:

"Así pues, Newton especificó que en filosofía natural el punto de partida de las demostraciones matemáticas tenía que ser los efectos observados y las leyes del movimiento mecánico. Descartes había defendido la misma opinión, sugiriendo que los fenómenos naturales deberían explicarse en términos mecánicos, ya que nos hallábamos muy familiarizados con las operaciones de las máquinas y otros ingenios mecánicos, debiendo además explicar lo desconocido en términos de lo conocido era explícito en la obra de Newton."

"No obstante, Newton difería de Descartes en que distinguía tajantemente entre los principios dados experimentalmente y los principios dados por intuición. Newton era

contrario al método cartesiano de basar las demostraciones científicas en ideas supuestamente seguras e indubitables ofrecidas por intuición al espíritu libre de nubes. Para Newton semejantes ideas eran meras hipótesis y declaraba que él no usaba hipótesis." [Mason, Stephen F.: Historia de las ciencias. La Revolución Científica de los siglos XVI y XVII, pp. 103 y 105, respectivamente]

Explique con sus palabras las diferencias en cuanto a la metodología de la ciencia que existían entre Descartes y Newton.

18. Estudie el siguiente pasaje.

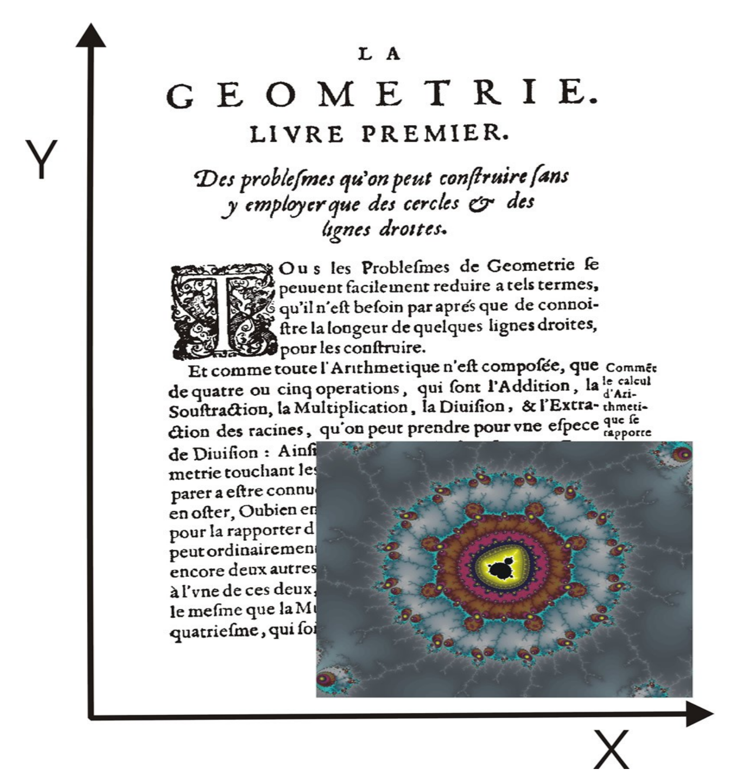
"Ningún problema es más difícil que el de la causalidad histórica. Pero el desarrollo de la ciencia moderna en Europa en los siglos XVI y XVII, o bien debe ser considerado milagroso, o bien debe ser explicado, aunque sea de manera provisional y tentativa. Este desarrollo no fue un fenómeno aislado; ocurrió pari passu con el Renacimiento, la Reforma y el surgimiento del capitalismo mercantil seguido por la manufactura industrial. Tal vez, cambios sociales y económicos concomitantes que sobrevinieron sólo en Europa constituyeron el ambiente en el que las ciencias naturales pudieron elevarse finalmente por encima del nivel del artesanado superior, el de los técnicos semimatemáticos. La reducción de toda calidad a cantidades, la afirmación de una realidad matemática que estaba detrás de todas las apariencias, la proclamación de un espacio y un tiempo uniformes en todo el Universo, ¿no fue todo esto algo análogo a la estandarización del valor por el comerciante? No había más bienes o mercancías, joyas o monedas, que las que podían ser intercambiadas en determinado número, cantidad y medida.

De esto hay abundantes huellas entre nuestros matemáticos. La primera exposición escrita de la técnica de la contabilidad de doble entrada se halla en el mejor texto de matemáticas de que se disponía a comienzos del siglo xvi, la Summa de Arithmetica (1 494) de Luca Pacioli. La primera aplicación de la contabilidad de doble entrada a los problemas de las finanzas y la administración públicas se hizo en las obras del ingeniero-matemático Simón Stevin (1 608). Hasta Copérnico escribió sobre la reforma monetaria (en su Moneta Cudendae Ratio, de 1 552). El libro de Robert Recorde en el que se usó por vez primera el símbolo de la igualdad (Wheistone of Witte [La amoladera del ingenio], 1 557) fue dedicado a 'Los Directores y demás miembros de la Compañía de Mercaderes en Moscovia', con el deseo de 'un continuo incremento de las mercancías de su tráfico'. La obra de Stevin Disme comienza con las palabras: '¡Buena suerte a todos los astrónomos, agrimensores, medidores de tapices, toneles y otras cosas, a todos los acuñadores de moneda y comerciantes!' Tales ejemplos podrían multiplicarse indefinidamente. El comercio y la industria estaban 'en la atmósfera' como nunca lo habían estado antes." [Needham, Joseph: "Las matemáticas y las ciencias en China y Occidente", en Barnes, Barry (Comp.): Estudios sobre sociología de la ciencia, p. 43]

Explique la hipótesis que plantea Needham en torno a los factores que motivaron la ciencia europea.

CAPITULO XIV

REVOLUCIÓN EN LA GEOMETRÍA



L A

GEOMETRIE.

LIVRE PREMIER.

Des problesmes qu'on peut conſtruire ſans y employer que des cercles & des lignes droites.

Tous les Problesmes de Geometrie ſe peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'eſt beſoin par aprés que de connoiſtre la longeur de quelques lignes droites, pour les conſtruire.

Et comme toute l'Arithmetique n'eſt compoſée, que de quatre ou cinq operations, qui ſont l'Addition, la Souſtraction, la Multiplication, la Diuiſion, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne eſpece de Diuiſion : Ainſi
metrie touchant le
parer a eſtre connu
en oſter, Oubien en
pour la rapporter d
peut ordinairemen
encore deux autres
à l'vne de ces deux,
le meſme que la M
quatrieſme, qui ſo

Commẽt le calcul d'Arithmetique ſe rapporte

El siglo XVII fue un contexto en el que las necesidades prácticas de una sociedad emergente provocaban reclamos en el conocimiento y, en particular, en las matemáticas. Las exploraciones geográficas empujaban el estudio de las trayectoria de las naves, la construcción de mapas. La astronomía necesaria para la navegación empujaba al estudio de las secciones cónicas. El diseño de lentes para telescopios y microscopios requería resultados en las formas de las superficies y curvas generadoras de ellas. Los proyectiles para la guerra empujaban el estudio de curvas parabólicas. Calcular áreas, longitudes y volúmenes era importante.

De manera privilegiada, la geometría recibiría una atención que, sin embargo, no reproduciría las fronteras de la Antigüedad. La integración de los nuevos resultados algebraicos con la geometría abriría una nueva era, que ya abordaremos. Vamos, no obstante, a empezar por la proyectiva.

14.1 Geometría proyectiva

En todo esto, el asunto planteado primeramente por Alberti, del comportamiento de las proyecciones de una figura, tan cercano a los trabajos de perspectiva, también fue relevante. Los métodos que se desarrollaron formaron una disciplina en sí misma.

Fue Girard Desargues (1591 - 1661) el primero en abordar trabajos en esta dirección. Creó nuevos métodos y conceptos, y a través de la proyección y la sección como método de prueba abordó diferentes estudios de las secciones cónicas de una manera general. Su nueva interpretación de la geometría ofreció una nueva visión sobre esta disciplina. Ya en el año 1636 este arquitecto de la ciudad francesa de Lyon había escrito un libro sobre perspectiva. Sin embargo, será en 1639 que ofrecerá los conceptos fundamentales de la geometría proyectiva: Brouillon projet d'une atteinte aux évenements des rencontres d'un cone avec un plan.

Se afirma, sin embargo, que fue Blaise Pascal (1623 - 1662) quien más contribuyó a la geometría proyectiva en esta época. El trabajo de Blaise Pascal también se asoció a las probabilidades, a un famoso teorema de un hexágono inscrito en un círculo, al triángulo aritmético formado por coeficientes binomiales, al principio de inducción completa así como a asuntos propiamente de los infinitesimales.

También se puede citar el trabajo de Philippe de La Hire (1640 - 1718).

Los trabajos en geometría proyectiva contribuyeron en la búsqueda de métodos generales en las demostraciones matemáticas, usando procedimientos más amplios que los de Apolonio, por ejemplo. Esta disciplina estuvo vinculada a los asuntos de perspectiva de los pintores y al uso de las secciones cónicas.

Ahora bien, durante el siglo XVII el interés fundamental de los matemáticos no recayó en la geometría proyectiva, sobre todo porque lo más relevante eran, por un lado, la potencia de los métodos algebraicos en la solución de los múltiples problemas científicos y, por el otro, las aplicaciones. Los trabajos en la geometría proyectiva volverían a retomarse hasta el siglo XIX. Esto lo comenta Bell, en términos comparativos con la lógica simbólica:

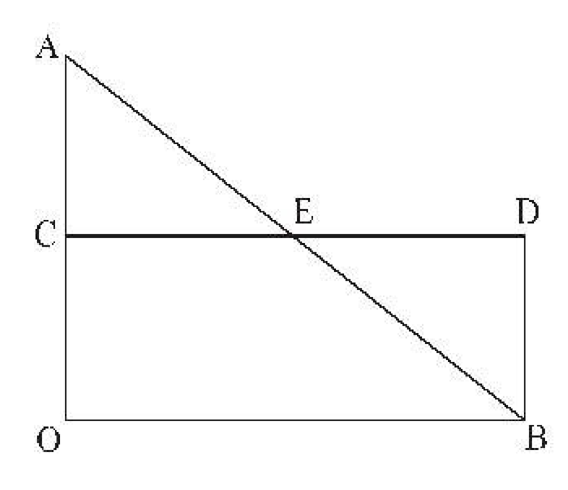
"La evolución de la geometría proyectiva sintética y de la lógica simbólica constituye un contraste interesante de supervivencia de lo anticuado en matemáticas. De ambas nos ocuparemos en capítulos posteriores; por ahora nos limitaremos a señalar la notable diferencia que existe entre su suerte y la prosperidad uniforme de otras creaciones del siglo XVII. La geometría proyectiva sintética, después de que la inventaron Desargues y Pascal, languideció hasta principios del siglo XIX, en que se hizo muy popular entre los geómetras que no gustaban del análisis. El sueño de Leibniz de una ciencia matemática de la deducción quedó adormecido hasta mediados del siglo XIX, y aún entonces atrajo muy pocos, aunque Leibniz había previsto la importancia que había de tener la lógica simbólica para toda la matemática, e hizo personalmente considerables progresos hacia un álgebra de las clases. Tan solo en la segunda década del siglo XX consiguió la lógica matemática rango de capítulo principal de las matemáticas." [Bell, E.T.: Historia de las matemáticas, p. 145]

14.2 Geometría de coordenadas

Hay que retrotraer la reflexión a las contribuciones previas en esta nueva relación entre geometría y álgebra, y para eso hay que citar dos autores: Oresme y Vieta.

Oresme

Los conceptos de tiempo, rapidez, distancia y velocidad instantánea fueron estudiados por Giovanni di Casoli, Oresme y otros; incluso habían ofrecido representaciones gráficas. Por ejemplo, Oresme representaba la velocidad variable con el tiempo, representaba el tiempo sobre una línea horizontal (le dio el nombre de longitud), y las velocidades en varios momentos con líneas verticales (latitudes).



Longitud y latitud.

Aquí se representa la velocidad decreciente de una manera uniforme de $\overline{OA}$ a $\overline{OB}$ (donde es 0). Oresme señalaba que $OBDC$ tiene la misma área que OAB.

Sin duda, la dirección apuntaba a las coordenadas, aunque sin embargo los progresos no se dieron tan rápidamente, en términos históricos. La idea que está presente aquí es la de asociar conceptos físicos y curvas matemáticas. Es decir, se trataba de describir el movimiento por medio de curvas, y, al revés, obtener información sobre el movimiento al analizar las curvas.

La representación gráfica permitía muchas cosas: por ejemplo, a Galileo obtener información sobre el movimiento de proyectiles; a Torricelli le permitió el uso de conceptos de movimiento para obtener el área bajo una curva. En ese sentido, Galileo retomó estas nociones de Oresme y les dio una precisión matemática que no tenían. Es muy conocido el hecho de que Galileo mostró cómo era una curva parabólica la que mostraba el movimiento de los proyectiles (en el vacío). Para ello, estableció dos componentes del movimiento: vertical (altura) y horizontal.

Habrá que llegar a Descartes y Fermat, sin embargo, para obtener plenamente las coordenadas.

Relación entre álgebra y geometría

Aquí hay que enfatizar la relación entre geometría y álgebra.

Podemos afirmar que hasta el siglo XVII el álgebra siempre estuvo subordinada a la geometría; con la geometría de coordenadas se dio una inversión decisiva para el destino de las matemáticas modernas. En primer lugar, debe mencionarse el papel y el valor especiales que le dieron los árabes e hindúes al álgebra y la aritmética. Debe subrayarse, sin embargo, el trabajo realizado por Vieta en el álgebra con el propósito de resolver problemas de construcción geométrica.

Vieta

François Viète (o Vieta, latinizado el apellido) fue un abogado que realizaba sus trabajos matemáticos como un hobby.

No pretendía una ruptura con la obra de los clásicos griegos, más bien se consideraba a sí mismo como un continuador de ésta; estableció una diferencia clara entre aritmética (logística numerosa) y álgebra (logística speciosa). También fue el primero en la utilización sistemática de letras para representar las incógnitas y potencias y, lo que es muy relevante, coeficientes. Si bien interpretaba el álgebra como instrumento para hacer geometría, le daba a ésta un valor autónomo, propio. Oresme apuntaba hacia las coordenadas. Vieta hacia el método operatorio, siguiendo a Diofanto.

Descartes diría, años después, que él empezó donde Vieta terminó.

Un ejemplo nos puede permitir comprender la diferencia conceptual en la comprensión de la naturaleza del álgebra en la geometría entre Vieta y Descartes: para Vieta la común expresión x^2 significaba un área (es decir: un elemento geométrico), mientras que para Descartes se trataba de un número. El mismo Descartes era consciente de que con eso se separaba de sus predecesores.

Descartes y Fermat apuntaron a métodos generales en el estudio de las curvas. El caso de Descartes es muy conocido. Sin embargo, también debe citarse la contribución de Fermat en esa misma tesitura, en la obra Ad Locos Planos et Solidos Isagoge de 1 637, en la que declara su búsqueda de un método universal para el estudio de las curvas.



Fermat, estampilla.

Fermat

Pierre de Fermat había escrito un artículo sobre geometría antes incluso que apareciera la Géometrie de Descartes, pero éste fue publicado póstumamente hasta el año de 1 679.



Arithmeticorum Liber II. 61

IN QVAESTIONEM VII.

QVAESTIO VIII.

OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

QVAESTIO IX.

Problema 8 del libro II de la Arithmetica de Diofanto con comentarios de Fermat.

Alrededor del año 1629, Fermat se supone que inició una restauración del libro de Apolonio Lugares Planos, con base en referencias que había en la Colección Matemática de Pappus, con algunas de las ideas de Vieta y usándolas en el estudio del nuevo método.

Fermat ponía las cosas así:

"Siempre que en una ecuación final aparezcan dos cantidades incógnitas, tenemos un lugar geométrico, al describir el extremo de una de ellas una línea, recta o curva".

Se afirma que aunque conocía los métodos de Vieta para resolver problemas geométricos, se basó directamente en los trabajos de Diofanto y los de Apolonio, los cuales expresó directamente de manera algebraica.

Se juzga el estudio de Fermat del álgebra de Diofanto como un enriquecimiento con resultados originales de un tema clásico. Es precisamente en la obra traducida al latín y accesible en 1621 que se encuentran muchas de las notas marginales realizadas por Fermat que luego fueron famosas. Entre ellas la conjetura que

$$x^n + y^n = z^n$$

no era posible para valores de x, y, z y $n > 2$.

Este resultado fue demostrado hasta hace muy pocos años. En el artículo: "Modular elliptic curves and Fermat's last theorem", por Andrew J. Wiles (1 995), Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 141, No. 3 (Mayo, 1 995).

Fermat usó las coordenadas oblicuas, no usó el eje de las y explícitamente ni las coordenadas negativas.

Descartes

Varios libros condensan sus reflexiones: Regulae ad Directionem Ingenii (1628), Le Monde (1634), Principia Philosophiae (1644), Musicae Compendium (1650), y el famoso Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences (1637). Es en este último, en forma de apéndice, donde se encuentra la Géométrie, con La Dioptrique y Les Météores, una obra central para la filosofía moderna. Es el único texto de matemática escrito por Descartes, y fue un aporte fundamental para la revolución matemática y científica de la época. También, Descartes usó algo de geometría coordenada para asuntos de óptica.

Sin duda, sus ideas sobre el método de la ciencia y la reflexión estaban basadas en su percepción de la naturaleza de las matemáticas. El método de éstas es el que permitía alcanzar certezas y demostrarlas. La forma en que se conectan los razonamientos matemáticos es la forma en que debe discurrir el pensamiento en general.

La influencia de Descartes fue muy importante durante el siglo XVII, y no solo por su geometría. Ya nos extenderemos sobre este tema más adelante.

Hay consenso entre los historiadores de las matemáticas en que Descartes era consciente de la potencia revolucionaria de la geometría coordenada, y que se separaba de esquemas dominantes tanto en la Antigüedad Clásica como en el Medioevo.

Tres pasos resumen el método de la geometría de coordenadas cartesiana:

1. se expresa un problema geométrico (o mejor dicho una construcción) de manera algebraica,
2. se resuelven las ecuaciones algebraicas obtenidas en el paso anterior,
3. y finalmente se realiza una construcción geométrica de los resultados arrojados por las soluciones de las ecuaciones algebraicas.

Para Descartes, la construcción geométrica clásica generaba un exceso innecesario de figuras, que él quería reducir, y, además, complementariamente, quería ofrecer un significado al álgebra usando la interpretación geométrica.

En su Géométrie, Descartes utilizó las coordenadas oblicuas en cada problema más que las coordenadas rectangulares (hoy en día llamadas "cartesianas"). No encontramos, por ejemplo, fórmulas de distancias, pendientes, ángulo entre dos rectas, ... Por otro lado, para que se comprenda sus alcances: no se ofrece una sola curva nueva representada de forma geométrica.

El método cartesiano tenía implicaciones muy profundas sobre los criterios de existencia de las curvas: ya no se trataba de la constructibilidad por regla y compás, sino redefiniendo lo que era una

curva: aquella que posee una ecuación algebraica. Es cierto que en su Géométrie Descartes no representó una nueva curva con este nuevo criterio, pero sí lo hizo en términos metodológicos.

La esencia de La Géométrie fue el uso del álgebra en la geometría, como expresión de una visión que hacía de ésta un instrumento más poderoso, que ofrecía una metodología más general para la ciencia.

Entonces: Descartes promovió una ruptura clara con los criterios de validez de la Antigüedad. Por medio de ecuaciones era posible generar muchas más curvas. Es decir, repetimos, en todo esto la constructibilidad como criterio de existencia era socavado. Leibniz, después, iría más lejos afirmando como válidas además curvas trascendentes sin ecuación algebraica.

¿Qué era lo decisivo en las matemáticas de Descartes? Sin duda, el papel que le dio al álgebra que le permitía no solo resolver problemas geométricos (como Vieta) o incluso generar más curvas, socavar criterios clásicos de existencia, sino estructurar los asuntos de la geometría a partir del álgebra. Esto permitía clasificar, organizar y resolver de manera general múltiples asuntos que sin el álgebra no existirían o no podrían ser colocados de la misma manera o reconocidos como pertenecientes a una clase.



Conjetura de Fermat, estampilla.

¿Diferencias entre Fermat y Descartes?

Se desarrolló una disputa por la paternidad de la geometría de coordenadas porque el trabajo de Fermat se publicó hasta 1679, aunque su trabajo había sido realizado en 1629, años antes de que Descartes publicara su Géométrie en 1637. Si bien en ese último año Descartes conocía resultados de Fermat, se suele considerar que desde por lo menos 1619 ya los había concebido.

A pesar de que las controversias sobre la paternidad de la geometría analítica suelen ocupar más atención de la debida, es conveniente subrayar que sí existían diferencias entre los dos enfoques de estos matemáticos.

Por ejemplo, Fermat exponía su método de una manera más didáctica y sistemática que como lo hacía Descartes.

Fermat, debe decirse, sí usó generalmente coordenadas rectangulares.

Ahora bien, ni Descartes ni Fermat usaron coordenadas negativas.

Descartes no apreciaba mucho las matemáticas puras, como sí lo hacía Fermat, enfatizaba su valor y utilidad para el estudio de la naturaleza. De hecho, las preocupaciones de Descartes eran muy amplias, fundó el mecanicismo como filosofía, estudió la óptica, el diseño de lentes (de hecho, la ley de la refracción de la luz se debe a él, junto con Snell).

Una diferencia fundamental en la actitud y la filosofía que había en estos dos grandes intelectuales: mientras que Fermat creía en una continuidad con la tradición griega y pensaba que su propio trabajo era una simple reformulación de la obra de Apolonio, Descartes proponía una ruptura. Aun si es posible caracterizar el tratamiento de las ecuaciones de Fermat como mucho más claro y moderno que el de Descartes, es la mentalidad cartesiana la que entendía mejor el nuevo sentido del álgebra. Descartes era consciente de que se trataba de un método universal que debía sustituir aquellos métodos de los antiguos.

Las ecuaciones algebraicas no buscan hoy servir en la resolución de construcciones geométricas, como Descartes, sino para usarse en diferentes situaciones.

Los trabajos en la geometría coordenada siguieron. Frans van Schooten (1615 - 1660) tradujo la obra al latín en 1649. John Wallis definió las cónicas como curvas con ecuaciones de segundo grado (De Sectionibus Conicis, 1655), también introdujo abcisas y ordenadas negativas. Newton usó mucho las coordenadas, e incluso las que hoy se conocen como polares. Y por supuesto, mucho se dedicó a crear nuevas curvas.

Aunque tanto Descartes como Fermat la trabajaron, la geometría coordenada en tres dimensiones se dio en el siglo XVII y sobre todo en el XVIII.

Wallis y Barrow

Después de Descartes, John Wallis, amigo de Newton, e influenciado precisamente por Vieta, Fermat y Descartes, dio varios pasos en la "algebrización de la geometría". Por ejemplo, en su libro Algebra (1 685) dedujo en forma algebraica todo el Libro V de los Elementos de Euclides. Esta dirección tendría influencia, por ejemplo, en los trabajos de Leibniz.

Para Isaac Barrow, sin embargo, las matemáticas eran esencialmente geométricas y el álgebra y la aritmética no eran más que una formalización de la lógica.

Resulta interesante mencionar que a pesar de la visión revolucionaria de Descartes, todavía no había suficiente conciencia de los cambios a los que él mismo estaba contribuyendo de una manera decisiva. Por ejemplo, lo que ya mencionamos, Descartes consideraba que la geometría era la rama más importante de las matemáticas. Todavía tendría que pasar mucha más historia para transformar estas apreciaciones sobre el lugar de la geometría y el álgebra en las matemáticas.

Como veremos, el elemento central para una potenciación adicional del álgebra puede decirse que fue el mismo cálculo diferencial e integral, pues éste obligaba a una utilización sistemática del álgebra para su propio desarrollo. En ese sentido, la gran condensación teórica realizada por Newton y Leibniz potenció extraordinariamente el valor y significado del álgebra. Aunque, sin embargo, sus desarrollos decisivos y radicales se darían hasta el siglo XIX.

Históricamente, la geometría analítica en sí misma (no en cuanto utilizada en otras disciplinas), como la presentaron Descartes y Fermat, tuvo poca repercusión inmediata. Y ésta tendría que

esperar el trabajo de Gaspard Monge (1746 - 1818) y sus discípulos en la Escuela Politécnica francesa (la Polytechnique) para adquirir los alcances y fortalezas que ésta posee. Ya desarrollaremos esto.

Análisis, síntesis, álgebra

En la Antigüedad, "análisis" refería al proceso inverso de la síntesis; este último deducción desde premisas, el otro, análisis, el que afirma lo que se desea obtener, y si llega a verdades conocidas ofrece una demostración. En ese sentido, bien dice Kline que los términos "geometría analítica" no son apropiados para la geometría de coordenadas.

Para Vieta y Descartes, análisis tenía sentido para denominar la utilización del álgebra en la solución de problemas geométricos.

El mismo d'Alembert en 1790 usaba álgebra y análisis como sinónimos. Y con el uso expansivo de las coordenadas, "análisis" refirió a los métodos del álgebra. Fue allí cuando se acuñó el término "geometría analítica".

En el siglo siguiente, al cálculo y los métodos infinitesimales se les consideró una generalización del álgebra (Lagrange), sinónimo del análisis, luego al cálculo se le dio el nombre de "análisis infinitesimal" (Euler), y finalmente se limitó el término "análisis" al cálculo y las matemáticas basadas en éste.

¿Qué sentido tiene entonces "geometría analítica"? Una contradicción, a la luz del uso que le damos a los términos hoy, y que solamente se puede entender en el desarrollo histórico propio de las matemáticas.

14.3 Álgebra y geometría: una perspectiva

Poco a poco la relevancia del álgebra fue adquiriendo su lugar en la mentalidad de los matemáticos. Descartes es probablemente la figura central en la comprensión del papel del álgebra. Aunque, para Descartes, más que ofrecer conocimiento del mundo el álgebra refería a un método de razonamiento sobre cantidades abstractas. El lugar que le daba era fundamental: el álgebra precedía lógicamente a otras partes de las matemáticas y era una ciencia en sí misma, aunque sin sentido, más bien orientada al cálculo.

El álgebra para Descartes debe entenderse sumergida en su búsqueda de un método general para encontrar y asegurar el conocimiento verdadero. Esto último puede apreciarse en su tratado Le Calcul de 1638. Al álgebra por primera vez se le asignaba un lugar tan relevante para el conocimiento. De hecho, Descartes pensaba que era una extensión de la lógica para lidiar con cantidades. Por medio de la simbolización de los principios y métodos lógicos era posible, según él, mecanizar el razonamiento y crear una "matemática universal". Una idea que estaría mejor desarrollada en Leibniz.

En esa tesitura, también, se colocaba Barrow, para quien el álgebra no era matemática sino magnitudes geométricas expresadas de manera simbólica.

Descartes representa un salto cualitativo en la comprensión del lugar independiente del álgebra. Para Descartes, por ejemplo, x^2 representaba o una longitud o un área, mientras Vieta insistía en que solamente un área. x^2 era un número para Descartes.

John Wallis fue incluso más lejos que estos intelectuales, derivó todos los resultados del Libro V de Euclides de manera algebraica.

Barrow y Newton considerarían a la geometría como la parte más importante de las matemáticas, pero es evidente que los nuevos métodos que se condensarían en el cálculo diferencial e integral empujarían mucho más el lugar del álgebra. Pero ya volveremos sobre ese asunto.

El punto que debe señalarse aquí refiere de nuevo a la fundamentación del álgebra, que no se podía dar en términos similares a los de la geometría griega. Algunos buscaron métodos y nociones geométricas asociadas a procesos algebraicos o aritméticos, pero resultaba imposible. ¿Cómo representar números complejos, negativos o irracionales? Si bien los más críticos rechazaron el álgebra y la aritmética que aparecía tan inconsistente, la realidad es que la mayoría optó por usarlas. Con ello se dio un cambio en los criterios para validar los resultados matemáticos y de sus métodos, con una mayor apelación a la prueba y el error, la heurística, la intuición, los argumentos físicos y la inducción que dominaría por muchos años. De hecho, hasta el siglo XIX.

Esto último es importante; no se podía dar en términos lógicos una respuesta apropiada para justificar la validez del álgebra y la geometría con base en los criterios de la Antigüedad clásica aplicados a la geometría. Esto no solo valoriza los prejuicios o debilidades matemáticas de la época, sino también retrata una época completa, que ha retomado las tradiciones clásicas y las ha avanzado pero que todavía no encuentra todas las afirmaciones propias de su desarrollo. Por otra parte, nos señala el sentido histórico de los métodos, los significados y el lugar de los criterios de las matemáticas y las ciencias en general.

Aunque se suele decir que el cálculo diferencial e integral es la mayor realización matemática de la revolución científica, debe subrayarse mucho el papel de la geometría de coordenadas. Esta hizo posible el conocimiento cuantitativo de las formas y curvas geométricas (ahora expresables de manera algebraica), que se requería en el nuevo escenario, con muchas demandas prácticas sociales.

Con la geometría de coordenadas se abrió el camino para revertir el dominio de la geometría en las matemáticas a favor del álgebra, a pesar de las dificultades de justificación lógica que ésta exhibía.

14.4 Biografías



Pierre de Fermat

Pierre de Fermat nació el 17 de agosto de 1 601 en Beaumont-de-Lomagne, Francia. Su padre fue un comerciante de cuero y segundo cónsul de Beaumont-de-Lomagne. Su educación escolar fue en el monasterio local franciscano, y luego estudió en la Universidad de Toulouse. Posteriormente se trasladó a Bordeaux donde inició sus primeras investigaciones serias en matemáticas. De ahí partió a Orleáns donde estudió leyes en la universidad y recibió un diploma en derecho civil. Para 1 631 Fermat era abogado y oficial del gobierno en Toulouse.

Conoció a Carcavi y le hizo conocer sus descubrimientos matemáticos, en 1 636 Carcavi fue a Paris e hizo contacto con Mersenne y su grupo. El interés de Mersenne fue grande hacia las descripciones de los descubrimientos sobre la caída de los cuerpos de Fermat. Mersenne le escribió para recibir su respuesta posteriormente, Fermat añadió a los escritos el error en que creía cayó Galileo sobre el tema. Su fama como uno de los principales matemáticos del mundo era criticada debido a que nunca se esforzó en pulir su trabajo a la hora de su publicación. Su reputación fue dañada también debido a ciertos comentarios que Descartes hizo de él.

Entre el periodo de 1 643 a 1 654 Fermat no tuvo contacto con sus colegas científicos, debido a la presión de trabajo, la Guerra Civil en Francia y la plaga de 1 651. Siempre estuvo muy interesado en la teoría de números e hizo varios descubrimientos en este campo. Por estas contribuciones se le ha considerado como el padre de la teoría moderna de números.



Girard Desargues

Girard Desargues nació el 21 de febrero de 1 591 en Lyon, Francia. Ambos lados de su familia pertenecían a una tradición de abogados y jueces del Parlamento en París y en Lyon. Debido al fuerte apoyo económico de sus padres, Desargues obtuvo una muy buena educación. Pronto nació su interés por la geometría, y fue el creador de lo que se conoció en primera instancia como la "geometría proyectiva o moderna".

Estando en París, formó parte del círculo matemático de Marin Mersenne, y junto a él estaban René Descartes, Etienne Pascal y Blaise Pascal. Fue dentro de este círculo, que preparó sus trabajos matemáticos y los publicó. Su principal trabajo, el que le dio el nombre a la "geometría moderna", fue Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du Cone avec un Plan; muy pocas copias fueron impresas en París ese año de 1 639; se conoce sólo una copia que sobrevivió y antes de ser descubierta en 1 951, su trabajo fue conocido a través de un manuscrito hecho por Philippe de la Hire. Estudió trabajos de los antiguos matemáticos Apolonio y Pappus.

Murió en setiembre de 1 661 en Lyon, Francia.



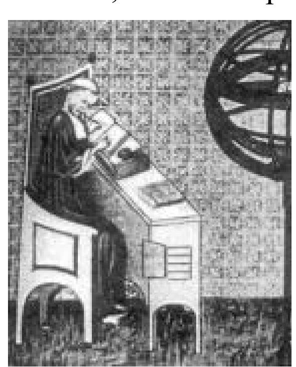
Bonaventura Francesco Cavalieri

Bonaventura Cavalieri nació en el año 1 598 en Milán, Imperio de Habsburgo, Italia. A la edad de diecisiete años se unió a la Orden Jesuita en Milán y un año después fue trasladado al Monasterio Jesuita en Pisa. El Cardenal Federico Borromeo presentó a Cavalieri con Galileo, y a partir de este encuentro y de la influencia de los trabajos de Euclides, Cavalieri decidió estudiar astronomía. Su profesor de matemáticas fue Benedetto Castelli, que enseñaba en la Universidad de Pisa.

En 1 619, le negaron dos puestos, uno en Bolonia y el otro en Pisa, después de que consideraron que era aún muy joven para sostener un puesto de esa magnitud. En 1 621, se convirtió en diácono y asistente del Cardenal Federico Borromeo en el monasterio de Milán, además enseñó teología hasta 1 623 cuando se trasladó a San Peter en Lodi por tres años y finalmente estuvo otros tres años

en el Monasterio Jesuita en Parma. En
1 629, se le asignó el puesto de presidencia en matemáticas en Bolonia. Mantuvo relación por escrito con matemáticos como Galileo, Mersenne, Renieri, Rocca, Torriceli y Viviani. Con Galileo fue con quien mantuvo más comunicación, se calculan alrededor de ciento doce cartas. Su estudiante más famoso fue Stefano degli Angeli.

Murió el 30 de noviembre de 1 647 en Bolonia, Estados Papales, Italia.



Nicole d'Oresme

Nicole d'Oresme nació en 1 323 en Allemagne, Francia. Estudió teología en París y era tesorero en la Universidad de Paris. En Rouen, fue canónigo y tiempo después deán. En 1 370, fue capellán y, además, consejero en asuntos financieros del Rey Carlos V.

Se le considera el precursor más importante de la geometría analítica, antes que a Descartes, y el descubridor de la equivalencia lógica entre la clasificación y la representación de valores en una gráfica. Propuso el uso de la gráfica para trazar una magnitud cuyo valor depende de otro.

Se cree que Descartes fue influenciado por las ideas de d'Oresme y que de dicha influencia aparece la publicación, casi cien años después, de sus estudios.

Otros trabajos en los que destacó este matemático fueron los primeros usos del exponente fraccionario y series de infinito. A lo anterior se le agrega, la teoría de la Tierra estacionaria, como propuso Aristóteles, y que expuso el movimiento de la Tierra, doscientos años antes que Copérnico.

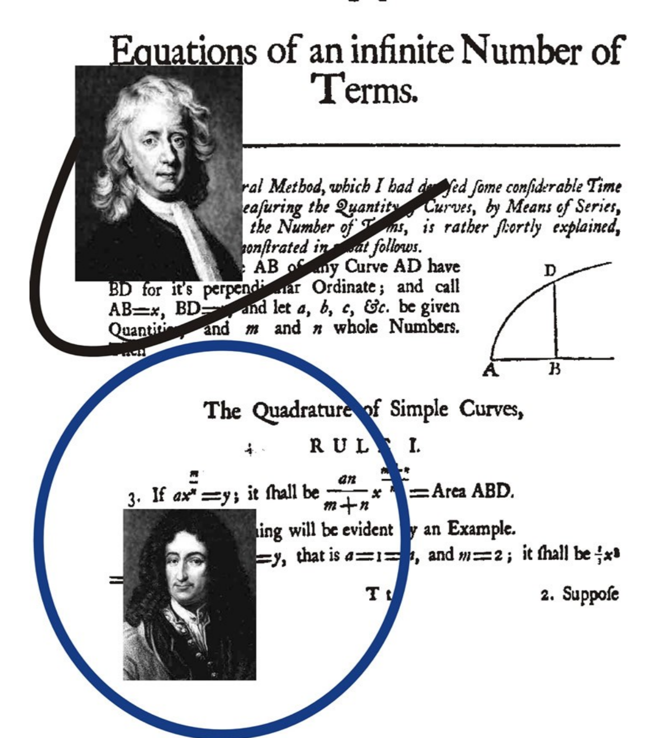
Murió el 11 de julio de 1 382 en Lisieux, Francia, luego de haber rechazado su propio trabajo y de ignorar muchos de sus descubrimientos.

14.5 Síntesis, análisis, investigación

1. ¿Cuál fue la principal figura matemática en los orígenes de la geometría proyectiva? Explique qué hizo.
2. Explique la cita de Bell sobre la geometría proyectiva y la lógica que incluimos en este capítulo.
3. Explique la diferencia conceptual entre Vieta y Descartes en torno a la naturaleza del álgebra.
4. Describa el método de Descartes en la geometría de coordenadas.
5. ¿Por qué decimos que Descartes rompió con los criterios de validez y de existencia matemática de la Antigüedad?
6. Describa las diferencias entre Fermat y Descartes.
7. ¿Cuánta repercusión tuvo la geometría de coordenadas en la época de Descartes y Fermat aparte de la que tuvo en el cálculo infinitesimal? ¿Por qué?
8. Comente el término "geometría analítica" con base en el análisis que se hace en este capítulo.
9. Explique la nueva relación entre álgebra y geometría que se establece con la nueva geometría de coordenadas.

CAPITULO XV

EL CÁLCULO INFINITESIMAL


OF

ANALYSIS

BY

Equations of an infinite Number of Terms.

...ral Method, which I had de...ed some considerable Time ...easuring the Quantity ... Curves, by Means of Series, ... the Number of T...ms, is rather shortly explained, ...onstrated in ... follows.

... AB of any Curve AD have BD for it's perpendi...ar Ordinate; and call AB=x, BD=..., and let a, b, c, &c. be given Quantiti..., and m and n whole Numbers.

The Quadrature of Simple Curves,

RUL... I.

3. If $ax^{\frac{m}{n}}=y$; it shall be $\frac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}=$ Area ABD.

...ing will be evident ... an Example.

...=y, that is a=1=..., and m=2; it shall be $\frac{1}{3}x^3$

2. Suppose

Si bien se puede decir que la obra de Copérnico abrió la Revolución Científica, los aportes de Kepler y las batallas y aportes en la mecánica de Galileo afirmaron la nueva visión de la astronomía y de la ciencia, el punto determinante fue la obra de Newton, que logró precisamente la fusión del cielo y la tierra en una descripción del universo con leyes matemáticas. El mundo que siguió fue newtoniano de muchas maneras. No obstante, en este trabajo no vamos a concentrarnos en esa apasionante temática, aunque sí mencionaremos algunas consecuencias, hacia el final del este capítulo. Lo interesante de subrayar es que Newton fue también uno de los creadores del cálculo diferencial e integral, culminación de esfuerzos de siglos, y, más que eso, también, un motor esencial de las matemáticas de la Modernidad.

15.1 Hacia el cálculo

Si bien algunos de sus fundamentos, especialmente en torno a la integral, se encuentran en la Antigüedad Clásica griega, como por ejemplo en los trabajos de Arquímedes, en la nueva época un primer punto importante por señalar fue establecido por Bonaventura Cavalieri, en su Geometria indivisibilibus continuorum del año 1 635. Usando el concepto de "indivisible"; este profesor de la Universidad de Bolonia generaba la rectas a partir de puntos y los planos a partir de la rectas por medio del movimiento. Es decir, avanzó elementos en lo que luego sería el cálculo integral. Es en este territorio intelectual que nació precisamente el famoso "principio de Cavalieri".

Pero en esa época no sólo se trabajaba en el cálculo de longitudes de segmentos, áreas, volúmenes. También en el problema de encontrar la recta tangente a una curva a un punto dado.

En general, cuatro fueron los problemas que se buscó resolver: determinar la velocidad y la aceleración instantáneas de un cuerpo, dada la distancia en función del tiempo, y viceversa (si se tenía la velocidad o la aceleración, se trataba de encontrar la distancia o la velocidad respectivamente en un momento determinado); determinar la tangente a una curva en un punto (por ejemplo para dar una dirección de un cuerpo en movimiento o el cálculo de rectas tangentes y normales a curvas para la descripción del comportamiento de la luz, el diseño de lentes); encontrar el máximo o el mínimo de una función (por ejemplo, para calcular las distancias máxima y mínima de un planeta en su movimiento traslacional, o la inclinación de un cañón para que una bala golpee a la máxima distancia posible); encontrar las longitudes de curvas, áreas y volúmenes determinadas por curvas o superficies, y centros de gravedad de cuerpos (utilidad en el cálculo de la distancia recorrida o el área "barrida" por el planeta en un tiempo).

En los orígenes del cálculo es posible determinar dos tendencias definidas, una algebraica y otra geométrica. Mientras que Fermat, Descartes o John Wallis se inclinaban por una aproximación algebraica, Torricelli, Isaac Cavalieri y Barrow lo hacían por una geométrica. Esto último también sucedía con Huygens.

Debe señalarse que en la mayoría de los casos el tipo de curvas que estudiaban en la mitad del siglo XVII eran algebraicas y sólo muy ocasionalmente trascendentes.

Se deben mencionar varios avances precursores en el cálculo. Por ejemplo, ya en el mismo año de 1638, Fermat había descubierto un método para encontrar máximos y mínimos en una ecuación algebraica simple, el cual fue generalizado posteriormente por el holandés Johannes Hudde.

Fermat y la tangente

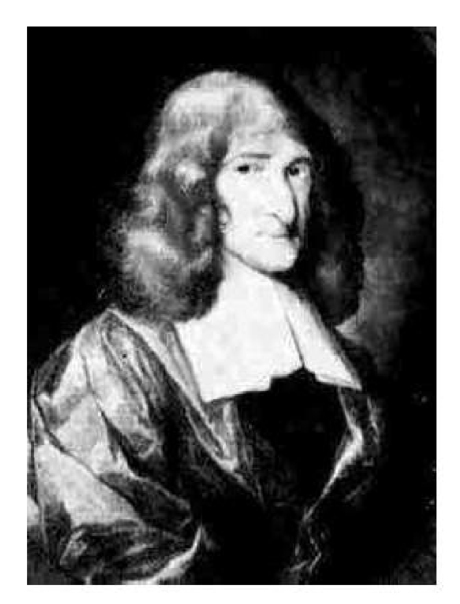
Fue en el curso de sus trabajos en la geometría de coordenadas que Fermat descubrió un método que le permitía calcular la pendiente de una recta tangente a una curva algebraica. Un claro antecedente del concepto de derivada. La forma precisa en que Fermat lo realizó se puede reducir al cálculo del siguiente límite:

$$\lim_{E \to 0} \frac{f(x+E) - f(x)}{E}.$$

Esta aproximación es casi idéntica a la que Newton y Leibniz desarrollarían posteriormente. Es debido a este resultado que el gran matemático Laplace consideraba a Fermat como el verdadero descubridor del cálculo diferencial. Debe decirse, sin embargo, que Fermat no explicó apropiadamente su método.

Barrow

Por otra parte, otros matemáticos hicieron contribuciones previas al desarrollo definitivo del cálculo, como el mismo maestro de Newton, Isaac Barrow (1630 - 1677) en Lectiones Geometricae (1669). Para algunos historiadores de las matemáticas, había sido precisamente Barrow quien más cerca estuvo del cálculo diferencial e integral antes de Newton. Por ejemplo, se supone que Barrow era consciente de que los problemas de la tangente y del cálculo de áreas eran inversos.



Barrow.

Barrow tuvo una participación importante en el trabajo de Newton. En 1669, cuando fue llamado a ocupar el puesto de capellán del rey Carlos II, Barrow logró que a Newton le dieran la Cátedra Lucasiana en Cambridge.

Es decir, a mediados de el siglo XVII, los matemáticos habían logrado calcular rectas tangentes, calcular volúmenes y centroides, aunque todavía la relación inversa entre la derivada y la integral no se había explicado; y esto último fue más bien un resultado del trabajo de Isaac Barrow, por lo menos desde 1670. Por otra parte, Pascal introdujo un método que adelantaba el "desvanecimiento" de los famosos infinitesimales, es decir, el paso al límite. Deben consignarse también los trabajos de Grégoire de Saint Vincent, Paul Guldin y André Tacquet.

El nombre de Blaise Pascal se asocia con los infinitesimales, el principio de inducción completa, con las probabilidades, y a un famoso teorema de un hexágono inscrito en un círculo, así como al triángulo aritmético formado por coeficientes binomiales.

Áreas y curvas

Otro de los grandes asuntos a los que respondió el cálculo fue el de calcular áreas bajo curvas, ya con geometría de coordenadas, y un tema que es similar al de aproximar figuras por medio de otras; en la Antigüedad se usó el método de exhausción en esa dirección. Vamos a usar básicamente el tratamiento que dimos en nuestro libro Elementos de Cálculo Diferencial. Historia y Ejercicios resueltos para indicar un ejemplo de la situación.

Usamos la curva

$$y = x^2$$

entre el origen

O y un punto A.

Dividimos el segmento $\overline{OA}$ en n partes; esto provoca n segmentos de longitud $\frac{\overline{OA}}{n} = l$.

En el caso de $n = 4,$ las alturas son:

$$\frac{l}{4}, 2 \times \frac{l}{4}, 3 \times \frac{l}{4}, 4 \times \frac{l}{4}.$$

¿Cómo se aproxima el área? Por medio de la suma de los rectángulos de base siempre l. Es decir, tenemos:

$$\left(\frac{l}{4}\right)^2, \left(2 \times \frac{l}{4}\right)^2, \left(3 \times \frac{l}{4}\right)^2, \quad y \quad \left(4 \times \frac{l}{4}\right)^2.$$

Por lo tanto:

$$A \approx \frac{l}{4} \times \left(\frac{l}{4}\right)^2 + \frac{l}{4} \times \left(2 \times \frac{l}{4}\right)^2 + \frac{l}{4} \times \left(3 \times \frac{l}{4}\right)^2 + \frac{l}{4} \times \left(4 \times \frac{l}{4}\right)^2$$

$$= \left(\frac{l}{4}\right)^3 [1 + 2^2 + 3^2 + 4^2]$$

¿Por qué?

En el caso de n rectángulos, de base $\frac{l}{n}$, las alturas son de la forma

$$\left(\frac{l}{n}\right)^2, \left(2 \times \frac{l}{n}\right)^2, \left(3 \times \frac{l}{n}\right)^2, \ldots$$

y la última

$$\left(n \times \frac{l}{n}\right)^2.$$

¿Cómo queda el área? Así:

$$A \approx \frac{l}{n} \times \left(\frac{l}{n}\right)^2 + \frac{l}{n} \times \left(2 \times \frac{l}{n}\right)^2 + \frac{l}{n} \times \left(3 \times \frac{l}{n}\right)^2 + \frac{l}{n} \times + \ldots + \frac{l}{n} \times \left(n \times \frac{l}{n}\right)^2$$

$$= \left(\frac{l}{n}\right)^3 \times [1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2].$$

El problema es el segundo factor de la derecha. Pero, se podía resolver porque Pascal y Fermat habían demostrado que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}.$$

Resumimos:

$$\left(\frac{l}{n}\right)^3 \times \left[\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}\right] = l^3 \times \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right].$$

¿Qué pasa cuando n se hace muy grande? Es decir, cuando n es infinito. Pues $\frac{1}{n}$ y $\frac{1}{n^2}$ se eliminan. Tenemos de esa manera que:

$$Area = \frac{l^3}{3} = \frac{\overline{AB}^3}{3}.$$

Si usted conoce un poco de cálculo integral, puede calcular el área bajo la curva $y = x^2$ entre 0 y A. Hágalo.

Había otros resultados. Por ejemplo, Fermat había calculado (en nuestra notación)

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

para todo n racional, y $n \neq -1$.

Se trataba de un resultado conocido por Roberval, Torricelli y Cavalieri, más o menos.

La función: un concepto clave

Uno de los conceptos matemáticos que tienen origen directo en los trabajos de los científicos de la época es el de función. Tanto por su interés en el mejoramiento de los métodos y al calcular la posición de los barcos navegantes a través de la luna y las estrellas, como el movimiento de objetos en caída libre o de los proyectiles, se empezó a construir el concepto de función. Éste ya se encuentra, por ejemplo, en los trabajos de Galileo. No obstante, durante todo el siglo XVII, las funciones fueron estudiadas más bien como curvas. Incluso las funciones trascendentes elementales como las logarítmicas, exponenciales o trigonométricas.

También debe mencionarse la introducción de curvas viejas y nuevas por medio de movimientos. Por ejemplo, la cicloide fue definida por Mersenne en el año 1615. En la Antigüedad la cuadratriz y la espiral de Arquímedes fueron definidas a través de movimiento.

Las curvas fueron agrupadas entre aquellas algebraicas y las trascendentes. Por ejemplo, James Gregory expresó con claridad en el año 1667 que el área del sector circular no podía ser una función algebraica del radio y de la cuerda. De igual manera, Leibniz demostró que la función $sen\ x$ no podía ser algebraica en relación con x. Puede decirse, sin embargo, que la distinción se originó en Descartes, al separar curvas geométricas de las que él llamó mecánicas.



Wallis.

Los historiadores de las matemáticas afirman que el concepto de función en el siglo XVII, como una cantidad obtenida de otras a través de una colección de operaciones algebraicas u otras operaciones, se encontraba plenamente en el trabajo de Gregory: Vera Circuli et Hiperbolae Quadratura (1667). Como veremos, Newton usaría la palabra "fluente" para la relación entre las variables. Leibniz usaría la palabra función para una cantidad variable de punto en punto sobre una curva, como la longitud de la tangente, la normal, la ordenada. En 1714, Leibniz utilizaría la palabra función para cantidades que dependían de una variable.

Wallis y Huygens

Otra de las obras significativas en la gestión del cálculo fue Aritmetica infinitorum, de Wallis, en 1655. Wallis utilizó procesos infinitos, como productos y series, potenciando el uso del álgebra y alejándose de los métodos geométricos de la Antigüedad.



Christian Huygens.

Fue también de importancia la obra de Huygens Horologium oscillatorium de 1673, la cual aunque dirigida a técnicas en el cálculo del tiempo para la navegación, incluyó el estudio de curvas en el plano. Huygens trabajó con la catenaria, la tractriz, y la logarítmica. Tanto los trabajos de Wallis como los de Huygens fueron importantes para la síntesis teórica que haría Newton.



Gregory.

Muchos otros matemáticos hicieron contribuciones al cálculo previamente a Newton y Leibniz: Gregory St. Vincent, Alfons de Sarasa, Nicholas Mercator, Christopher Wren, C. Huygens, James Gregory, Cavalieri, Descartes, Fermat, Wallis, Barrow, Pascal y otros. Estaba la mesa servida para una gran síntesis de los métodos infinitesimales y las respuestas a los problemas centrales que reclamaban su uso en el siglo XVII.

Los trabajos fueron hechos en relación con cada uno de los cuatro grandes problemas que se trataron de resolver y que mencionamos antes. Pero, salvo ciertas conexiones y relaciones, fueron realizados considerándolos como problemas distintos. Faltaba la visión para entender que el concepto de derivada y el de integral como límite de una suma estaban asociados íntimamente: la integral como el proceso inverso de la derivación. Algunos vieron cosas particulares de esta relación pero no apreciaron su generalidad e importancia.

Durante todos estos años aparecía con fuerza la idea de un método general para la comprensión de la naturaleza, el cual se identificaba con las matemáticas.

15.2 Newton

El siglo XVII fue decisivo para las ciencias. Una combinación de resultados ofreció una nueva pintura de la realidad y nuevas perspectivas para el conocimiento. Por ejemplo, se dieron varios desarrollos importantes en la óptica y en el estudio de la naturaleza de la luz con Grimaldi (1618 - 1663) y el mismo Newton. Huygens hizo una descripción matemática del funcionamiento ondulatorio de la luz. Torricelli (1608 - 1647), discípulo de Galileo, inventó el barómetro descubriendo la presión atmosférica y también el "vacío". Gassendi (1592 - 1655) introdujo de nuevo una forma de la teoría atomista de Leucipo y Demócrito. Es la época de Boyle, con sus resultados sobre el vacío y la teoría de gases, y también de Hooke, a quien se le atribuye haber sido el principal físico experimental antes de Faraday. Ahora bien, fue la obra de Newton la que culmina y potencia la llamada Revolución Científica.



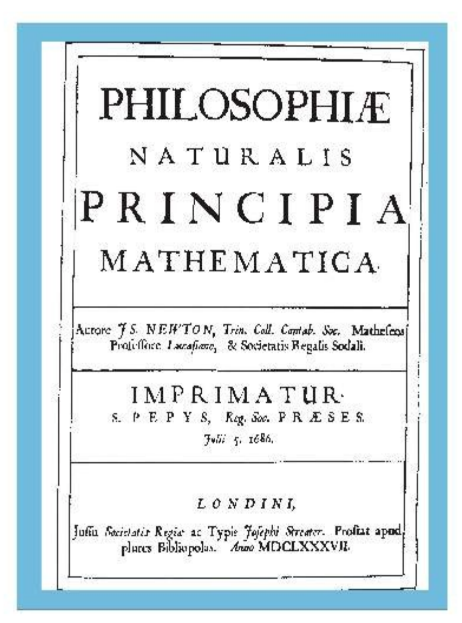
Newton, estampilla.

La teoría newtoniana de la gravitación universal terminó de destruir la cosmología anterior y con ello se abrirían nuevas perspectivas intelectuales.

Un dato curioso es que Isaac Newton nació en 1642, en el campo, en Woolsthorpe, Inglaterra precisamente el año de la muerte de Galileo. Huérfano de padre antes de nacer, estudió en la Universidad de Cambridge gracias al apoyo de un tío materno (que se había graduado en esa universidad) que se dio cuenta de los talentos del niño. Newton haría aportes decisivos en las matemáticas, la mecánica, la cosmología, el estudio de la luz, que establecieron, en realidad, una nueva visión del universo y potenciaron significativamente nuevos métodos para el progreso de las ciencias.

Newton estudió en Cambridge con Barrow y permanecería en ese lugar hasta 1 696.

Newton realizó una gigantesca hazaña intelectual: la mecánica celeste, es decir aquella síntesis magistral de mecánica y astronomía que integraba las leyes de Kepler (establecidas empíricamente), el movimiento de las mareas, el problema de los dos cuerpos esféricos, los principios de la teoría del movimiento lunar y muchas otras cosas, integración del movimiento de los astros y las leyes de la mecánica terrestre, de los resultados de Copérnico y Kepler con los de Galileo, y ofrecía al mundo una descripción matemática de la realidad.


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA
Autore JS. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.
IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.
LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

Principia . de Newton.

Una de las obras más famosas e influyentes de todos los tiempos: Philosophiae naturalis principia mathematica ("Principios matemáticos de la filosofía natural") es de 1 687. Esta obra integra matemáticamente las leyes del movimiento planetario a través de la ley de la gravitación de los cuadrados inversos:

$$F \propto \frac{M \times M_1}{d^2}$$

[La fuerza gravitacional entre dos masas es proporcional a las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas] o

$$F = G \times \frac{M \times M_1}{d^2}$$

[La fuerza gravitacional entre dos masas es igual a una constante por el producto de las masas, dividido este por el cuadrado de la distancia entre ellas.

G es la constante de proporcionalidad.]

Conviene una descripción de este libro fundamental:

"En resumen, los Principios Matemáticos de la Filosofía Natural se presentan como un tratado de mecánica en el que se establecen demostrativamente los movimientos de los cuerpos en sus relaciones generales con las fuerzas que los producen. La obra está dividida en tres partes o libros. El Libro I se ocupa del movimiento de los cuerpos en el vacío, esto es, en un medio carente de toda resistencia. En él jugará un importante papel la noción de fuerza centrípeta, a partir de la cual se fundamentan dinámicamente las tres leyes de Kepler. El Libro II, en cambio, estudia el movimiento de los cuerpos en medios resistentes (fluidos). Constituye de hecho una implacable crítica a la teoría cartesiana de los vórtices. Por último, el Libro III ofrece la constitución del sistema del mundo como consecuencia de la aplicación de la matemática racional (en la que movimientos y fuerzas se analizan matemáticamente y en abstracto) a la mecánica celeste. Es decir, los resultados de los libros anteriores, en especial del Libro I, se emplearán para conocer y predecir con exactitud los principales fenómenos celestes y terrestres, quedando finalmente instituida la famosa teoría de la gravitación universal. Cuando esto suceda, el mundo aparecerá como una elegante estructura ordenada en la que nada, ni en los cielos ni en el mar, escapará a la acción de esa fuerza gravitatoria que opera por doquier según una ley inexorable desvelada por Newton." [Rioja, Ana & Ordóñez, Javier: Teorías del Universo, Volumen II de Galileo a Newton, pp. 198, 199]

En opinión de Hawking esta obra es:

"Probablemente la obra más importante publicada en las ciencias físicas en todos los tiempos. En ella, Newton no solo presentó una teoría de cómo se mueven los cuerpos en el espacio y en el tiempo, sino que también desarrolló las complicadas matemáticas necesarias para analizar esos movimientos. Además, Newton postuló una Ley de la Gravitación Universal, de acuerdo con la cual cada cuerpo en el Universo era atraído por cualquier otro cuerpo con una fuerza que era tanto mayor cuanto más masivos fueran los cuerpos y cuanto más cerca estuvieran el uno del otro."

Newton explicó matemática y axiomáticamente el movimiento de los cuerpos celestes, las mareas, los fundamentos de la teoría del movimiento lunar, etc.

En la perspectiva cosmológica:

"La teoría de Newton pondrá de manifiesto la posibilidad de un conocimiento racional del universo copernicano a partir de principios mecánicos, en el que ya no tenga el menos sentido la distinción entre mundo sublunar y otro supralunar o entre Tierra y Cielo, en el que el conjunto de los cuerpos ocupen un lugar no especifico de cada uno de ellos en un espacio y tiempo infinitos, en el que nada escape a la acción de la gravedad, en el que todo en cualquier parte del sistema solar esté sometido a los mismos procesos de movimiento regidos por las mismas leyes naturales inexorables.

Si el De Caelo de Aristóteles fue la obra cosmológica indiscutible durante siglos ligada a una astronomía geocéntrica, los Principia de Newton representan la culminación de una concepción realista heliocéntrica de la astronomía debido al carácter dinámico, y no meramente cinemático, de su teoría. En efecto, tal como manifiesta el astrónomo Fred Hoyle, si la opinión según la cual es la Tierra la que realmente gira alrededor del Sol tiene validez objetiva, ha de haber alguna propiedad física importante que aparezca en el planteamiento heliocéntrico, pero no en el geocéntrico. ¿Cuál? En el sistema solar la ley de gravitación o ley del inverso del cuadrado arroja resultados incompatibles aplicada a un mundo en el que el centro sea el Sol y a otro en el que lo sea la Tierra, puesto que predice órbitas planetarias diferentes según el centro elegido. Ahora bien, las predicciones que concuerdan con la observación son las que corresponden a un centro ocupado por

el Sol, y no en modo alguno por la Tierra. Luego la ley de Newton sólo opera en un mundo heliocéntrico, lo que pone de manifiesto la verdad, y no simplemente la utilidad del sistema copernicano." [Rioja, Ana y Ordóñez, Javier: Teorías del universo. Volumen I. De los pitagóricos a Galileo, p. 273]

Principia es uno de las grandes libros de todos los tiempos. No obstante, en el año 1704 Newton publicó otro gran trabajo, la Óptica, donde formula su teoría corpuscular de la luz y su teoría de los colores. En ediciones posteriores Newton incluyó como apéndice algunos tópicos sobre filosofía natural, con consideraciones especulativas y metafísicas sobre asuntos como la luz, el calor, el éter, la materia.



Con motivo de una de las leyes establecidas por Newton, estampilla.

Es interesante mencionar que las principales ideas que Newton desarrollaría fueron concebidas en un período muy corto de tiempo, mientras permanecía en su lugar de nacimiento para escapar de la peste en Cambridge. Entre 1665 y 1666 concibió: las leyes de la gravitación universal y la mecánica celeste, las leyes de la composición de la luz, el teorema del binomio, y el cálculo.

Sin lugar a dudas, el cálculo diferencial e integral dentro de las matemáticas constituía el resultado más importante del siglo XVII y abría nuevos territorios y fronteras extraordinariamente fértiles para potenciar el desarrollo de estas disciplinas, y de la ciencia en general. La obra de Newton y, como veremos, la de Leibniz también, empujaron una nueva época en la construcción matemática.

Aunque Newton descubrió-construyó el cálculo diferencial e integral en los años 1665 a 1666, y Leibniz lo hizo en 1673 y 1676, fue este último quien publicó primeramente sus resultados en los años 1684 y 1686. Newton publicaría sus resultados en 1704 y 1736. Sin duda, Newton y Leibniz aportaron sus conceptos y métodos de una manera totalmente independiente, más aún con características y fisonomías diferentes, pero -lo que es la vida- se estableció una polémica durante muchos años sobre quién había hecho sus descubrimientos primero.

Newton dio a su cálculo el nombre de Teoría de fluxiones. Las funciones x, y, z eran fluentes, y las derivadas las llamaba fluxiones, estas últimas las denotaba:

$$\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ldots$$

Los infinitesimales los llamaba Momentos de fluxiones y los denotaba

$\dot{x}o, \dot{y}o, \dot{z}o, \ldots$

donde "

o" es una "cantidad infinitamente pequeña".

Los métodos infinitesimales eran el nudo teórico al que buscaban dar una respuesta tanto Newton como Leibniz. De hecho, se trata de la noción de límite. Estos matemáticos obtuvieron sus resultados, métodos, aplicaciones, usando esa noción de una manera intuitiva, física, geométrica, mecánica. Como veremos, un tratamiento más riguroso se desarrollaría muchas décadas después.

Los métodos infinitesimales habían estado en la historia de las matemáticas desde la Antigüedad, ya sea cuando se abordaron los problemas del infinito y la continuidad, incluso por medio de las paradojas de Zenón, como también en la series o sumas indefinidas de términos, en la división indefinida de longitudes, áreas o volúmenes, etc. Son métodos infinitesimales a los que se hace referencia con los procedimientos arquimedianos de exhausción para calcular longitudes áreas o volúmenes. Es, también, este tipo de método el que se plantea cuando se divide un área en un número infinito de rectas indivisibles, o se calcula un área usando una cantidad infinita de rectángulos, etc..

Críticas

Es interesante traer a colación aquí, que, precisamente, por la falta de precisión y rigor lógicos en el trabajo de Newton en relación con el cálculo, se desató una serie de críticas por parte de filósofos. Uno de los más conocidos fue el obispo George Berkeley (1685 - 1753). Berkeley reconocía la utilidad de los nuevos métodos y la validez de los resultados, pero criticaba que no se apegaban a la deducción lógica y más bien eran procedimientos inductivos. Newton afirmaba que la derivada era una razón final y consideraba los infinitesimales como "cantidades evanecentes".

Para Berkeley la noción de velocidad instantánea no podía existir puesto que el concepto de velocidad depende del espacio y el tiempo. Si se expresa la velocidad como el límite

(cuando $\Delta x \to 0$) de razones como

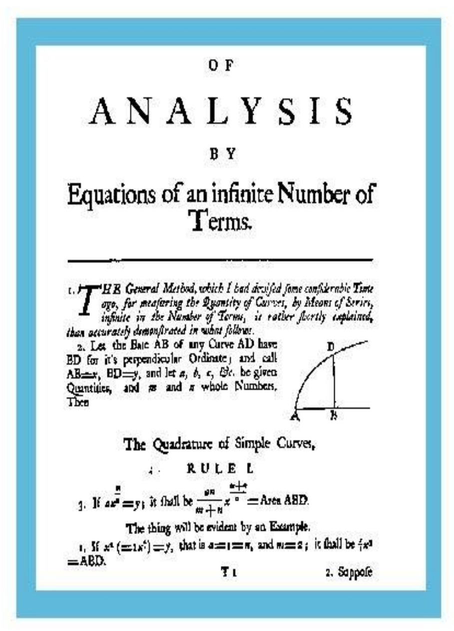
$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

con y la distancia y x el tiempo, Berkeley preguntaría ¿cuál es el sentido de incrementos que se desvanecen (Δy y Δx se hacen 0) dejando un cociente sin sentido $\frac{0}{0}$? Una velocidad --para Berkeley-- debe ser una distancia sobre un tiempo. ¿Cómo puede existir una velocidad con distancia nula y sobre un tiempo también nulo?

Lo que estaba en la picota era el "paso al límite", porque se hacía sin suficiente precisión de los términos usados. Además, lo que es decisivo, ese paso de las pendientes de rectas secantes a la pendiente de la recta tangente o la derivada, es decir el límite, era un método que se escapaba de las matemáticas "normales". La noción de "paso al límite" no podía encerrarse dentro de la geometría

euclidiana, la aritmética o el álgebra tradicionales. De lo que se trataba era de un método matemático diferente, nuevo, el cual se encontraba en esa época en un momento de descubrimiento-construcción en el cual no se podía pretender un nivel mayor de precisión. Antes tendría que desarrollarse un largo proceso de manipulación, aplicación, reflexión y afinamiento para poder acceder a una formulación más rigurosa desde un punto de vista lógico.

Por otra parte, la creación del cálculo diferencial e integral por Newton estuvo relacionada con las series infinitas. El descubrimiento y la generalización del teorema del binomio le permitieron hacer importantes desarrollos mediante series infinitas (aunque no siempre con la validez asegurada). Había una gran relación entre el trabajo de Newton y el estudio sobre la series infinitas que había hecho Wallis.



OF

ANALYSIS

BY

Equations of an infinite Number of Terms.

1. THE General Method, which I had deviſed ſome conſiderable Time ago, for meaſuring the Quantity of Curves, by Means of Series, infinite in the Number of Terms, is rather ſhortly explained, than accurately demonſtrated in what follows.

2. Let the Baſe AB of any Curve AD have BD for it's perpendicular Ordinate; and call AB=x, BD=y, and let a, b, c, &c. be given Quantities, and m and n whole Numbers. Then

The Quadrature of Simple Curves,

RULE I.

3. If $ax^{\frac{m}{n}}=y$; it ſhall be $\frac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ = Area ABD.

The thing will be evident by an Example.

1. If $x^2\ (=1x^{\frac{2}{1}})=y$, that is $a=1=n$, and $m=2$; it ſhall be $\frac{1}{3}x^3$ = ABD.

T 1 2. Suppoſe

De analysi per aequationes numero terminorum infinitas, de Newton.

Veamos el teorema del binomio para los casos de $n = 2$ y $n = 3$:

$$(x + \triangle x)^2 = x^2 + 2x\triangle x + (\triangle x)^2$$

$$(x + \triangle x)^3 = x^3 + 3x^2\triangle x + 3x\triangle x^2 + (\triangle x)^3$$

y, el caso general:

$$(x + \triangle x)^n = x^n + nx^{n-1}\triangle x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\triangle x)^2 + \ldots + (\triangle x)^n.$$

Entonces, la serie binómica para $(1+x)^k$ viene dada por la expresión

$$1+kx+\frac{k(k-1)}{2}x^2+\ldots+\frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{n!}x^n+\ldots$$

[$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 1$, el producto de todos los enteros positivos menores o igual a n].

Newton descubrió que las series además de aproximar funciones servían para definir alternativamente funciones, como, por ejemplo:

$$sen\ x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$$

con $x \in R$ y

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots$$

con $x \in]-1,1[$.

¿Ventajas de esta representación? Los procesos de diferenciación o integración de funciones se podían hacer realizándolos término a término de la serie. Era, entonces, algo más simple y fácil.

Newton escribió en el año 1669 sus ideas sobre series y el cálculo en el libro De analysi per aequationes numero terminorum infinitas que, sin embargo, fue publicado hasta 1711. También, esta relación entre series y cálculo se manifiesta en Methodus fluxionum et serierum infinitorum (escrito en 1671), y publicado en inglés en 1736 y en latín en 1742. Una tercera exposición del cálculo Newton la hizo en 1676 en De quadratura curvarum. En esta última obra, publicada en 1704, Newton trataba de evitar las "cantidades infinitamente pequeñas" y las "cantidades fluentes" que usó en los trabajos anteriores. Aquí planteaba una teoría de las "razones primeras y últimas", donde la "razón última" era la derivada formulada sin el concepto de límite.

El único libro en que Newton mostró su cálculo y publicó rápidamente fue Philosophiae naturalis principia mathematica (1687). En el Lema I del Libro I, Sección I de esta obra, al considerar el límite de una función (o de la derivada), Newton señalaba:

"Cantidades, y la razón de cantidades, que en cualquier intervalo finito de tiempo convergen continuamente a la igualdad, y que antes del final de dicho tiempo se aproximan una a la otra más que cualquier diferencia dada, se hacen finalmente iguales"

Si bien Newton usó el cálculo en su estudio de la astronomía y mecánica en esta obra, una gran parte del libro fue expresada en forma geométrica tradicional para que sus contenidos fueran mejor aceptados por la comunidad científica de ese tiempo.

Stephen Hawking nos brinda una pincelada de la personalidad de Newton:

"Isaac Newton no era un hombre afable. Sus relaciones con otros académicos fueron escandalosas, pasando la mayor parte de sus últimos tiempos enredado en acaloradas disputas. Después de la publica-ción de los Principia Mathematica (seguramente el libro más influyente jamás escrito en el campo de la física), Newton fue ascendido rápidamente en importancia pública. Fue nombrado

presidente de la Royal Society, y se convirtió en el primer científico de todos los tiempos que fue armado caballero."

Las grandes cualidades de las personas suelen estar acompañadas de debilidades; la naturaleza de la vida es así. Los científicos son de carne y hueso y los resultados de su trabajo están condicionados por sus características personales y por el contexto social e histórico en que se dan.

Si bien Newton había descubierto o construido el cálculo alrededor del año 1665 no publicaría sus resultados hasta el siglo XVIII, en un período que va de 1704 a 1736. Leibniz lo había descubierto un poco después que Newton entre los años 1673 y 1676, pero lo publicó antes que él: entre 1684 y 1686.

De hecho, a la hora de establecer su influencia sobre sus contemporáneos, debe señalarse, uno de los problemas de Newton era esta distancia entre su creación intelectual y la publicación (entre 1665 y 1666 estaba en poder de la ley de la gravitación universal, la cual no aparecería sino hasta 1687).

15.3 Leibniz

Leibniz nació en Leipzig y vivió casi siempre alrededor de Hanover, Alemania, donde trabajó para los duques (uno de ellos fue Rey de Inglaterra con el nombre de Jorge I). Estudió derecho e hizo su primera tesis en lógica.



Leibniz, una estampilla.

En 1666, escribió su tesis doctoral De Arte Combinatoria ("Sobre el arte de las combinaciones"), en la que formuló un método universal para razonar.

Se trataba de un hombre de grandes cualidades intelectuales que además de matemático, fue filósofo, abogado, filólogo, historiador e incluso hizo aportes a la geología. Aunque sus contribuciones no llegan al nivel de las de Newton, hizo contribuciones en mecánica, óptica,

hidrostática, neumática, ciencia náutica, en la lógica y hasta en la construcción de máquinas calculadoras. Se ganó la vida como diplomático y abogado, pero sus trabajos en las matemáticas y la filosofía fueron muy relevantes.

Se dice que siempre trató de conciliar las religiones católica y protestante. También fue un promotor de sociedades académicas con el propósito de promover las ciencias y las técnicas en reacción al carácter conservador y retrógrado de las universidades de su tiempo. Al igual que Galileo, escribió en lengua vernácula, privilegió el alemán frente al latín.

Leibniz propuso un método universal para conocer, crear y entender la profunda unidad del universo: la scientia generalis. Y también la creación de un lenguaje perfecto para realizar el razonamiento por medio de cómputos simples: la lingua characterica.

Estos proyectos motivaron parte de su trabajo intelectual, y le condujeron en el primer caso a resultados matemáticos, y en el segundo a ofrecer aportes en la lógica y en la simbología matemáticas.

Es interesante que Leibniz fue influenciado por Descartes de una manera particular. Este último tuvo una influencia importante en los matemáticos holandeses; debe recordarse que pasó unos veinte años en Holanda. Tuvo influencia en particular sobre Frans van Schooten (1615 - 1660) quien propagó y amplió la geometría analítica cartesiana, e incluso hizo una versión en latín de la Géométrie. Huygens fue uno de los discípulos de van Schooten, un gran científico con aportes en la teoría de la luz, en astronomía y al que se le atribuye el reloj de péndulo. En 1666, Huygens se trasladó a París, en donde permaneció hasta 1681. Este matemático, ya en 1656, había aplicado métodos infinitesimales a las cónicas (por ejemplo, redujo la "rectificación" de la parábola a la "cuadratura" de la hipérbola).

Leibniz estuvo en París, al parecer, entre los años 1673 y 1676. Por influencia directa de Huygens estudió los trabajos de Descartes, Pascal y algunos matemáticos británicos. La relación entre Leibniz y Huygens fue importante para el trabajo de Leibniz en el cálculo. Es posible ver la relación entre estos dos matemáticos en el desarrollo conjunto del concepto de energía cinética.

Se debe mencionar que Leibniz sabía del rumor de que Newton ya manejaba un nuevo método, y esto contribuyó a estimular su trabajo.

Mientras el enfoque de Newton fue físico, el de Leibniz fue esencialmente geométrico, incluso algebraico o lógico.

Desde que Leibniz entró en contacto con las matemáticas, bajo la influencia de Huygens, le dio importancia al cálculo de las tangentes a las curvas y, muy rápidamente, estuvo seguro de que se trataba de un método inverso al de encontrar las áreas y volúmenes a través de sumas. Leibniz escribió varios artículos entre 1675 y 1684 que expresan su evolución en la construcción del cálculo. En noviembre de 1 676 ofreció las reglas $dx^n = nx^{n-1}$

para un entero o fraccional y, también $\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

En julio de 1677 Leibniz ofrecía las reglas correctas para la diferencial de la suma, diferencia, producto y cociente de 2 funciones y para potencias y raíces, aunque no ofrecía pruebas.

Su método se recoge por primera vez en un artículo que apareció en la revista Acta eruditorum en 1 684, que él mismo había fundado dos años antes (donde ya había anunciado su método): Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus ("Un nuevo método para máximos y mínimos, y también para tangentes, que no se ve obstruido por las cantidades fraccionarias ni por las irracionales").

Se trataba de una aproximación geométrica y no cinemática como en Newton. Se percibe la influencia de Pascal y de Barrow (especialmente Geometrical Lectures, 1670), así como de Huygens y Descartes. Ya aquí aparecían las reglas básicas de la derivación, las condiciones para valores extremos (máximos y mínimos) y para los puntos de inflexión.

Este artículo contenía, entonces, los símbolos dx, dy y las reglas

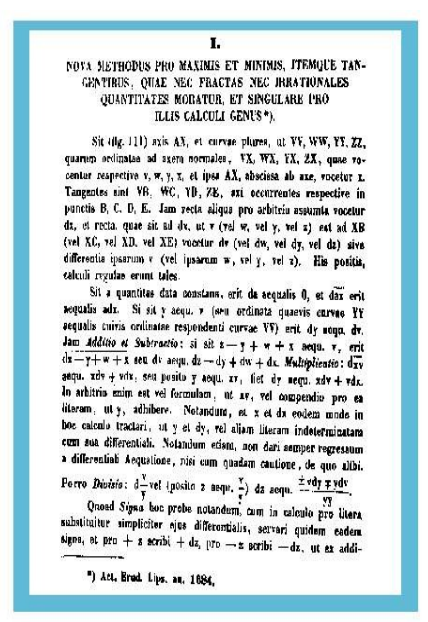
$$d(xy) = xdy + ydx$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

$$d(x^n) = nx^{n-1}dx$$

y señalaba que

$dy = 0$ para valores extremos relativos o $d^2y = 0$ para los puntos de inflexión.



I.

NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MINIMIS, ITEMQUE TANGENTIBUS, QUAE NEC FRACTAS NEC IRRATIONALES QUANTITATES MORATUR, ET SINGULARE PRO ILLIS CALCULI GENUS*).

Sit (fig. 111) axis AX, et curvae plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordinatae ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quae vocentur respective v, w, y, z, et ipsa AX, abscissa ab axe, vocetur x. Tangentes sint VB, WC, YD, ZE, axi occurrentes respective in punctis B, C, D, E. Jam recta aliqua pro arbitrio assumta vocetur dx, et recta, quae sit ad dx, ut v (vel w, vel y, vel z) est ad XB (vel XC, vel XD, vel XE) vocetur dv (vel dw, vel dy, vel dz) sive differentia ipsarum v (vel ipsarum w, vel y, vel z). His positis, calculi regulae erunt tales.

Sit a quantitas data constans, erit da aequalis 0, et $d\overline{ax}$ erit aequalis adx. Si sit y aequ. v (seu ordinata quaevis curvae YY aequalis cuivis ordinatae respondenti curvae VV) erit dy aequ. dv. Jam *Additio et Subtractio*: si sit z − y + w + x aequ. v, erit $d\overline{z - y + w + x}$ seu dv aequ. dz − dy + dw + dx. *Multiplicatio*: $d\overline{xv}$ aequ. xdv + vdx, seu posito y aequ. xv, fiet dy aequ. xdv + vdx. In arbitrio enim est vel formulam, ut xv, vel compendio pro ea literam, ut y, adhibere. Notandum, et x et dx eodem modo in hoc calculo tractari, ut y et dy, vel aliam literam indeterminatam cum sua differentiali. Notandum etiam, non dari semper regressum a differentiali Aequatione, nisi cum quadam cautione, de quo alibi.

Porro *Divisio*: $d\frac{v}{y}$ vel (posito z aequ. $\frac{v}{y}$) dz aequ. $\frac{\pm vdy \mp ydv}{yy}$.

Quoad *Signa* hoc probe notandum, cum in calculo pro litera substituitur simpliciter ejus differentialis, servari quidem eadem signa, et pro + z scribi + dz, pro − z scribi − dz, ut ex addi-

*) Act. Erud. Lips. an. 1684.

Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus, de Leibniz.

Fue Leibniz quien introdujo precisamente aquí el término "cálculo diferencial" (de di-fe-ren-cias).

Aunque y y y se toman como funciones de x, el término "función" no aparece en este artículo. Este término aparecerá hasta 1692 en otro artículo.

Antes de usar "cálculo diferencial" había usado la expresión "methodus tangentium directa". También "methodus tangentium inversa" o "calculus summatorius" para la integración definida y, en 1698, "calculus integralis" (específicamente, en un artículo con Jean Bernoulli).

Fue en el año 1686 cuando Leibniz hizo una publicación sobre la integración donde recogía el símbolo "$\int$". No obstante, ya había utilizado otros símbolos para la noción de integral: primero $omn.y$ (todas las y) , luego $\int y$ y luego $\int ydx$.

En 1675, usó la siguiente notación:

omn. : quería decir suma (del latín omnia),

l : significaba dy.

Por ejemplo: $omn.l = y$ quería decir en nuestra notación $\int dy = y$ y $omn.yl = \frac{y^2}{2}$ significaba $\int ydy = \frac{y^2}{2}$.

En octubre de 1675, Leibniz escribía $\int l = omn.l$ y $\int x = \frac{x^2}{2}$.

Para Leibniz: dy y dx representaban cantidades arbitrariamente pequeñas (diferenciales o infinitesimales), y con ellas iría construyendo tanto su cálculo integral (sumas) como su cálculo diferencial (cálculo de tangentes). Los símbolos $\dot{x}o$ y $\dot{y}o$ de Newton se traducen como dx y dy en Leibniz.

Los trabajos de Leibniz tuvieron una gran repercusión y potenciaron un desarrollo muy rápido del cálculo con su enfoque. En muy poco tiempo, por ejemplo, y con la contribución relevante de los hermanos Bernoulli, se puede decir que se tenían los resultados básicos de lo que hoy se enseña en los cursos de cálculo universitario.

Posteriormente, Euler y otros matemáticos de la Europa continental darían continuidad a esta obra.

Debe decirse que el enfoque de Newton, por medio de su teoría de fluxiones, tuvo un desarrollo más limitado con Taylor, Maclaurin y otros matemáticos británicos. Ya volveremos sobre esto.

Los símbolos "$=$" y "$\times$" serían aceptados de manera dominante debido a su influencia. Los términos de función y coordenadas también son resultado de

la labor de Leibniz.

Leibniz al igual que Newton también fue atacado por otros intelectuales de la época. El médico y geómetra Bernard Nieuwentijdt (1654 - 1718) en 1694 señalaba que había oscuridad en el trabajo de Leibniz y que no podía entender cómo diferían las "cantidades infinitamente pequeñas" de 0, y preguntaba cómo una suma de infinitesimales podía dar algo finito.

Debe decirse que ni Leibniz ni Newton pudieron ofrecer una gran precisión y mucha claridad lógica en los fundamentos de sus métodos en el cálculo diferencial e integral. Para ellos lo decisivo era la coherencia en sus resultados y la fecundidad de los nuevos procedimientos. Eso era suficiente para generar el progreso de esta nueva disciplina matemática.

La motivación fundamental de Leibniz por un método universal para obtener conocimiento, invenciones y mostrar o entender la unidad del mundo, la búsqueda por una ciencia general, una caracteristica generalis, lo colocó en la trayectoria del descubrimiento del cálculo.

La influencia de Leibniz sobre sus contemporáneos es directa. Por ejemplo, los hermanos Bernoulli realizaron un gran desarrollo de estos métodos. Un texto de cálculo apareció en el año 1696, titulado Analyse des infiniment petits, escrito por el marqués de L'Hôpital, que incluyó muchos resultados de Johann Bernoulli.

Algo relevante en Leibniz son sus contribuciones a la notación matemática. Influido por esa otra gran pretensión, aparte de una ciencia general, la creación de una lengua universal que impidiera los errores de pensamiento y redujera éste al cómputo, la lingua universalis, este brillante pensador dejó una herencia extraordinaria en la simbología de las matemáticas. Incluso, lo que ya mencionamos, el nombre de cálculo diferencial y cálculo integral encuentran su origen en él.

Aunque se le atribuye su nombre a Leibniz las siguientes series fueron desarrolladas por James Gregory, quien contribuyó mucho al manejo de los procesos que lidiaban con el infinito:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots.$$

15.4 Newton y Leibniz

Si bien es cierto que Newton no había publicado antes de 1687 sus hallazgos en el cálculo diferencial e integral, obtenidos alrededor de los años 1665 y 1666, sí había presentado algunos de sus manuscritos a sus amigos. De Analysi, por ejemplo, se lo había dado a Barrow en 1669, quien se lo había enviado a John Collins. Leibniz estuvo París en 1672 y en Londres en 1673 y estuvo en contacto con gente que conocía la obra de Newton. Fue en este escenario que nació la acusación a Leibniz como un plagiador de las ideas de Newton.

Los historiadores de las matemáticas han concluido que el trabajo de Newton fue anterior al de Leibniz, pero que este último obtuvo sus resultados de una manera independiente a Newton. Se sabe, sin embargo, que ambos tuvieron la influencia de Barrow, quien se considera el matemático que había llegado más lejos en la comprensión de que la derivada y la integral tenían una naturaleza inversa, aunque con una óptica esencialmente geométrica.

Más aún, existe una diferencia radical en los enfoques de Newton y Leibniz en relación con el cálculo. Esto debería haber sido suficiente como para concluir que se trataba de creaciones independientes. Sin embargo, se desarrolló una gran polémica sobre la prioridad en estos descubrimientos o construcciones, que estableció una separación fuerte entre los matemáticos británicos y los continentales.

Para algunos, la responsabilidad en esta extraordinaria controversia, que tuvo implicaciones importantes en el desarrollo de las matemáticas, descansa fundamentalmente en Newton. Hawking es muy crítico de Newton:

"Aunque sabemos ahora que Newton descubrió el cálculo años antes que Leibniz, publicó su trabajo mucho después. Sobrevino un gran escándalo sobre quién había sido el primero, con científicos que defendían vigorosamente a cada uno de sus contendientes. Hay que señalar, no obstante, que la mayoría de los artículos que aparecieron en defensa de Newton estaban escritos originalmente por su propia mano, ¡y publicados bajo el nombre de amigos! Cuando el escándalo creció, Leibniz cometió el error de recurrir a la Royal Society para resolver la disputa. Newton, como presidente, nombró un comité 'imparcial' para que investigase, ¡casualmente compuesto en su totalidad por amigos suyos! Pero eso no fue todo: Newton escribió entonces él mismo los informes del comité e hizo que la Royal Society los publicara, acusando oficialmente a Leibniz de plagio. No satisfecho todavía, escribió además un análisis anónimo del informe en la propia revista de la Royal Society. Después de la muerte de Leibniz, se cuenta que Newton declaró que había sentido gran satisfacción 'rompiendo el corazón de Leibniz'".

Producto de la polémica, los matemáticos británicos se negaron a usar la notación de Leibniz, que resultaba mejor que la de Newton y que es la que esencialmente usamos hoy en día. Se dio lo que se puede caracterizar como un retroceso de la matemática en Inglaterra en relación con la Europa continental. El asunto no se zanjaría sino hasta principios del siglo XIX cuando los británicos adoptaron la notación de Leibniz. En la solución de la controversia, tuvo especial relevancia el papel jugado por el matemático francés Laplace.

Esta polémica nos revela cómo en la construcción matemática participan dimensiones muy humanas, psicológicas, sociológicas, que influencian notablemente los quehaceres más abstractos dentro de las comunidades matemáticas. Es posible, incluso, que divergencias de criterios, decisiones, apreciaciones, o malas intenciones, puedan definir por años el decurso de una disciplina.

¿Cuáles eran las diferencias existentes en los enfoques de Newton y Leibniz?

Tanto Newton como Leibniz consideraron el cálculo como un nuevo campo matemático independiente tanto de la geometría como del álgebra, en sus conceptos y métodos, y ofrecieron un fundamento algebraico a éstos. Como lo hemos analizado, los métodos infinitesimales antes de Newton y Leibniz, tenían una gigantesca influencia de la geometría. El énfasis puesto ahora en el álgebra era decisivo. De igual manera, tanto Newton como Leibniz redujeron los problemas del cálculo de áreas, segmentos, volúmenes, a procesos de antiderivación. O, puesto de forma general, todos los grandes problemas que dieron origen a la construcción del cálculo fueron resueltos por ambos matemáticos en términos de derivación o integración (antiderivación).

Sin embargo, había diferencias. Mientras que Leibniz usaba los incrementos infinitesimales en la x y y, y luego estudiaba la relación entre ellos, Newton usaba sus infinitesimales en la derivada misma.

En Newton los infinitesimales estaban asociados directamente al cálculo de velocidades instantáneas (un claro sentido de aplicación física).

En Leibniz el interés no era la aplicación física. De hecho, se podría establecer una correlación entre infinitesimales y "mónadas", estos últimos entes primarios en la descripción de lo real según la filosofía que aparece en su libro de filosofía (metafísica) Monadología.

El énfasis de Newton era la razón de cambio, mientras que en Leibniz lo era la suma infinita de infinitesimales.

Como hemos visto, fue también relevante la diferencia en el uso de la notación. Mientras que para Leibniz era muy importante, Newton no le prestó mucho cuidado. Tampoco Newton dio mucha atención a la formulación precisa de los algoritmos y reglas usuales del cálculo. En esto, nos repetimos, es probable que la vocación por una búsqueda de reglas generales universales, en Leibniz, fuera un factor para su desarrollo de la forma y la notación.

15.6 Biografías



Sir Isaac Newton

Isaac Newton nació el 4 de enero de 1 643 en Woolsthorpe, Lincolnshire, Inglaterra. Es considerado uno de los más importantes científicos de la historia. Lo único que se conoce de su padre, es que murió antes de que él naciera. Isaac fue criado por su abuela.

En 1 660, ingresó a la Escuela en Grantham y se alojó con el director de la escuela, quien al parecer le dio al niño clases privadas en preparación de la universidad. En 1 661, ingresó a la Universidad en Cambridge como becario a estudiar leyes. Pero dejó todo de lado para estudiar lo que realmente le interesaba: matemáticas y filosofía natural. La institución basaba la enseñanza de la filosofía en Aristóteles, pero se estudiaba, también, a otros filósofos como Descartes, Gassendi, Hobbes y

Boyle. Además, le atrajo la astronomía de Galileo, y la óptica de Kepler.

En 1 665, recibió su título de bachiller, pero debido a la plaga, la universidad fue cerrada y regresó a Lincolnshire, en donde en un periodo de dos años avanzó enormemente en sus estudios matemáticos, y en los referentes a las ópticas, física y astronomía.

En 1 667, la Universidad de Cambridge fue reabierta y Newton fue parte de ella como colega. En 1 672, fue nombrado miembro de la Sociedad Real y publicó su primer estudio científico sobre luz y color, que fue aprobado por Robert Hooke y Christian Huygens. En 1 693, se retiró de la investigación, tras haber sufrido dos depresiones nerviosas. En 1 703, fue elegido como el nuevo presidente de la Sociedad Real y permaneció en este puesto hasta su muerte.

En 1 705, fue nombrado caballero por la Reina Anne y con esto fue el primer científico en recibir estos honores.



Gottfried Wilhelm von Leibniz

Gottfried von Leibniz nació el 1° de julio de 1 646 en Leipzig, Sajonia, Alemania. Es considerado uno de los mas destacados científicos de su época, trabajó sobre diversos campos, como matemática, filosofía, teología, derecho, política, historia y física.

Leibniz ingresó a la Escuela Nicolai en Leipzig a los siete años. Estudió la lógica de Aristóteles y su teoría de las categorías del conocimiento, que le impulsaron a mejorarlo con sus propias ideas. Se instruyó, también, leyendo los libros de su padre acerca de metafísica y teología. Ingresó a la Universidad de Leipzig a la edad de catorce años, estudió filosofía, y matemáticas. Además, llevó diferentes cursos de estudio general como retórica, latín, griego y hebreo.

En 1 663, dos años después de su ingreso, se graduó y su tesis fue acerca del Principio de Individualidad. Después de su graduación, se dirigió a Jena por un corto periodo, en donde se vio influenciado por el profesor de matemáticas Erhard Weigel. Al regresar a Leipzig inició sus estudios en leyes, obtuvo una maestría en filosofía en la que combinó aspectos de filosofía con leyes e ideas matemáticas. No recibió su doctorado en leyes así que se fue a estudiar a la Universidad de Altdorf y ahí lo recibió en febrero de 1 667. En noviembre de ese año trabajó bajo los servicios del Barón Johann von Boineburg en Frankfurt.

En 1 672, se dirigió a París y conoció a los matemáticos y filósofos Arnauld y Malebranche. El 15 de diciembre de ese mismo año murió von Boineburg. En 1 673, fue elegido como miembro de la Sociedad Real de Londres. A partir de 1 676 pasó el resto de su vida en Hannover, principalmente haciéndose cargo de la biblioteca de la corte. Además, promovió sociedades científicas y estuvo presente en la instalación de academias en Berlín, Dresden, Viena y San Petersburgo.

Murió el 14 de noviembre en 1 716 en Hannover, Alemania.

Gilles Personne de Roberval

Gilles de Roberval nació el 10 de agosto de 1 602 en Senlis, Francia.

Inició sus estudios matemáticos a la edad de catorce años. Mientras estudiaba, viajó mucho alrededor de Francia. Durante sus viajes acostumbraba a discutir temas avanzados con profesores universitarios de los pueblos que visitaba. En uno de sus viajes visitó Bordeaux y conoció a Pierre de Fermat. En 1 628, llegó a Paris e hizo contacto con el grupo de Marin Mersenne, al que pertenecían Hardy, Mydorge y Blaise Pascal.

En 1 632, fue nombrado profesor de filosofía de la Universidad Gervais en Paris y dos años más tarde, obtuvo el puesto de presidente matemático en la Universidad Royale. En 1 666, fue electo miembro fundador de la Academia Real de Ciencias.

En 1 669, creó el Balance Roberval, que es utilizado universalmente para medir en escalas los tipos de balances; los detalles de la creación los presentó el mismo año en que ingresó a la academia. Trabajó con Jean Picard en cartografía e hizo un mapa de Francia. Además, estudió el vacío y diseñó aparatos que fueron utilizados por Blaise Pascal en sus experimentos.

Murió el 27 de octubre de 1 675 en Paris, Francia.



James Gregory

James Gregory nació en noviembre de 1 638 en Drumoak, Escocia. Sus padres fueron John Gregory y Janet Anderson. Su padre estudió en la Universidad Mariscal y luego estudió teología en la Universidad de St. Andrews. James fue el menor de tres hermanos; su madre le enseñó geometría a temprana edad. Cuando su padre murió en 1 651, su hermano David le orientó en su educación, años después ingresó a la Universidad Mariscal en Aberdeen. En su juventud sufrió alrededor de dieciocho meses la fiebre cuartanal.

En 1 663 fue a Londres y conoció a John Collins con el que mantuvo una relación de amistad de toda la vida. También conoció a Robert Moray, presidente de la Sociedad Real, quien jugaría un papel muy importante en la vida de Gregory al facilitarle una posición en St Andrews que le permitía continuar con sus investigaciones.

En 1 664 fue a Italia y trabajó en la Universidad de Padua; ahí vivió con su profesor de filosofía. En su estancia en Padua publicó dos trabajos en 1 667 y 1 668. Gregory le envió una copia a Christian Huygens de uno de sus trabajos; Huygens nunca le contestó pero publicó que Gregory le había robado algunos de sus resultados. Esto conllevó a que Gregory no volviera a publicar sus resultados y que éstos se conocieran hasta en 1 930, encontrados en la biblioteca de St Andrews.

En 1 669 se unió en matrimonio con Mary Jamesome y tuvieron dos hijas y un hijo. En 1 974 Gregory se mudó a Edinburgh, Escocia, en donde murió a la edad de 36 años en octubre de 1 675.

15.7 Síntesis, análisis, investigación

1. Investigue y enuncie el principio de Cavalieri.
2. ¿Cómo valoraba Laplace a Fermat?
3. Describa brevemente la evolución del concepto de función.
4. Describa los Principia de Newton (use las citas de Rioja y Ordóñez que introducimos). Explique con detalle su importancia para la cosmología y para las ciencias en general.
5. Señale los momentos de creación y publicación sobre el cálculo de Newton y Leibniz.
6. Explique la crítica de Berkeley al cálculo. Comente.
7. Explique las ventajas de la expansión en series de las funciones para realizar las operaciones de la derivación y la integración.
8. ¿Qué piensa usted del hecho de que Newton crease y solo publicase mucho tiempo después?
9. Explique la "conexión" Leibniz-Descartes.
10. Comente el sentido de la precisión y el rigor lógicos en Newton y Leibniz.
11. Comente sobre el papel de la notación en Leibniz.
12. Describa y comente la polémica entre Newton y Leibniz sobre la paternidad del cálculo.
13. Explique brevemente el nuevo escenario para las ciencias que se dio durante el siglo XVIII.
14. Lea cuidadosamente el siguiente texto.

    "Es posible, por tanto, un conocimiento racional del universo a partir de principios mecánicos. Después de todo, la Naturaleza es una de las formas de revelación divina en las que podemos encontrar las huellas del Creador. Dios hace a los hombre partícipes de su sabiduría al permitirles desvelar parcialmente el secreto que las cosas ocultan y aproximarse, así, a la posesión de la verdad. Pero las explicaciones mecánicas tienen sus límites. Al menos eso es lo que Newton manifiesta un divulgado Escolio General que

añadió a la segunda edición de los Principia. Movimientos regulares como los que observamos en el sistema planetario 'no tienen un origen debido a causas mecánicas'; por el contrario, 'tan elegante combinación de Sol, planetas y cometas sólo pueden tener origen en la inteligencia y poder de un ente inteligente y poderoso' que gobierna el mundo como Señor de todas las cosas. Así, 'toda la variedad de cosas, establecidas según los lugares y los tiempos, solamente pudo originarse de las ideas y voluntad de un ente necesariamente existente' (Newton, 1987: 782 y 785)." [Rioja, Ana, Ordóñez, Javier: Teorías del Universo, Volumen II de Galileo a Newton, pp. 198, 199]

Explique la relación entre creación divina y conocimiento racional que se expresa en este texto. Comente la noción de verdad que se menciona.

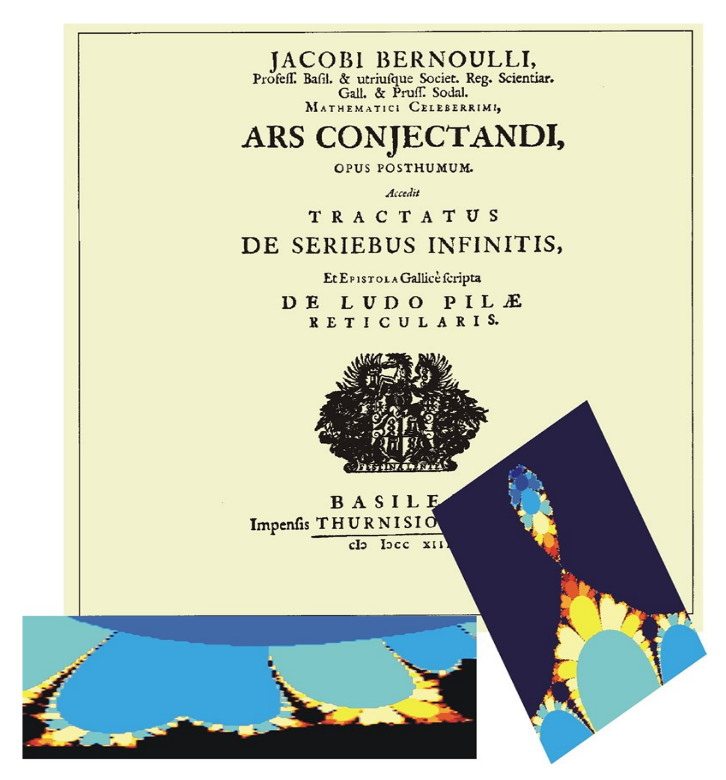
15. Considere la siguiente cita:

"Hasta el advenimiento de la mecánica de los cuantos, no ocurrió nada que modificara en ningún grado lo que constituye el sentido esencial de las dos primeras leyes del movimiento, a saber: las leyes de la dinámica han de ser expresadas en términos de aceleraciones. En este aspecto Copérnico y Kepler tienen todavía que ser clasificados entre los antiguos; buscaban leyes que determinaran las formas de las órbitas de los cuerpos celestes. Newton hizo patente que las leyes expresadas en esta forma no podían nunca ser más que aproximadas. Los planetas no se mueven en elipses exactas, debido a las perturbaciones originadas por las atracciones de otros planetas. Tampoco la órbita de un planeta se repite nunca exactamente, por la misma razón. Pero la ley de gravitación, que trata de las aceleraciones, era muy sencilla y se pensó que era completamente exacta hasta doscientos años después del tiempo de Newton. Corregida por Einstein siguió siendo una ley de las aceleraciones." [Russell, Bertrand: Historia de la Filosofía Occidental, Tomo II: La Filosofía Moderna, p. 160]

A partir del texto compare las diferencias entre Copérnico, Kepler y Newton.

CAPITULO XVI

EULER Y SU TIEMPO


JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar.
Gall. & Pruss. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et EPISTOLA Gallicè scripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.
BASILE
Impensis THURNISIO

Entre los años 1 600 y 1 900 gran parte de las matemáticas y la física estuvo vinculada de muchas maneras a los métodos del cálculo diferencial e integral. Estos fueron aplicados ampliamente en todos los fenómenos que exigían mediciones tanto en la mecánica, el magnetismo, la electricidad, la gravitación, el calor, la luz, el movimiento ondular.

16.1 Las matemáticas del siglo XVIII

Herencia de revoluciones en la cosmología y la astronomía: debe subrayarse que fueron los resultados en mecánica celeste y en física los que abrieron extraordinarias posibilidades para la construcción científica y matemática del siglo XVIII. Como bien describen Rioja y Ordóñez:

"En conjunto, puede afirmarse que, a partir del siglo XVIII, se obtienen espectaculares resultados en el conocimiento de la estructura del universo gracias al desarrollo de una doble vía de investigación, cuyas raíces hemos encontrado ya en el XVII. Nos referimos a la conjunción de una vertiente teórica, con un marcado carácter matemático, y otra práctica, ligada a la observación y la experimentación, de las que el volumen tercero dará cumplida cuenta. Con respecto a la primera de estas vías, baste indicar el importantísimo proceso de transformación de la mecánica celeste en

cuanto ciencia de carácter geométrico (que aún era en Newton) a su expresión en términos analíticos. Desde los tiempos de la Academia de Platón la astronomía había quedado estrechamente ligada a la geometría. En consecuencia, de Eudoxo a Kepler, pasando, desde luego, por Ptolomeo y Copérnico, ésa fue la ciencia matemática utilizada sin excepción para calcular y predecir los movimientos planetarios. En el siglo XVII tuvo lugar la invención del cálculo infinitesimal por Leibniz o el método de fluxiones por Newton; y, sin embargo, en la redacción de los Principia este último no se sirvió del procedimiento matemático por él creado años antes. Muy al contrario, ateniéndose al modo tradicional de hacer astronomía, escribió su obra en forma enteramente geométrica." [Rioja, Ana, Ordóñez, Javier: Teorías del Universo, Volumen II de Galileo a Newton, p. 272]

Y lo que resulta esclarecedor del carácter de los trabajos matemáticos de este siglo:

"... con posterioridad a la publicación de los Principia, comenzó la tarea de convertir la mecánica geométrica en mecánica analítica. Al servirse de ecuaciones más que de figuras, fue posible abordar problemas de cálculo mucho más complejos, tales como el de las perturbaciones planetarias, directamente relacionado con el problema de tres cuerpos (cálculo de la trayectoria de tres cuerpos, en interacción recíproca, como, por ejemplo, el Sol, la Luna y la Tierra)." [Rioja, Ana, Ordóñez, Javier: Teorías del Universo, Volumen II de Galileo a Newton, p. 272]

Durante el siglo XVII se había dado en el desarrollo de las matemáticas un énfasis en las aplicaciones. Sin embargo, éste se potenció aun más durante el siglo XVIII. Por supuesto, esto era concurrente con la demanda creciente hacia las ciencias en la vida social, en particular en la vida económica. Es decir, la dimensiones económicas, técnicas o la misma vida social y general juegan un papel en la naturaleza y las fronteras de la práctica matemática. Estos factores son importantes cuando se quiere estudiar la historia de las ciencias. Por supuesto, no debe caerse en determinismos mecánicos y estériles. Esto es así porque la creación intelectual suele establecer distancias con los contextos materiales y sociales inmediatos para abrir lugar al libre curso de la imaginación y el razonamiento lógico.

Esto sucede con las matemáticas porque, a pesar de su naturaleza abstracta, no puede evitar el influjo de las realidades sociales y materiales.

Resulta muy interesante señalar el gran logro de los matemáticos europeos que en poco menos de dos siglos habían logrado empujar significativamente las fronteras de la producción matemática de toda la Antigüedad. Sin duda, en su explicación convergen las diferencias entre las sociedades y en el trabajo intelectual que existieron en este escenario social. Debe subrayarse la existencia de un ritmo muy elevado en la producción científica matemática que ha sido característica decisiva para el progreso de la cultura y la sociedad occidentales. No sólo se potenciaron cuantitativamente los trabajos sino también cualitativamente, y tanto en lo que se refiere a la profundidad de los métodos como a la creación de nuevos conceptos y de diferentes disciplinas matemáticas.

Hay varios cambios en relación con las matemáticas antiguas que introdujeron los matemáticos occidentales del siglo XVII.

En primer lugar, deben subrayarse los diferentes papeles asignados al álgebra y la geometría. Se pasó de un dominio en métodos y criterios de rigor, de la validez, con base en la geometría, a una mayor relevancia del álgebra. Los resultados de las matemáticas dejaron de concebirse como simples idealizaciones de la experiencia y se empujó hacia una construcción más abstracta de conceptos y métodos. Al mismo tiempo, sin embargo, la creación del cálculo, que incluía métodos alejados de aquellos estándares de rigor y deducción propios de la geometría clásica, promovió la utilización de procesos inductivos en las matemáticas.

De igual manera, se dio una estrecha vinculación entre las matemáticas y las ciencias naturales, lo que empujó hacia una mayor interdependencia y fusión teóricas que aumentaba la convergencia entre las ciencias y las matemáticas y evadiendo en parte sus distinciones.

Por otro lado, las matemáticas del siglo XVIII, a diferencia de las del siglo XVII, fueron esencialmente cuantitativas, debido precisamente a esa relación estrecha con las ciencias naturales. Esto configuraba lo que se puede describir como una situación contradictoria. Mientras que se tenía una gran producción matemática y un gran éxito en la capacidad para predecir en las ciencias, existía a la vez un conjunto considerable de debilidades en sus fundamentos lógicos. A pesar de la falta de claridad y precisión lógicas en el cálculo diferencial e integral y el uso poco cuidadoso de los números, esta disciplina encontró un extraordinario progreso.

Los números irracionales eran admitidos a principios del XIX, aunque no los negativos ni los complejos.

En este escenario, varias figuras fueron relevantes: empezando con el mismo Leibniz, luego los hermanos Bernoulli [Jacques (1654 - 1705) y Jean (1667 - 1748)], Euler (1707 - 1783), Lagrange (1736 - 1813) y Laplace (1749 - 1827). Aunque debe incluirse a los matemáticos franceses Clairaut (1713 - 1765), d'Alembert (1717 - 1783) y Maupertuis (1698 - 1759), los hermanos suizos Nicolaus (1695 - 1726) y Daniel Bernoulli (1700 - 1782) [hijos de Jean].

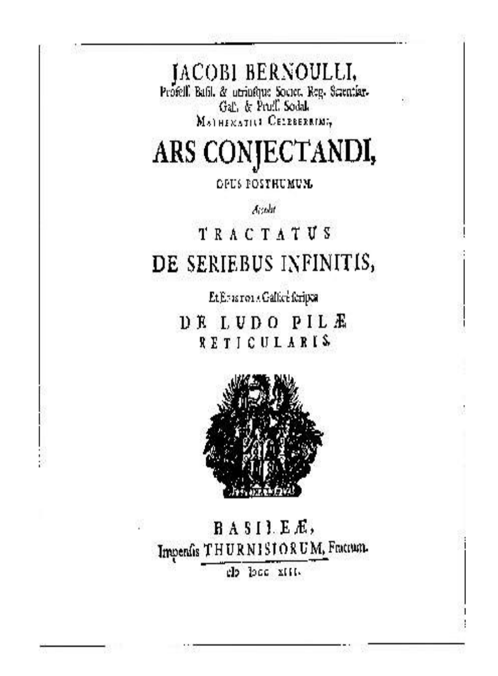
16.2 Los Bernoulli

Los Bernoulli refieren a una de esas raras situaciones en la historia de las matemáticas: una misma familia a la cual pertenecieron muchas personas que contribuyeron a estas disciplinas con relevancia. Basilea, Suiza, es el lugar. Todo inicia con Nicolaus, padre de Jacob y de Johann. Jacob estudió teología y Johann medicina. Pero rápidamente se convirtieron en discípulos de Leibniz.

Jacob ocupó la cátedra de matemáticas de la Universidad de Basilea de 1687 a 1705, cuando muere.

Johann lo sucedió en ese puesto por más de 40 años. Antes había sido profesor en Groningen.

Jacob hizo importantes contribuciones a las coordenadas polares, el estudio de la catenaria, la lemniscata, y la espiral logarítmica, y trabajó con curvas que lo llevaron a asuntos en el cálculo de variaciones. Pero, además, trabajó las probabilidades: su Ars conjectandi (publicado en 1713) establece el "teorema de Bernoulli" sobre las distribuciones binomiales y aquí aparecen los llamados "números de Bernoulli".


JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar.
Gall. & Pruss. Sodal.
Mathematici Celeberrimi,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et Epistola Gallicè scripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.
BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.
cIↃ IↃcc xiii.

Ars Conjectandi, de Jacob Bernoulli.

Johann trabajó muy asociado a su hermano y muchas de sus contribuciones son conjuntas. A partir del estudio de la curva braquistócrona se le considera el creador del cálculo de variaciones. Esta curva fue estudiada por Leibniz y los hermanos Bernoulli. Se construye a partir de dos puntos en un campo gravitacional: el movimiento de más rápido descenso de un punto masa que se mueve entre los dos puntos dados. A la solución se le llama la cicloide.

Johann tuvo dos hijos: Nicolaus y Daniel, el primero murió joven (aunque llegó a plantear lo que se llama la "paradoja de San Petersburgo"), y el segundo contribuyó a la astronomía, la física y la hidrodinámica (en su libro Hydrodynamica, 1738, estableció la teoría cinética de gases). Fue profesor también en la Universidad de Basilea hasta 1777.

En 1696, en la revista Acta Eruditorum, Johann Bernoulli presentó un reto para resolver un problema: "Sean dos puntos A y B en un plano vertical. Se trata de encontrar la curva que debe seguir un punto M que se mueve sobre AMB tal que comienza en A y alcanza B en el tiempo más corto bajo su propia gravedad" [Struik: A source book ..., p. 392]. En 1697 dio una solución en un artículo que se titulaba: "Curvatura radii in diaphanis non uniformibus", en la misma Acta Eruditorum. El llamó a la curva solución la brachystocrona. Se trata de una cicloide. En el mismo número de esa revista se publicó una solución dada por su hermano Jakob: " Solutio problematum fraternorum ... una cum propositione reciproca aliorum". Otras soluciones fueron ofrecidas incluso en esa revista por Leibniz, L'Hôpital, Tschirnhaus y Newton. En estos artículos se inicia el cálculo de variaciones.

16.3 Euler

Los Bernoulli tuvieron una contribución adicional. Euler, quien había nacido en Basilea, Suiza, en 1707, comenzó sus estudios superiores en la Universidad de Basilea en 1720. Allí se relacionó con Jean (o Johann) Bernoulli. El padre de Euler había estudiado matemáticas, precisamente, con Jacob Bernoulli. En 1725, Euler fue a San Petersburgo recomendado por Nicolaus el hijo de Johann para trabajar en la Academia. En 1741, dejó San Petersburgo, donde había inestabilidad política, y fue hacia la Academia de Berlín (Alemania), de reciente formación por el concurso de Federico el Grande; estuvo entre 1741 y 1766. Luego, volvió a San Petersburgo y permaneció entre 1766 - 1783. Euler terminó su vida ciego, en 1735 perdió un ojo, y el otro en 1766 (a pesar de esto, en este periodo completó la mitad de sus obras).



Euler, estampilla.

Leonhard Euler, junto con Cauchy, fue el matemático más prolífico de todos los tiempos. Sus cerca de novecientos trabajos científicos y más de 3 000 cartas profesionales condensan casi todos los asuntos matemáticos del siglo XVIII, en matemáticas aplicadas y puras. Su obra incluye no solo artículos o libros científicos sino también textos y síntesis integradoras de temas, que evidencian una gran disposición a la enseñanza y una vocación social importante. Euler publicaba libros de alta calidad a una velocidad de unas 800 páginas por año. Sin duda, fue el matemático más relevante del siglo XVIII.

La obra de este insigne matemático ofrece la posibilidad de apreciar la extraordinaria cantidad y diversidad de las aplicaciones de las matemáticas y en particular del cálculo. Escribió sobre las ecuaciones diferenciales, geometría analítica y diferencial de curvas y superficies, series y cálculo de variaciones. También en las aplicaciones, Euler calculó la perturbación de los cuerpos celestes en la órbita de un planeta y la trayectoria de proyectiles lanzados en medios con resistencia determinada. También estudió la propagación del sonido y la consonancia y disonancia musicales. Algo que a veces no se conoce, Euler fue el único de los científicos del siglo XVIII que afirmó el carácter ondulatorio de la luz y no corpuscular, analizó el calor precisamente como una oscilación molecular. Euler describió con ecuaciones diferenciales el movimiento de un fluido (ideal) y aplicó su modelo incluso a la circulación sanguínea.

Escribió libros de texto, por lo que en muchos asuntos estableció la forma y la notación que han subsistido hasta nuestros días, como es el caso de nuestra trigonometría que se basa en valores y razones trigonométricas y el tipo de notación que todavía usamos. Euler estableció con sus textos un modelo por seguir por centenares de años en la mecánica, álgebra, análisis matemático, geometría diferencial y cálculo de variaciones.

Sobre el cálculo de variaciones, con base en los trabajos de los Bernoulli en el estudio de problemas isoperimétricos, Euler buscó una teoría general, que publicó en 1744: " Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive propietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti" (``Un método para descubrir líneas curvas que tienen la propiedad de un máximo o mínimo o la solución del problema isoperimétrico tomado en su sentido más amplio"). Este sería perfeccionado y presentado de la manera que hoy se conoce por Lagrange.

Para algunos historiadores de las matemáticas, Euler hizo por el cálculo infinitesimal de Newton y Leibniz lo que había hecho Euclides por la geometría de Eudoxo y Teeteto, o Vieta por el álgebra de al-Khwarizmi y de Cardano. Con los trabajos de Euler, los resultados y métodos de Newton y Leibniz se integraron en el análisis, conceptualizado este último como aquel campo matemático que trata del estudio de los procesos infinitos.

Una de las obras magistrales en la que realiza este gran trabajo de síntesis y ampliación del cálculo infinitesimal fue Introductio in analysin infinitorum, publicada en 1 748. En este Introductio, dos volúmenes, cubre una gran cantidad de temas. Desde las series infinitas para funciones como e^x, $\cos h$ y sen x, el tratamiento de curvas con ecuaciones (geometría analítica), la teoría de la eliminación, la función Zeta en su relación con la teoría de números primos. En este libro se introduce la famosa relación:

$$e^{ix} = \cos x + i \, sen x$$

El cálculo diferencial e integral, la teoría de las ecuaciones diferenciales (con la distinción entre lineales, homogéneas, exactas), el Teorema de Taylor con aplicaciones, las integrales eulerianas Γ y B, se encuentran en otros textos clásicos: Institutiones calculi differentialis (1755) e Institutiones calculi integralis (1768 - 1774, 3 volúmenes).

La dinámica de Newton para los puntos masa desarrollados por métodos analíticos se encuentra en el texto: Mechanica, sive motus scientia analytice exposita (1736). Sobre los cuerpos sólidos: Teoría motus corporum solidorum seu rigidorum de 1765. El álgebra, en 1770: Vollständige Anleitung zur Algebra. En este último se desarrolló la teoría de ecuaciones cúbica y bicuadrática y las ecuaciones indeterminadas.

Sus trabajos en astronomía (Teoria motus planetarum et cometarun 1774), Optica (Dioptrica, 1769 - 1771), teoría de números, hidráulica, artillería, y otros campos reflejan la inteligencia y dedicación de este gran científico suizo.

Muchas de las distinciones, presentaciones, notaciones, etc. desarrolladas por Euler han quedado tal cual hasta nuestros días, como, por ejemplo, en la trigonometría.

El concepto central con el que Euler va a construir el nuevo análisis es precisamente el de función.

Esta idea, que ya había estado presente de manera intuitiva en otros matemáticos previos, va a adquirir la relevancia teórica de las matemáticas modernas. Para Euler una función es "cualquier expresión analítica formada con la cantidad variable y con números o cantidades constantes".



L'Hôpital.

La definición hacía referencia a funciones algebraicas, construidas por medio de las 4 operaciones fundamentales y la extracción de raíces, y las funciones trascendentes elementales ($\log x$, e^x, $\operatorname{sen} x$, etc.)

El concepto de función y las funciones algebraicas y trascendentes elementales ya habían sido introducidas en el siglo XVII. En la consideración de varios problemas clásicos, Leibniz, Jacques (Jakob), Jean (Johann) Bernoulli, L'Hôpital, Huygens y Pierre Varignon usaron funciones conocidas y construyeron muchas otras de mayor complejidad.

Euler definió las funciones:

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

$$\log x = \lim_{n \to \infty} n\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right).$$

Euler hizo un tratamiento completo y sistemático de las funciones trigonométricas que habían recibido ya un tratamiento en forma de serie. Eso lo realizó en un artículo del año 1748 sobre las desigualdades en los movimientos de Júpiter y Saturno.

Euler estableció una diferenciación entre las funciones de acuerdo con la forma en que se combinan las variables y constantes que ellas poseen. Las funciones trascendentes realizan un número infinito de las combinaciones que realizan las algebraicas. Esto establecía que las funciones trascendentes se podían expresar por medio de series infinitas. Fue precisamente esta noción de función reducida a una expresión analítica finita o infinita la que, con el tiempo, se fue generalizando hacia la idea de la función, simplemente como una combinación de operaciones, independientemente de las operaciones involucradas. Es el sentido que ya se encuentra en los años 1797 y 1806 en el trabajo del matemático francés Lagrange.

Con base en este tipo de trabajos, rápidamente fueron construidas integrales elípticas indefinidas, la función gama y otras más.

Fue también en el siglo XVIII que se desarrolló el cálculo en funciones de dos y tres variables. Aunque Newton, Jean y Nicolaus Bernoulli habían realizado la diferenciación en funciones de 2 variables, la teoría fue plenamente desarrollada por varios matemáticos: Alexis Fontaine de Bertins (1705 - 71), Euler, Clairaut y d'Alembert. Al principio se usó el mismo signo d para expresar la derivada. La idea era simple: efectuar la derivada sobre una variable dejando como constantes las otras. La derivación "parcial" (para una variable) tuvo mucha relevancia en las ecuaciones diferenciales. En relación con asuntos de hidrodinámica, en los que aparecían las ecuaciones diferenciales, Euler hizo un amplio tratamiento de la derivación parcial. En 1734, por ejemplo, Euler mostraba que si $z = f(x, y)$

entonces

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Entre 1744 y 1745, d'Alembert extendió el cálculo de las derivadas parciales (trabajando en dinámica).

Euler hizo un gran trabajo en el progreso de las matemáticas aplicadas, las que se puede decir efectivamente que nacieron realmente con el mismo Newton:

"Las modernas matemáticas aplicadas se originaron en la teoría de la gravitación universal que Newton desarrolló en sus Principia. Antes de Newton la astronomía era puramente descriptiva. Se describían cada vez con mayor precisión los movimientos de los planetas, y se les acoplaba desde los babilónicos a Tolomeo en marcos geométricos de complejidad cada vez mayor, Copérnico simplificó su geometría. Pero no había ninguna hipótesis física que se resumiera y consolidara en postulados de los que poder deducir aquella geometría. Se necesitaban observaciones precisas para establecer bien los hechos antes de poder enunciar con provecho dichos postulados. Esas observaciones las suministró abundantemente Tycho Brahe (danés, 1546 - 1601) cuyo laborioso ayudante durante algún tiempo, Juan Kepler (alemán, 1571 - 1630), resumió las observaciones de las tres leyes que llevan su nombre." [Bell, E.T.: Historia de las matemáticas, p. 170.]

A pesar de todo y como siempre sucede en la construcción científica o intelectual, algunos de sus resultados o suposiciones han resultado ser imprecisos o equivocados. Por ejemplo, algunas de sus series infinitas no son convergentes, a pesar de que Euler así las consideró. Fue característico de todo el siglo XVIII un manejo muy liberal de los procesos infinitos, y por lo tanto sin mucha precisión en los criterios de convergencia. De igual manera, el manejo de los infinitesimales: había -según Euler- órdenes infinitos de pequeñas cantidades que son todas 0 pero que se deben distinguir.

El asunto en juego aquí era el del paso al límite y la fundamentación del cálculo. Fue d'Alembert quien introdujo el término "límite" para expresar el acercamiento de una cantidad a otra dada y consideraba que diferenciar refería a un límite de la razón de diferencias finitas de 2 variables dentro de una ecuación dada. No tuvo mucho éxito entre sus contemporáneos; las críticas de Berkeley contra Newton o de Nieuwentijdt contra Leibniz pesaron mucho en la época.

16.4 Biografías



Leonhard Euler

Leonhard Euler nació el 15 de abril de 1 707 en Basel, Suiza. Su padre Paul Euler había estudiado teología en la Universidad de Basel y era un ministro protestante, se casó con Margaret Brucker.

Su interés hacia las matemáticas se debió a la enseñanza que su padre le brindó y a las lecciones privadas que tomó. A la edad de catorce años su padre lo envió a la Universidad de Basilea, en donde recibió clases privadas del maestro Johann Bernoulli, que descubrió su gran potencial para las matemáticas.

En 1 723 Euler completó su maestría en filosofía habiendo contrastado las ideas filosóficas de Descartes y Newton. Ese mismo año inició sus estudios teológicos, aunque nunca tuvo mucho interés por el tema. Completó la universidad en 1 726 y reconstruyó muchos trabajos matemáticos de Varignon, Descartes, Newton, Galileo y otros. El año siguiente recibió el Gran Premio de la Academia de Paris por uno de sus trabajos, y se unió a la Academia de Ciencias de San Petersburgo.

Leonhard Euler sirvió como un lugarteniente médico en la armada rusa de 1 727 a 1 730. El 7 de enero de 1 734, se casó con Katharina Gsell. Tuvieron trece hijos, aunque sólo cinco sobrevivieron su infancia. Euler manifestó que muchos de sus mayores descubrimientos los hacía mientras sostenía a un bebé en sus brazos y los demás se encontraban jugando alrededor de sus pies.

En 1 735 los problemas de salud de Euler comenzaron y en 1 738 ya había perdido la visión en uno de sus ojos. El 18 de septiembre de 1783, aproximadamente a las cinco de la tarde, sufrió una hemorragia cerebral. Alrededor de las once de la noche pereció en San Petersburgo, Rusia.



Johann Bernoulli

Johann Bernoulli nació el 27 de julio de 1 667 en Basilea, Suiza. Sus padres fueron Nicolaus y Margaretha Bernoulli. Fue el hermano menor de Jacob Bernoulli. Su educación de joven fue estrictamente moral y religiosa. El interés de sus padres era un estudio en administración para que se hiciera cargo del negocio familiar y a los quince años inició a trabajar en el negocio de especias, no siendo esta experiencia satisfactoria para Johann, trabajó allí solo durante un año, al finalizar este año su padre finalmente aceptó que ingresara a la Universidad de Basilea a estudiar medicina.

En la Universidad estudió matemáticas con su hermano y después de dos años de estudio Johann alcanzó el mismo nivel de conocimiento que su hermano. En 1 691, fue a Ginebra a dar clases de cálculo diferencial. De ahí partió a París, en donde conoció matemáticos del círculo de Malebranche, entre ellos L'Hôpital, a quien Johann enseñó, acerca de los nuevos métodos de cálculo de Leibniz que acababan de ser publicados. También mantuvo una amistad con Varignon y más tarde con Leibniz.

En 1 694, de regreso en Basilea hizo su doctorado acerca de la aplicación de las matemáticas en la medicina. En 1 695, le ofrecieron un puesto como en Groningen, el cual aceptó. Se casó con Drothea Falkner y tuvieron tres hijos, los cuales se convirtieron más tarde en matemáticos, ellos fueron Nicolaus (II), Daniel y Johann (II). Regresó a Basilea dos días después de que su hermano Jacob murió y tomó su puesto en la Universidad de Basilea. Fue elegido como miembro de las academias de París, Berlín, Londres, San Petersburgo y Bolonia. En su tumba está inscrito “El Arquímedes de su era”, como era conocido.

Murió el 1 de enero de 1 748 en Basilea, Suiza.



Jacob Jacques Bernoulli (II)

Jacob Bernoulli II nació el 17 de octubre de 1 759 en Basilea, Suiza. Fue uno de los hijos de Johann Bernoulli II. Siguiendo la tradición de la familia, estudió leyes pero sus intereses se basarían en el estudio de las matemáticas y de la física.

En 1 782, su tío Daniel Bernoulli quien ocupaba el puesto de presidencia en físicas en la Universidad de Basilea, murió dejando la oportunidad a su sobrino de aplicar por el puesto. Después de presentar un trabajo en física para aplicar por el puesto, éste se le fue negado.

Fue asignado secretario del Mensajero Imperial de Turín y Venecia. Más tarde, recibió una oferta para un puesto académico en San Petersburgo. Se trasladó a Petersburgo y empezó a escribir importantes trabajos en física que presentó a la Academia de Petersburgo. Su fama en la ciudad creció después de se supo que su tío Daniel Bernoulli había trabajado ahí junto a Euler.

Jacob II se casó con una nieta de Euler en Petersburgo. Trágicamente se ahogó el 15 de agosto de 1 789, a la corta edad de veintinueve años en el Río Neva.



Jacob Jacques Bernoulli

Jacob Bernoulli nació el 27 de diciembre de 1 654 en Basilea, Suiza. Su padre fue Nicolaus Bernoulli, miembro del consejo municipal y magistrado de Basilea quien había heredado de su padre el negocio de especies. Su madre provenía de una familia de banqueros. Sus padres lo obligaron a estudiar teología y filosofía, algo que él resintió, aún así se graduó de la Universidad de Basilea con una maestría en filosofía en 1 671 y una licenciatura en teología en 1 676.

Mientras estudió filosofía y teología, tomó cursos de matemáticas y astronomía en contra de los deseos de sus padres. Jacob fue quien creó la tradición en su familia de estudiar matemáticas, más tarde su hermano y otros miembros de la familia seguirían sus pasos. En 1 676, se mudó a Génova y empezó a trabajar como tutor. Luego viajó a Francia y estuvo allí durante dos años en los cuales estudió con los seguidores de Descartes, dirigidos por Malebranche. En 1 681, viajó a los Países

Bajos en donde conoció a Hudde. Luego se dirigió a Inglaterra donde conoció a Boyle y a Hooke. De regreso a Suiza, enseñó mecánicas en la Universidad de Basilea desde 1 683, después de rechazar un puesto en la Iglesia debido a su amor hacia las matemáticas. Un año más tarde se casó con Judith Stupanus y tuvieron dos hijos.

Su hermano menor, Johann le pidió a Jacob que le enseñara matemáticas y así terminaron tomando cursos juntos; pero más tarde su relación cambiaría a ser la de dos rivales. Obtuvo la presidencia en matemáticas en la Universidad de Basilea y la mantuvo hasta su muerte el 16 de agosto de 1 705 y como es de esperarse su hermano lo reemplazaría en la universidad.



Daniel Bernoulli

Daniel Bernoulli nació el 8 de febrero de 1 700 en Groningen, Países Bajos. Su padre fue Johann Bernoulli. A la edad de cinco años, su familia regresó a Basilea debido a que su padre ocuparía el puesto que su tío dejó al morir.

La historia padre-hijo se repitió, Johann obligó a su hijo a asistir a la Universidad de Basilea a la edad de trece años a estudiar filosofía y lógica y, en 1 716, obtuvo su maestría.

Mientras estudiaba en la universidad su padre y su hermano mayor Nicolaus II le enseñaban métodos de cálculo. Su padre no aceptaba que Daniel estudiara matemáticas ya que afirmaba que en las matemáticas no había dinero, así que lo envió de regreso a la Universidad de Basilea a estudiar medicina.

En 1 718, estudió en Heidelberg y un año más tarde en Strasbourg; en 1 720 regresó a Basilea a completar su doctorado en medicina. Después de ser rechazado para dos puestos en la Universidad de Basilea, Daniel partió a Venecia con el propósito de estudiar medicina práctica, pero esto no sucedió ya que contrajo una enfermedad que le impidió viajar a Padua.

Aún así, en Venecia inició a trabajar en matemáticas y publicó su primer trabajo en 1 724, con la asistencia de Goldbach.

En 1 725, ganó un premio de la Academia de París por uno de sus trabajos, y más tarde le ofrecieron un puesto de profesor en la Academia Rusa en San Petersburgo; en donde su hermano Nicolaus II también había recibido una oferta, así que ambos partieron a San Petersburgo.

Después de ocho meses, su hermano murió de fiebre y su padre envió a uno de sus mejores pupilos, Leonard Euler a trabajar con él, de 1 727 a 1 733.

Un año más tarde, regresó a Basilea. Ese mismo año su relación con su padre se vio afectada después de que fueron considerados como iguales ante la Academia de París.

En 1 750, obtuvo el puesto de presidencia de físicas en la Universidad de Basilea, puesto que mantuvo por veintiséis años. Ganó el Gran Premio de la Academia de París diez veces.

Murió el 17 de marzo de 1 782 en Basilea, Suiza.

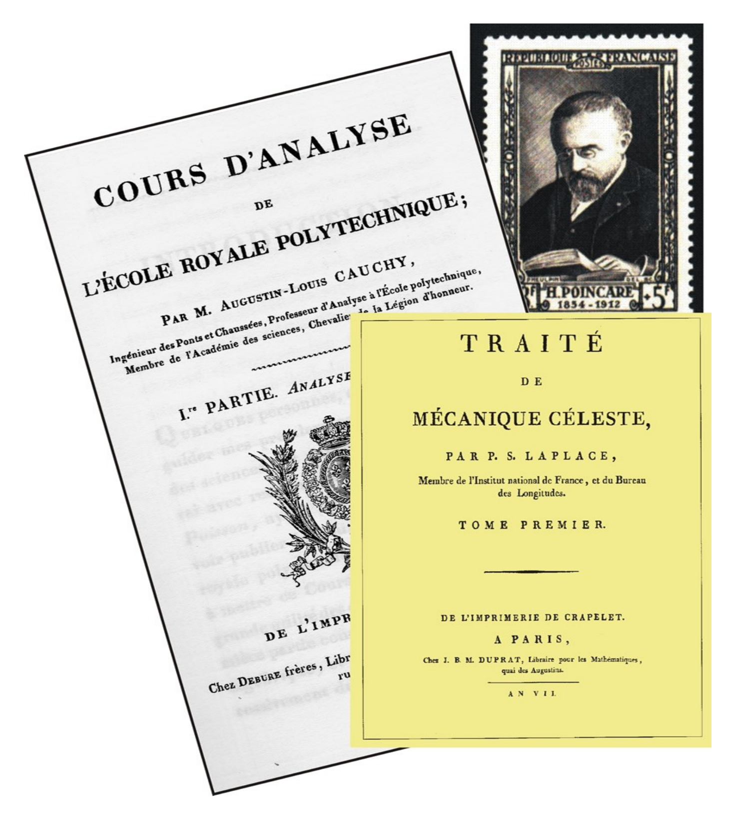
16.5 Síntesis, análisis, investigación

1. ¿Qué significa el paso de la mecánica geométrica a la mecánica analítica?
2. Mencione los cambios que introdujeron los europeos en las matemáticas durante el siglo XVII.
3. ¿Qué quiere decir que las matemáticas del siglo XVIII fueron cuantitativas? ¿Por qué fue así?
4. Resuma algunas contribuciones a las matemática de parte de los Bernoulli.
5. Describa resumidamente las grandes líneas de la obra matemática de Euler.
6. Explique qué es el Análisis.
7. ¿En cuál libro de Euler aparece la ecuación:

   $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$?
8. Explique la diferencia entre funciones algebraicas y trascendentes según Euler.
9. Según Bell, ¿cómo se originaron las matemáticas aplicadas modernas?
10. Explique el problema de la divergencia de algunas series para Euler.

CAPITULO XVII

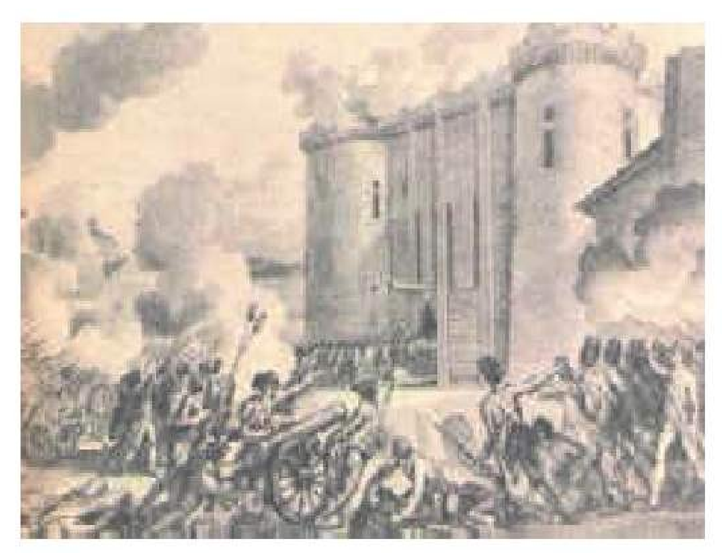
LAS MATEMÁTICAS EN FRANCIA



COURS D'ANALYSE
DE
L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE;
PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,
Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École polytechnique,
Membre de l'Académie des sciences, Chevalie[r] [de] la Légion d'honneur.
I.re PARTIE. ANALYSE
DE L'IMPR
Chez DEBURE frères, Libr

TRAITÉ
DE
MÉCANIQUE CÉLESTE,
PAR P. S. LAPLACE,
Membre de l'Institut national de France, et du Bureau des Longitudes.
TOME PREMIER.
DE L'IMPRIMERIE DE CRAPELET.
A PARIS,
Chez J. B. M. DUPRAT, Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins.
AN VII.

Francia aportó durante los siglos XVIII y XIX muchos matemáticos de primera línea. Varios factores jugaron a favor de esta relevancia colectiva francesa.



Toma de la Bastilla.

Debe tenerse en mente que ese país vivió un profunda revolución y antes una gran efervescencia intelectual. Por eso, aunque Descartes fue colocado en el Índice de la Inquisición en 1664, en el siglo XVIII había retomado interés y, de hecho, en ciertos círculos se dio un debate entre cartesianos y newtonianos.

Voltaire fue un promotor de Newton en Francia (por ejemplo, por medio del libro Lettres sur les Anglais, 1734), y, de hecho, fue Madame du Châtelet, una de sus amigas, quien tradujo al francés nada menos que los Principia en 1759.



Chartres (Eure-et-Loire, Ile-de-France).

17.1 Clairaut, d'Alembert, de Moivre, Bézout

A favor de Newton fueron relevantes las expediciones a Perú y a Laponia, con Pierre de Maupertuis en esta última, que mostró cómo la Tierra se aplanaba en los polos. Con de Maupertuis viajó Alexis Claude Clairaut que ya había publicado un trabajo sobre geometría analítica y diferencial de curvas en el espacio (Recherches sur les courbes à double courbure, 1731). A Clairaut se deben resultados en las integrales de línea y las ecuaciones diferenciales y, precisamente, la llamada "ecuación de Clairaut".

Una figura clave de la Ilustración francesa fue Denis Diderot, el dirigente de la famosa Encyclopédie (28 volúmenes entre 1751 y 1752). Jean Le Rond d'Alembert fue el principal matemático en el proyecto de Diderot. En el año 1743 publicó Traité de dynamique con métodos para reducir la dinámica de cuerpos sólidos a la estática. Poco después, a partir de sus estudios del problema de la cuerda vibrante, desarrolló las ecuaciones diferenciales parciales (al igual que Daniel Bernoulli).

Uno de los temas que también se desarrolló en esta época fueron las probabilidades. Cabe mencionar al francés Abraham de Moivre, quien se afincó en Inglaterra, y que en 1733 había obtenido la función de probabilidad normal como aproximación a la ley del binomio y una fórmula equivalente a la de Stirling. De Moivre publicó The Doctrine of Chances en 1716.

Etienne Bézout (1730 - 1783) escribió un Cours de mathématique, 6 volúmenes, 1764 - 1769, que tuvo un gran éxito editorial. De hecho, una segunda edición salió a la luz pública rápidamente en 1770 - 1772. Por medio de textos como éste se dieron a conocer muchos de los resultados de Euler, d'Alembert, y otros matemáticos insignes.

Bézout, además de sus formidables textos, ofreció aportes en la teoría de la eliminación algebraica en los determinantes. En Théorie générale des équations algébriques, del año 1779, ofreció un método similar al de la regla de Cramer para n ecuaciones lineales con n incógnitas.

El teorema de "Bézout" afirma precisamente que dos curvas algebraicas de grados m y n se cortan en $m \times n$ puntos.

Euler, d'Alembert y Etienne Bézout murieron en el año 1783.

17.2 En torno a la Revolución

El impacto de la Revolución Francesa en la ciencia francesa y europea fue muy grande. Debe subrayarse: los gobiernos revolucionarios le dieron a la ciencia relevancia, la nutrieron con recursos y depositaron en ella muchas expectativas para afirmar los cambios sociales. Algunos matemáticos, como Monge y Carnot fueron republicanos apasionados y participaron activamente en las tareas revolucionarias. Y se beneficiaron de ello, de algunas maneras. Sin embargo, otros, como Bailly, Condorcet y el mismo Lavoisier, no sobrevivieron los nuevos tiempos por sus ataduras con el orden político y social previo.

En relación con la ciencia, las dos acciones más importantes que se tomaron entonces fueron:

- El establecimiento del sistema métrico decimal para los pesos y medidas.
- La reforma educativa más importante realizada desde el Renacimiento: la creación de la École Normale Supérieure, la École de Médecine y la École Polytechnique.

Estas nuevas Écoles, modelo para otros países, se construyeron con base en las academias científicas y escuelas militares y no con base en las universidades. Esto, por supuesto, ya que ellas habían permanecido en el marco ideológico y político del antiguo régimen.

Estas nuevas instituciones crearon un nuevo régimen estatal con profesores y científicos asalariados. Algo radicalmente diferente a lo que sucedía antes. Esto expandió las posibilidades del trabajo de los matemáticos y propulsó una generación importante que dejaría su impronta en la historia de las matemáticas.

La Revolución Científica del siglo XVII logró provocar una ruptura radical con el orden ideológico de la Edad Media, a la vez que retomaba el conocimiento griego antiguo, resolvía problemas clásicos con nuevos métodos (descripción matemática y el método experimental).

En el siglo XVIII se resolvieron con nuevos métodos asuntos que los griegos nunca pudieron imaginar.

No debe olvidarse en este escenario un estrecho vínculo con la producción económica y la técnica: a través de la química, la electricidad, la ingeniería mecánica.

Monge

La École Polytechnique, fundada en 1794, se convirtió en un modelo para el estudio de la ingeniería y de las escuelas militares. Los componentes de las matemáticas aplicadas y puras eran muy importantes. Y, de hecho, los mejores científicos de Francia se involucraron con ésta.



Monge, una estampilla.

Monge fue uno de los creadores de la École Polytechnique, profesor y administrador de ésta, un apoyo e importante dirigente de los matemáticos que estuvieron asociados con esa institución. Desarrolló la geometría descriptiva, que en un principio se llamó "estereotomía". Estos trabajos referían al estudio de las propiedades de las superficies, normales, planos tangentes, y una serie de temas que hoy entendemos sumergidos en la geometría tridimensional. El método esencial de la geometría descriptiva lo que hace es básicamente representar un objeto tridimensional en forma bidimensional.

Gaspard Monge se suele caracterizar como el primer especialista en geometría.

Creó los fundamentos de la geometría proyectiva y, además, contribuyó a la geometría diferencial y analítica. Sus obras principales fueron: Géométrie descriptive (1795 - 1799) y Application de l'analyse à la géométrie (1809). El primer libro condensaba las lecciones que Monge había dado en la École Normale, otra institución formativa, aunque con un menor nivel que la Polytechnique.

Monge desarrolló la geometría analítica en tres dimensiones. Por ejemplo, hizo un estudio sistemático de la recta en el espacio tridimensional, estudió los parámetros de dirección de una recta, la distancia de un punto a una recta, la distancia entre dos rectas, etc. Uno de sus resultados,

para dar un ejemplo: "Los planos trazados por los puntos medios de las aristas de un tetraedro y respectivamente perpendiculares a la arista opuesta, se cortan en un punto M que recibe el nombre de 'punto de Monge' del tetraedro. Este punto M es además el punto medio del segmento que une al baricentro y el circuncentro del tetraedro." [Boyer, Historia de la Matemática, p. 601].

El papel de Monge fue decisivo para devolverle a la geometría analítica una mayor relevancia, tanto en la creación matemática como en los planes de formación académica, lugar que había perdido debido al surgimiento y desarrollo extraordinarios del Cálculo.

Un detalle: las necesidades de enseñanza en la École Polytechnique o, incluso, en la École Normale, empujaron a crear textos escolares y una tradición relevante. Por ejemplo, se dio la publicación de varios libros de texto en geometría analítica (con mucha influencia de los trabajos de Monge) que perdurarían por muchos años. Entre ellos, textos de: Jean Baptiste Biot, Louis Puissant, F. L. Lefrançais, y Sylvestre François Lacroix. Este último tuvo un gran éxito con los textos de matemáticas en general, que se editaron muchas veces y se tradujeron a varios idiomas: Arithmetique, Géométrie, Algèbre, etc. Uno de los más famosos de Lacroix: Traité du calcul differentiel et de calcul intégral, 1797.

Dos de los discípulos de Monge contribuyeron a la geometría de forma diferente. Charles Dupin, quien utilizó métodos de Monge sobre la teoría de las superficies para encontrar rectas asintóticas y conjugadas. Un papel más decisivo tuvo Víctor Poncelet: retomando ideas de Desargues, dos siglos antes, fundó plenamente la geometría proyectiva. Su obra magistral fue Traité des propiétés projectives des figures que se publicó en 1822.

Carnot

También en la geometría debe citarse a Lázare Carnot, quien en 1801 publicó De la Corrélation des figures de la géométrie, donde buscaba encontrar un tratamiento más general para la geometría euclidiana. Tiempo después, en 1803, presentó Géométrie de position, una obra de geometría clásica que también introducía algunos elementos de análisis. Un ejemplo de esas generalizaciones de la geometría: el teorema del coseno,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

en el plano, se extiende a

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 - 2cd\cos B - 2bd\cos C - 2bc\cos D,$$

en el tetraedro donde a, b, c, d son las áreas de las caras y B, C y D los ángulos diedros formados por las caras con áreas c y d, b y d, b y c.

Carnot descubrió que los sistemas de coordenadas rectangulares y polares pueden transformarse de múltiples maneras sin que cambien las propiedades de las curvas, y empujó hacia lo que hoy se llaman las coordenadas intrínsecas.

Ahora bien, Carnot fue todo un personaje en la Francia de esa época. Republicano apasionado, como Monge, político y poeta, fue además un militar que tuvo éxitos en este territorio.

Legendre

Uno de los matemáticos insignes de Francia fue Adrien Marie Legendre, quien había enseñado entre 1775 y 1780 en la Escuela Militar de París y después sería profesor en la École Normale y en la École Polytechnique, así como, también, hizo trabajos de geodesia. Sus obras principales fueron: Elements de géométrie (1794), Essai sur la Théorie les nombres (1797 - 1798), Théorie des nombres (1830), Exercises du calcul intégral (1811 - 1819, en 3 volúmenes), Traité des fonctions elliptiques et des intégrales euleriénnes (1825 - 1832, también 3 volúmenes). En el primero de esos libros desarrolló un enfoque de la geometría que se separaba de los enfoques euclidianos clásicos favoreciendo necesidades formativas.

Es interesante señalar que Legendre trabajó en muchos de los temas en los cuales el matemático alemán Gauss también lo hizo: el cálculo, las ecuaciones diferenciales, teoría de números y matemáticas aplicadas. En el último libro que mencionamos arriba, Legendre denominó "funciones eulerianas" a las funciones gamma y beta. Es aquí, precisamente, donde se introducen soluciones a la conocida ecuación diferencial de Legendre

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

Éstas se llaman "polinomios de Legendre", ampliamente conocidas en la física-matemática.

Las integrales elípticas aparecen en trabajos de Legendre desde el año 1785, en particular en torno a la atracción gravitatoria de un elipsoide.

En geodesia, Legendre introdujo el conocido método estadístico de los mínimos cuadrados.

En la teoría de los números hizo contribuciones muy importantes. Su Essai sur la Théorie des nombres fue el primer tratado exclusivamente de teoría de números. En éste incluyó un resultado sobre las congruencias, que es muy famoso:

Cuando al tenerse que si p y q son dos enteros entonces existe otro número entero x tal que $x^2 - q$ es divisible por p, se dice que q es un residuo cuadrático de p.

Entonces, dados p y q son primos impares,

$x^2 \equiv q(\text{mod}\, p)$ y $x^2 \equiv p(\text{mod}\, q)$ son solubles a la vez o insolubles, salvo que p y q sean de la forma $4n+3$. En este último caso, una de las congruencias es soluble y la otra no lo es.

También Legendre en este mismo tratado hizo la conjetura que afirma que $\pi(n)$, el número de primos menores que el natural n, tiende a:

$$\frac{n}{\ln n - 1{,}08366}.$$

En 1825, ofreció un resultado sobre el último teorema de Fermat: una demostración de su insolubilidad para $n = 5$.

Lagrange

Otro de los grandes matemáticos de este siglo fue Joseph Louis Lagrange de origen italiano y francés, nacido en Turín. Estuvo durante 20 años en la Academia de Berlín, en el periodo que Euler volvió a San Petersburgo. De hecho, fue recomendado por Euler y d'Alembert a Federico el Grande.



Lagrange, una estampilla.

Luego se incorporó a la École Normale y la École Polytechnique en Francia.

Lagrange desarrolló un cálculo de variaciones con métodos exclusivamente analíticos, con lo que simplificó el trabajo de Euler, y aportó nuevos resultados. Este método apareció en "Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies", en 1760 - 1761. En este trabajo Lagrange hace un recuento del problema por resolver:

"El primer problema de esta clase solucionado por los geómetras es el de la Brachystocrona, o línea de descenso más rápido, la cual el señor Jean Bernoulli propuso hacia el final del último siglo. Fue resuelto solo para casos particulares, y no fue sino hasta algún tiempo después, en ocasión de las investigaciones sobre Isoperimetrica, que el gran geómetra que mencionamos y su ilustre hermano el señor Jacques Bernoulli dieron algunas reglas generales para resolver muchos otros problemas del mismo tipo. Pero puesto que estas reglas no eran suficientemente generales, todas estas investigaciones fueron reducidas por el famoso Sr. Euler a un método general, en un trabajo titulado Methodus inveniendi ..., un trabajo original que en todas partes irradia un profundo conocimiento del cálculo. Sin embargo, por más ingenioso y fértil que su método sea, debemos reconocer que no tiene la simplicidad que podría desearse en un asunto del análisis puro." [Lagrange, J. L.: "Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies", en Struik, D.: A source book ..., p. 407]

Algunos de los resultados de Lagrange: la teoría de la luna, soluciones al problema de los tres cuerpos, métodos de separación de raíces reales de una ecuación algebraica y de su aproximación por medio de fracciones continuas, funciones de raíces y sus permutaciones, y la teoría de números donde Lagrange estudió los residuos cuadráticos.

Sus obras fundamentales fueron: Mécanique analytique (1788), Théorie des fonctions analytiques (1797), Leçons sur le calcul des fonctions (1801). Lagrange trató de reducir el cálculo al álgebra en estos dos últimos libros. De hecho, se separó de Newton y de d'Alembert en su aproximación a los fundamentos del cálculo buscando su fundamento en el álgebra de series. Pensó que se podía expresar toda función como una serie, como la de Taylor, lo que resulta equivocado, debido a la divergencia de muchas series.

No obstante, se le reconoce un tratamiento abstracto de la función, que aplicó a diversos asuntos de álgebra y geometría.

Ahora bien, su enfoque aplicado a la mecánica de puntos y cuerpos sólidos, como hace en la Mécanique analytique, con resultados de Euler, d'Alembert y otros matemáticos, ofrece una reformulación algebraica del trabajo realizado con énfasis geométrico por Newton.

Tal vez, la contribución más importante de Lagrange estuvo en el cálculo de variaciones, nombre que deriva precisamente de algunas notaciones que él utilizó desde el año 1760. La idea básica consiste en encontrar $y = f(x)$ tal que la integral $\int_a^b g(x,y)dx$ sea máxima o mínima. Se sabe que Lagrange había comunicado a Euler, en 1765, sus ideas en torno a este asunto, y Euler decidió atrasar la publicación de sus propios resultados para darle el crédito a Lagrange.

También introdujo un método para resolver ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas, usando el método de variación de parámetros; usó los llamados "multiplicadores de Lagrange" para determinar extremos de funciones de varias variables con restricciones.

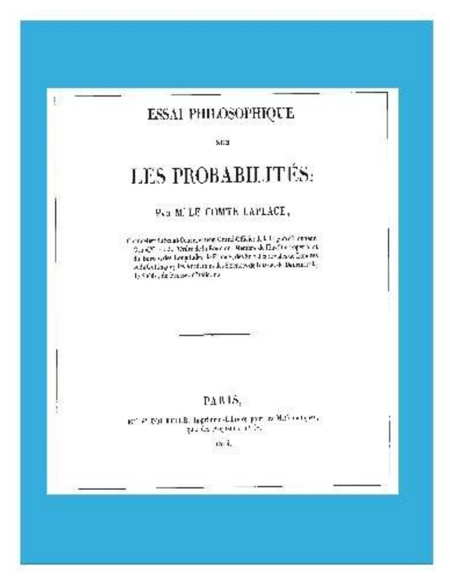
Laplace

Pierre Simon de Laplace fue profesor de la Academia Militar de París, puesto que logró con el apoyo de d'Alembert.



Laplace, estampilla.

Su papel fue importante durante la revolución francesa en la organización de la École Normale y la École Polytechnique. De hecho, Napoleón y Luis XVIII le brindaron muchos honores, aunque para ello se afirma que fue muy "flexible" con sus posiciones políticas.


ESSAI PHILOSOPHIQUE

LES PROBABILITÉS;

PAR M. LE COMTE LAPLACE,

PARIS,

Essai philosophique sur les probabilités, de Laplace.

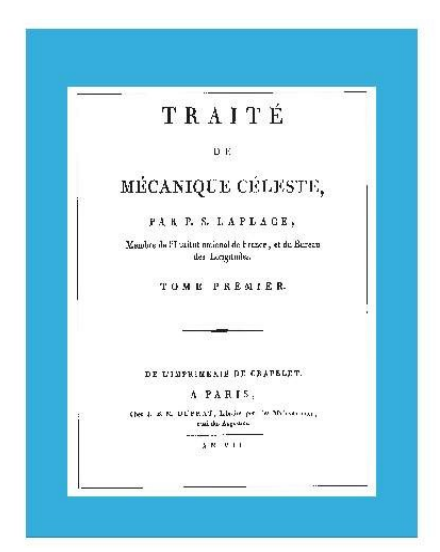
Las obras fundamentales de Laplace fueron: Théorie analytique des probabilités (1812) y Mécanique céleste (1799 - 1825, que incluía 5 volúmenes). La famosa ecuación de Laplace que refiere a la teoría del potencial se encuentra precisamente en esta última obra.

Se afirma con toda propiedad que esta última obra culminó los trabajos de Newton, Clairaut, d'Alembert, Euler y Lagrange sobre varios asuntos como la teoría sobre la luna, el problema de los tres cuerpos, las perturbaciones de los planetas, y la forma de nuestro planeta.

En lo que se refiere a las probabilidades, Laplace partía de la premisa de que éstas tenían sentido debido a que medio conocemos y medio desconocemos la realidad circundante. Lo señala con claridad:

"La probabilidad se relaciona, en parte, con esta ignorancia, en parte con nuestros conocimientos. Sabemos que de tres o más acontecimientos uno solo puede ocurrir, pero nada nos induce a creer que uno de ellos ocurrirá con preferencia a los otros. En este estado de indecisión nos es imposible predecir su acaecimiento con certeza. No obstante es probable que uno de estos acontecimientos, tomado arbitrariamente, no ocurra, porque vemos muchos casos igualmente posibles que excluyen su acaecimiento, mientras que sólo uno lo favorece.

La teoría del azar consiste en reducir todos los acontecimientos de la misma índole a un cierto número de casos igualmente posibles, es decir, tales que estemos igualmente inseguros de su acaecimiento, y en determinar el número de casos favorables al acontecimiento cuya probabilidad se indaga. La razón de este número con la de todos los casos posibles es la medida de la probabilidad, que no es más que una fracción cuyo numerador es el número de casos favorables y cuyo denominador es el número total de casos posibles". [De Laplace, Pierre Simon: "Sobre la probabilidad", p. 13]



TRAITÉ

DE

MÉCANIQUE CÉLESTE,

PAR P. S. LAPLACE,

Membre de l'Institut national de France, et du Bureau des Longitudes.

TOME PREMIER.

DE L'IMPRIMERIE DE CRAPELET.

A PARIS,

AN VII.

Mécanique céleste.

La teoría de las probabilidades había sido un resultado completamente nuevo en el siglo XVII, y se considera a Fermat y Pascal como sus fundadores. Si bien la motivación para el desarrollo de las probabilidades se asoció a los asuntos de los seguros, se sabe que fueron intereses en las cartas y el juego los que directamente motivaron a estos matemáticos. También debe mencionarse el nombre de Huygens, quien escribió el primer tratado de probabilidades: De Ratiociniis in ludo aleae.

El trabajo de Laplace incluye una discusión larga sobre los juegos de azar y de las probabilidades geométricas, incluye el teorema de Bernoulli y su relación con la integral normal, y con la teoría de los cuadrados mínimos inventada por Legendre. En su libro de 1812, por ejemplo, demuestra que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Laplace mostró cómo se podían realizar muchas aplicaciones de las probabilidades, como, por ejemplo, la teoría de errores, la mecánica estadística y la matemática actuarial.

Boyer comenta las diferencias entre Lagrange y Laplace de la siguiente manera.

"Las mentalidades de Laplace y de Lagrange, los dos matemáticos más importantes de la Revolución, eran diamentralmente opuestas en muchos aspectos. Para Laplace la naturaleza era lo esencial, y la matemática no era más que una caja de herramientas que él sabía manejar con extraordinaria destreza. Para Lagrange la matemática era un arte sublime que justificaba por sí mismo su existencia. La matemática de la Mécanique céleste se ha calificado a menudo de difícil, pero probablemente casi nadie la llamaría bella; en cambio, la Mécanique analytique ha sido admirada siempre commo un 'verdadero poema científico' por la perfección y grandiosidad de su estructura". [Boyer, C.: Historia de la matemática, p. 620]

Fourier, Poisson

También ligados a la École Polytechnique, deben mencionarse los nombres de Joseph Fourier, Siméon Denis Poisson y Augustin Cauchy.

Los trabajos de Poisson fueron variados y con una gran productividad: ecuaciones diferenciales, elasticidad, teoría del potencial, probabilidades. Su obra Traité de mécanique (1811) prosigue la tradición de Lagrange y Laplace en el estudio de la mecánica pero con la incorporación de resultados propios importantes.

Orientado hacia las aplicaciones de las matemáticas, Fourier ofreció una teoría matemática de la conducción del calor, con un método que se convirtió en la fuente de los métodos modernos en la física matemática y que utiliza la integración de ecuaciones diferenciales con condiciones de frontera (con el uso de series trigonométricas). Es, por supuesto, el creador de la serie de Fourier, que se puede aplicar a más funciones que, por ejemplo, la serie de Taylor, que forman parte de todos los cursos de cálculo y ecuaciones diferenciales para ingenieros.

La obra representativa de este matemático fue: Théorie analytique de la chaleur (1822), libro basado en ideas con las que había ganado un premio de la Académie des Sciences varios años antes. Aquí Fourier analizó la ecuación diferencial del calor en 3 dimensiones:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right],$$

donde $u(x, y, z, t)$ es la temperatura de un objeto en el tiempo t y en el punto (x, y, z).

Usando el método de la separación de variables, para resolver la ecuación, obtuvo representaciones en series trigonométricas de las soluciones.



Fourier.

Veamos lo que es la clásica serie de Fourier.

Si f es una función integrable en un intervalo $[-\pi, \pi]$, los coeficientes de Fourier en ese intervalo son:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)dx$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$

$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)$ sen $(nx)dx$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$

La serie de Fourier de f en $[-\pi, \pi]$ es:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)]$$

Poisson, publicó más de 400 trabajos y era en vida considerado un gran profesor de matemáticas. Estudió la electricidad y el magnetismo, como parte de la física matemática, e hizo trabajos en la mecánica celeste y sobre la atracción entre esferoides. Lleva su nombre la famosa "distribución", llamada también ley de los grandes números, que refiere a un caso límite de una distribución binomial de la forma $(p+q)^n$ (donde $p + q = 1$ y n es el número de experimentos). Si n tiende a ∞ y p tiende a 0, y permanece constante el producto np, el caso límite de la distribución binomial es la distribución de Poisson o, también se llama, la ley de los grandes números.

Lo ponemos de otra manera, en lenguaje moderno de probabilidades: si α es un real positivo y X es una variable aleatoria que puede tomar valores 0, 1, 2, 3,..., y si la probabilidad $P(X = k)$ se da por

$$P(X = k) = \frac{e^{-\alpha} \alpha^k}{k!}$$

cuando $k = 0, 1, 2, \ldots$

la función de distribución F_X se llama "distribución de Poisson" de parámetro α.

17.3 Cauchy, Galois

Aunque diferentes en sus trayectorias de vida, con perspectivas intelectuales distintas, y con personalidades disímiles, Cauchy y Galois representan dos de los principales constructores de las matemáticas francesas del siglo XIX.



Cauchy, en una estampilla.

Cauchy

Cauchy es considerado, después de Euler, el matemático más prolífico de todos los tiempos. Su mente y sus contribuciones en diferentes campos de las matemáticas puras y aplicadas: la teoría de funciones de variable compleja, la teoría matemática de la elasticidad, resultados en la teoría de la luz de la mecánica, etc. Por ejemplo, en 1831 ofreció el teorema que establece que toda función analítica en una variable compleja $w = f(z)$, puede desarrollarse en serie de potencias en un punto $z = z_0$; la serie converge en todos los valores de z que pertenecen a un círculo abierto con centro z_0 y tal que su circunferencia pasa por el punto singular z_1 para $f(z)$ más cercano a z_0. Las series se convirtieron en una dimensión decisiva de las funciones de variables tanto reales como complejas.

Una de sus contribuciones más importantes se dio en la potenciación del rigor en las matemáticas. Cauchy, al igual que Abel y Bolzano, buscó corregir las debilidades de un desarrollo matemático durante todo el siglo XVIII que puso su énfasis en la experimentación, la aplicación, la intuición, y no en los criterios lógicos y aquellos más bien asociados a la geometría clásica. Cauchy revisó cuidadosamente el concepto de función de una variable real. Y ofreció un fundamento al cálculo casi como el que encontramos hoy en los textos de matemáticas. Cauchy retomó el concepto de límite introducido por d'Alembert para definir la derivada de una función.

Cauchy uso la notación de Lagrange con un enfoque analítico y no algebraico. Brindó especial atención a la convergencia de las series. Es decir, buscó pruebas para demostrar la convergencia de la series. De hecho, varios criterios de convergencia de series llevan su nombre.

También dio una prueba de existencia para la solución de una ecuación diferencial y para un sistema de estas ecuaciones.

Se dice que tal era su productividad, que la Academia francesa limitó el tamaño de los artículos que se le enviaban a la revista Comptes Rendus para poder publicar los resultados de Cauchy.

Cauchy murió en el año 1857. Gauss había muerto dos años antes.

Ya volveremos a la obra de Cauchy.

Galois

Otro de los matemáticos franceses que forman parte de esta colección de eminentes científicos en ese escenario fue Évariste Galois, aunque se trata de un caso excepcional y diferente. Galois fue rechazado en las dos ocasiones que intentó entrar a la École Polytechnique y aunque logró entrar a la École Normale (que se llamaba entonces École Préparatoire), con un nivel mucho más bajo, también rápidamente fue expulsado de ésta (por criticar al director por no apoyar éste la revolución de 1830).



Galois.

Su vida fue cortada abrupta y prematuramente en un duelo.

Con ideas hasta cierto punto anticipadas por Lagrange y por el italiano Ruffini, Galois creó la teoría de grupos, fundamento del álgebra moderna y de la geometría moderna. Ya desarrollaremos estos detalles.

Él consideró las propiedades fundamentales del grupo de transformaciones que pertenecía a las raíces de una ecuación algebraica y estudió el papel de algunos subgrupos invariantes.

Sus publicaciones tuvieron una vida también difícil: aunque en la École había publicado 4 artículos, en 1829 sometió dos a la Academia de Ciencias pero éstos fueron perdidos por Cauchy; otro el año siguiente enviado a Fourier corrió suerte similar porque este último matemático se murió. Presentado nuevamente como "Sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux", fue leído por Poisson, quien pidió que hiciera aclaraciones y lo completara. Poisson no entendió el artículo de Galois.

Un documento con sus investigaciones, enviado a un amigo (August Chevalier) la víspera de su muerte y dirigido a Gauss y Jacobi (quienes nunca lo recibieron), fue el único que se preservó, pero no sería conocido sino hasta muchos años después, hasta 1846, año en que los trabajos de Galois se publicaron en el Journal de Mathématiques por el concurso del matemático Liouville.

Su importancia no sería reconocida, no obstante, hasta que Jordan, Klein y Lie incorporaron su aproximación en sus propios trabajos. De hecho el trabajo de Camille Jordan Traité des substitutions et des équations algébriques fue la primera presentación completa de la teoría y métodos de Galois. Se considera el principio unificador que desarrolló como uno de los resultados más importantes de las matemáticas decimonónicas. Bell subraya:

"Desde 1870 a la segunda década del siglo XX, los grupos dominaron un amplio sector del pensamiento matemático y a veces se los calificó diciendo que eran la llave maestra desde hace tanto tiempo buscada para todas las matemáticas." [Bell, E.T.: Historia de las matemáticas, p. 250]

Es interesante mencionar el reconocimiento que recibieron algunos de estos matemáticos en la época:

"Gauss y Cauchy murieron en un intervalo de dos años, el primero en 1855 y el segundo en 1857. Ambos habían recibido diversos y abundantes honores, tal como había sido el caso anteriormente con Lagrange, Carnot y Laplace. Lagrange y Carnot fueron nombrados condes, y a Laplace se le concedió el título de marqués. Cauchy fue nombrado "barón" por Carlos X, como recompensa a su fidelidad. Gauss, en cambio, nunca alcanzó el rango de la nobleza en el sentido legal del término, pero la posteridad lo ha aclamado unánimemente con el título aun más glorioso de Princeps Mathematicorum o 'Príncipe de los Matemáticos'" [Boyer, C: Historia de la matemática, p. 654]

17.4 La segunda mitad del siglo XIX

Hermite, Darboux, Liouville

Francia no se quedó atrás en la segunda mitad del siglo XIX; relevantes matemáticos hicieron importantes contribuciones: Charles Hermite, Gaston Darboux, Joseph Liouville. Este último, editor y organizador durante muchísimos años del Journal de mathématiques pures et appliquées, trabajó en varios campos que van desde la teoría aritmética de las formas cuadráticas de 2 y más variables, la mecánica estadística, hasta la demostración de la existencia de números trascendentes (un detalle: que el número e y e^2 son raíces de una ecuación cuadrática con coeficientes racionales). También hizo contribuciones en la geometría diferencial de superficies.



El baile, Jean-Baptiste Carpeaux, 1 827 - 1 875.

Liouville había demostrado la existencia de números trascendentes. Veamos esto un poco más despacio.

Considere la ecuación

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0.$$

Con $n > 0$ y los coeficientes a_i números enteros, entonces las raíces de esa ecuación se llaman números algebraicos. La pregunta que se planteó entonces fue si todos los números irracionales eran raíces de ecuaciones algebraicas, para algún $n > 2$.



Liouville.

Liouville construyó en 1844 una clase de números no algebraicos: "de Liouville" precisamente. Y esta clase es un subconjunto del conjunto de los números trascendentes.

Hermite demostró en 1873 que e era trascendente (en un artículo de la revista Comptes Rendus), y Ferdinand Lindemann ("Über die zahl", Mathematische Annalen) lo hizo con el número π. (Lambert en 1770 y Legendre en 1794 habían ya demostrado que era irracional). Es interesante la prueba de Lindemann. Mostró que si x es algebraico no se cumple la ecuación $e^{ix} + 1 = 0$. Euler había demostrado que π satisfacía esa ecuación. Luego: π no podía ser algebraico.

Este resultado, además, demostró que no se podía lograr la cuadratura del círculo. ¿Por qué? Con las restricciones euclídeas, ésta obligaba a que π fuera raíz de una ecuación algebraica (y además que se pudiera expresar por raíces cuadradas). Si π no era algebraico, no había cuadratura del círculo.

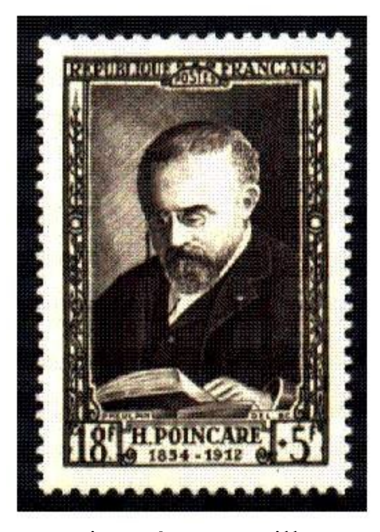
El resultado de Hermite se llama "Teorema de Hermite".

Hermite se considera como el mejor analista en Francia después de la muerte de Cauchy en el año 1857. Trabajó las funciones elípticas, funciones modulares, la teoría de números, la teoría de invariantes, y las funciones Theta. Uno de sus resultados fue una solución de la ecuación general de quinto grado por medio de funciones elípticas.

Hermite tuvo una fructífera relación con el matemático holandés T. J. Stieltjes.

Darboux, con un enfoque geométrico e intuitivo, hizo contribuciones en la geometría diferencial asociada con ecuaciones diferenciales parciales y ordinarias y con la mecánica. Struik valora el papel de Darboux de la siguiente manera: "... con su habilidad administrativa y pedagógica, su fina intuición geométrica, su dominio de la técnica analítica, y su comprensión de Riemann, ocupó en Francia una posición algo análoga a la de Klein en Alemania". [Struik: A concise..., p. 178]

Al final del siglo XIX y principios del XX se pueden citar varios matemáticos franceses importantes: René Baire, Emile Borel, J. S. Hadamard, H. L. Lebesgue y C. E. Picard.



Poincaré, estampilla.

Poincaré

Se considera, sin embargo, como el matemático más importante de la segunda mitad del siglo XIX al profesor de la Sorbone, en París, Henri Poincaré, uno de los matemáticos universales, que trabajó prácticamente en todos los temas importantes de las matemáticas de su tiempo. En la física matemática: teoría del potencial, electricidad, conducción de calor, electromagnetismo, hidrodinámica, mecánica celeste, termodinámica, probabilidades, etc.; en las matemáticas puras: funciones fuchsianas automórficas, ecuaciones diferenciales de topología, fundamentos de la matemática, etc.

Hizo la observación de que los sistemas determinísticos pueden ofrecer un comportamiento caótico, lo que dio por ejemplo, una campanada de lo que se llamaría, más adelante, la teoría del caos.

Una de sus más conocidas contribuciones a las matemáticas fue la teoría de las funciones automorfas. Estas son generalizaciones de las funciones trigonométricas o de las elípticas.

$f(z)$ es automorfa si es analítica en un dominio A, salvo en sus polos, y resulta invariante bajo el grupo infinito numerable de transformaciones lineales de la forma

$$z' = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Entre sus aplicaciones, aparecen en la solución de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes algebraicos.

Los historiadores de las matemáticas afirman que el corazón del trabajo de Poincaré se encuentra en la mecánica celeste, a partir de la cual aportó resultados en las series divergentes, la teoría de expansiones asintóticas, los invariantes integrales, la estabilidad de órbitas, etc. Publicó: Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste (1892 - 1899, en tres volúmenes), y Leçons de mécanique céleste (1905 - 1910, otros 3 volúmenes). Se compara el espíritu intelectual de Poincaré con el de Laplace en la mecánica.



Notre Dame, París.

Para Struik: "Poincaré era como Euler y Gauss; en todo en lo que nos le acercamos encontramos un estímulo a la originalidad. Nuestras teorías modernas sobre relatividad, cosmogonía, probabilidad y topología fueron todas vitalmente influidas por el trabajo de Poincaré". [Struik: A concise..., p. 179]

17.5 Biografías



Pierre-Simon Laplace

Pierre-Simon Laplace nació el 23 de marzo de 1 749 en Beaumont-en-Auge, Normandia, Francia. Laplace inició sus estudios a los siete años en la Escuela Benedictina de Beaumont-en-Auge, donde permaneció hasta los dieciséis años. Luego, ingresó a la Universidad de Caen a estudiar teología.

A los dos años de estar estudiando en la universidad descubrió su talento hacia las matemáticas y su afición por ellas. Dejó la universidad y se dirigió a París. A sus diecinueve años Laplace impresionó a Jean D'Alembert y él no sólo empezó a dirigir sus estudios matemáticos sino que trató de encontrarle un puesto de trabajo, pronto iniciaría a dar lecciones en l'École Militaire.

En 1 770, ya había presentado un primer estudio a la Academia de Ciencias de Paris y sólo cuatro meses después presentaría el segundo acerca de las ecuaciones diferenciales. Después de dos años de intentar ingresar a la Academia de Ciencias de Paris y ser rechazado, en 1 773 fue aceptado. En 1 785, fue ascendido en la Academia de Ciencias.

El 15 de mayo de 1 778, se casó con Marie-Charlotte de Courty con quien tuvo dos hijos. En 1 795, se fundó l'École Normale. Allí impartió cursos, entre ellos uno de probabilidad que fue publicado en 1 814. Durante ese mismo año, Laplace fue el encargado de dirigir el Observatorio de Paris.

Bajo el poder de Napoleón, Laplace fue canciller del Senado y recibió la Legión del Honor en 1 805. En 1 806, se convirtió en Conde del Imperio y fue nombrado marqués en 1 807.

En 1 813, su única hija Sophie-Suzanne murió al dar a luz a su primer hijo. El bebé fue el único descendiente de Laplace.



Joseph-Louis Lagrange

Joseph-Louis Lagrange nació el 25 de enero de 1 736 en Turin, Italia. Lagrange era el mayor de once hermanos y uno de sólo dos que sobrevivieron hasta la vida adulta. Su padre había planeado para él el estudio de abogacía, y Lagrange había aceptado. Entró a la Universidad de Turín y su interés matemático surgió al leer una copia del trabajo de Edmond Halley, de 1 693, acerca del uso del álgebra en óptica.

Su primer trabajo matemático fue publicado en 1 754 en forma de carta dirigida a Giulio Fagnano. Lagrange encontró que los resultados de su estudio estaban ya escritos en una correspondencia entre Johann Bernoulli y Gottfried Leibniz; este hecho provocó en él infinitas ganas de superarse.

En 1 756, Lagrange fue elegido para ser miembro de la Sociedad Científica de Turín que, posteriormente, se convirtió en la Academia Real de Ciencias. Allí se publicaba una revista científica en la que Lagrange participó en tres ocasiones. Contribuyó a los volúmenes publicados en 1 759, 1 762 y 1 766.

En marzo de 1 766 Lagrange se convirtió en el Director de Matemáticas de la Academia de Berlín. Dentro de la Academia, surge su amistad con Heinrich Lambert y Johann Bernoulli. Además, ganó varios premios durante su estancia.

El siguiente año se casó con su prima Vittoria Conti. Su esposa murió en 1 783 después de años de enfermedad.

En 1 787 se hizo miembro de la Academia de Ciencias de Paris donde se mantuvo el resto de su carrera. Se casó por segunda vez en 1 792 con Renée-Françoise-Adélaide Le Monnier, hija de uno de sus colegas de la Academia de Ciencias.

Fue uno de los matemáticos más importantes del siglo XVIII, trabajó sobre el cálculo de variaciones, las ecuaciones diferenciales y la teoría de números. Murió el 10 de abril de 1 813 en Paris, Francia.



Jules Henri Poincaré

Henri Poincaré nació el 29 de abril de 1 854 en Nancy, Lorraine, Francia. Sus padres fueron Léon Poincaré, profesor de Medicina en la Universidad y Eugénie Launois. En 1 862, ingresó al Liceo en Nancy (ahora llamado Liceo Henri Poincaré en su honor), estudió ahí durante once años y fue uno de los estudiantes más sobresalientes de su época.

En 1 873, ingresó al École Polytechnique y se graduó dos años más tarde. Continuó sus estudios en el École des Mines y por un periodo corto, trabajó en la Minería de Vesoul. En 1 879, obtuvo su doctorado en la Universidad de Paris. Ese mismo año comenzó a impartir lecciones de análisis matemático en la Universidad de Caen. En 1 881, obtuvo un puesto en la Facultad de Ciencias en Paris y cinco años después obtuvo un puesto en la sección de Física-matemática y Probabilidad en la Sorbone.

En 1 889, Oscar II, el rey de Suecia y Noruega, con motivo de su sexagésimo cumpleaños, inició una competición matemática que Henri ganó con un proyecto en mecánica celeste.

Fue miembro de la Academia de Ciencias en 1 887 y en 1 906 llegó a ser su presidente. Además, fue el único miembro que estuvo a cargo de cinco secciones en la academia, geometría, mecánicas, física, geografía y navegación.

En 1 908, fue elegido miembro de la Academia Francesa y el año en que fue escogido como director, falleció. También fue elegido caballero de la Legión de Honor, y fue homenajeado por un gran número de sociedades en virtud de sus contribuciones a la ciencia.



Jean Baptiste Joseph Fourier

Joseph Fourier nació el 21 de marzo de 1 768 en Auxerre, Bourgogne, Francia. Su padre era un sastre con tres hijos de su primer matrimonio. Volvió a casarse al morir su esposa y Joseph ocupó el noveno puesto de entre doce hijos. Cuando él tenía nueve años su madre murió y al año siguiente lo hizo su padre. Estudió en la escuela de Pallais donde llevó Latín y Francés.

En 1 780, ingresó a l'Ecole Royale Militaire de Auxerre, donde mostró un gran interés por la literatura aunque a la edad de trece años su interés giró hacia las matemáticas. En 1 787 decidió prepararse para el sacerdocio e ingresó a la orden benedictina de St Benoit-sur-Loire. Nunca adquirió sus votos religiosos, se retiró en 1 789. Un año después de haber salido de la orden, se convirtió en maestro de la Universidad benedictina.

En 1 793 se vio envuelto en política junto al Comité Local Revolucionario. Dos años mas tarde se abrió la École Normale en París, en donde Fourier era el más hábil de los alumnos. En 1 798 se unió al ejército de Napoleón en su invasión a Egipto como su consejero científico. En 1 802 vuelve a Francia y publica material muy importante acerca de las antigüedades egipcias.

El trabajo matemático de Fourier proporcionó el ímpetu a la serie trigonométrica y la teoría de funciones de una variable real.

Murió el 16 el mayo de 1 830 en París, Francia.



Pierre Louis Moreau de Maupertuis

Pierre de Maupertuis nació el 28 de setiembre de 1 698 en Saint Malo, Francia.

En 1 731, se convirtió en miembro de la Academia de Ciencias de París y un año más tarde introdujo en Francia la teoría gravitacional de Newton. Fue uno de los miembros en la expedición a Lapland en 1 736, cuyo objetivo consistía en medir la longitud de un grado a lo largo del meridiano. Pierre aprovechó este viaje para verificar las predicciones de Newton acerca de la forma

de la tierra. Ganó mucha fama a raíz de esta expedición y fue invitado a Alemania por Federico el Grande.

En 1 741, se convirtió en miembro de la Academia de Ciencias de Berlín y cuatro años más tarde se convirtió en el presidente, por un periodo de ocho años. Publicó muchos trabajos de matemáticas, geografía, astronomía y cosmología.

Fue acusado de plagiar el trabajo de Leibniz por Samuel König. Euler lo defendió; salió triunfante en esa ocasión. Además, Voltaire critica de tal manera a Pierre, que este se ve obligado a partir de Berlín en 1 753.

Murió el 27 de julio de 1 759 en Basel, Suiza.



Joseph Liouville

Joseph Liouville nació el 24 de marzo de 1 809 en Saint-Omer, Francia. Los primeros años de vida los vivió con su tío, ya que su padre pertenecía al ejército de Napoleón y se encontraba lejos de casa. Cuando Napoleón fue derrocado, su padre regresó y se establecieron en Toul. Ahí, Joseph asistió a la escuela. Después, ingresó a la Universidad St Louis en París a estudiar matemáticas. En 1 825, ingresó a l'Ecole Polytechnique en donde recibió una gran influencia de Augustin Cauchy. Después de graduarse en 1 827, ingresó l'Ecole des Ponts et Chaussées pero su salud afectada lo obligó a retirarse a su casa en Toul con el fin de recuperarse.

Poco tiempo después se casó y renunció a la idea de volver l'Ecole des Ponts et Chaussées. En 1 831, tuvo su primer puesto académico en el Ecole Polytechnique al ser asistente de Claude Mathieu. También trabajó en otras escuelas privadas y en l'Ecole Centrale. En 1 836, fundó el Periódico de Matemáticas Puras y Aplicaciones, que le daría reconocimiento y en donde se publicó la mayoría de los estudios matemáticos del siglo XIX. En 1 839, se le eligió en la sección de astronomía de la Academia de Ciencias y al año siguiente se le eligió para el Bureau des Longitudes.

En 1 831, se vio envuelto en política, participó por la elección en la Asamblea Constituyente en 1 848 y fue elegido el 23 de abril.

A lo largo de su vida publicó más de cuatrocientos estudios. Hizo importantes trabajos sobre ecuaciones diferenciales e integrales, números trascendentales, geometría y estadísticas mecánicas.

Murió el 8 de septiembre de 1 882 en París, Francia.



Guillaume François Antoine Marquis de L'Hôpital

Guillaume de L'Hôpital nació en 1 661 en Paris, Francia.

Por mucho tiempo fue oficial de caballería pero tuvo que retirarse de su labor debido a que la miopía le impedía trabajar. Entonces surgió su interés por las matemáticas. Aprendió cálculo gracias a Johann Bernoulli.

Fue un matemático brillante, uno de sus logros personales fue resolver un problema que sólo había sido resuelto por Isaac Newton, Wilhelm Leibniz y Jacob Bernoulli, esto lo mantenía en un lugar de privilegio.

L'Hôpital es reconocido por escribir el primer libro de cálculo diferencial.

Murió el 2 de febrero de 1 704 en Paris, Francia.



Johann Heinrich Lambert

Johann Lambert nació el 26 de agosto de 1 728 en Mülhausen, Alsace, Francia.

Estuvo junto a Euler y Lagrange en la Academia de Ciencias de Berlín.

En 1 776, escribió un estudio acerca del postulado paralelo. Notó también que en esa nueva geometría, la suma de los ángulos de un triángulo aumentaba cuando su área disminuía.

Su estudio más importante fue el relacionado con . Hizo el primer desarrollo sistemático de funciones hiperbólicas. Además, es responsable por muchas innovaciones en el estudio del calor y la luz, así como del funcionamiento de la teoría de probabilidad.

Murió el 25 de setiembre de 1 777 en Berlín, Alemania.

Pierre Simon Girard

Pierre Simon Girard nació el 4 de noviembre de 1 765 en Caen, Francia.

Fue ingeniero en l'Ecole des Ponts et Chaussés. En su estancia ahí se hizo amigo y colaborador de De Prony. Fueron varios importantes trabajos los que hicieron juntos. Hacia 1 793 Girard estuvo trabajando en diferentes problemas de geometría al lado de De Prony. Otro trabajo que hicieron juntos fue el Dictionnaire des Ponts et Chaussés.

En 1 798 Girard escribió un trabajo de suma importancia en relación con la fuerza de materiales.

A Girard le fue asignado la construcción de dos canales, el primero en 1 793, fue el Canal Amiens, el cual planificó y construyó; el segundo fue en 1 802, este fue el proyecto del Canal Ourcq, enviado a construir por Napoleón, para este proyecto contó con la asistencia de Augustin Cauchy. Sus escritos fueron principalmente sobre fluidos.

Murió el 30 de noviembre de 1 836 en Paris, Francia.



Marie-Sophie Germain

Sophie Germain nació el 1 de abril de 1 776 en París, Francia. Sus padres fueron Ambroise-François, un comerciante de seda y Marie-Madeline Gruguelin.

Desde muy pequeña sus padres la expusieron ante discusiones políticas y filosóficas. Cuando tenía trece años leyó la historia de la muerte de Arquímedes e influenciada por el cuento decidió volverse matemática. Independientemente aprendió latín y griego. Leía a Newton y Euler mientras sus padres dormían.

A pesar de que nunca se casó ni tuvo una posición profesional, ella siempre recibió ayuda económica de su padre. Sophie obtenía las notas de las conferencias que se impartían en Ecole Polytechnique, utilizaba el seudónimo de M. LeBlanc en ciertos cursos. En uno de ellos, Joseph Lagrange decide buscar al autor de un original trabajo, cuando descubre que es una mujer, siente un gran respeto por ella y le proporciona su ayuda como consejero matemático.

Muchos de sus trabajos se dieron a conocer ya que grandes matemáticos las publicaron por medio de la correspondencia que mantenían con ella; uno de ellos fue Adrien Legendre, pero el de mayor importancia fue Johan Gauss, a quien también le escribía bajo el seudónimo. Cuando Gauss conoció su verdadera identidad la elogió.

Sophie murió de cáncer en el pecho el 27 de junio de 1 831 en Paris, Francia.

Alexis Fontaine des Bertins

Alexis des Bertins nació el 13 de agosto de 1 704 en Claveyson, Drôme, Francia. Sus padres fueron Jacques Fontaine, notario real y Madeleine Seytres. Fue educado en el Collège de Tournon.

En 1 732, se mudó cerca de París en donde había obtenido una residencia y empezó a estudiar matemáticas bajo la supervisión de Castel. Mientas estudiaba, entabló amistad con Clairaut y Maupertuis. Además, inició a enviar sus notas a la Academia de Ciencias. Como resultado, fue elegido miembro de la Academia en 1 733 y promovido matemático en 1 739.

Vivió una vida solitaria, interesándose muy poco en el trabajo de otros matemáticos. Dio soluciones a varios problemas matemáticos y en ocasiones sus respuestas eran mejores que las de matemáticos como Huygens, Newton, Euler y Jacob Bernoulli. En 1 765, se retiró a una propiedad en Burgundy, que casi lo deja en bancarrota. En 1 767 y 1 768, criticó el método de variación de Lagrange presentado en 1 762.

Murió el 21 de agosto de 1 771 en Cuiseaux, Saône-et-Loire, Francia.



Jean Le Rond D'Alembert

Jean D'Alembert nació el 17 de noviembre de 1 717 en París, Francia. Sus padres fueron Louis-Camus Destouches, un oficial en artillería y escritor francés y Madame de Tencin. Nació como hijo ilegítimo mientras su padre se encontraba fuera de la ciudad y su madre decidió dejarlo en manos de la Iglesia de St Jean Le Rond, de ahí la proveniencia de su nombre.

Al regreso de su padre el niño fue puesto al cuidado de Madame Rousseau. Al inicio su educación fue patrocinada por su padre, pero al morir él en 1 726, su familia se hizo cargo de que Jean siguiese estudiando y así fue como ingresó al Jansenist Collège des Quatre Nations, en donde inició sus estudios en matemáticas. En 1 735, se graduó y tres años después ya era un abogado, pero no era esto lo que lo apasionaba así que prosiguió sus estudios matemáticos.

En 1 741, fue admitido en la Academia de Ciencias de París, y luego fue admitido en la Academia Francesa. Su vida estuvo llena de controversias, mantuvo una rivalidad con Clairaut, quien al parecer mantenía sus ideas muy similares a las de Jean en su trabajo de dinámicas. Uno de sus trabajos más importantes fue la creación de la Encyclopédie, junto a Denis Diderot, cuando el primer volumen fue impreso, contenía un prefacio escrito por Jean quien decía que el trabajo era realizado por grandes genios. Rechazó puestos importantes como el de convertirse presidente de la Academia de Berlín y el de ser el tutor del hijo de Catalina II en Rusia. Además de proyectos matemáticos publicó tratados de filosofía y literatura.

Murió el 29 de octubre de 1 783 en París, Francia.



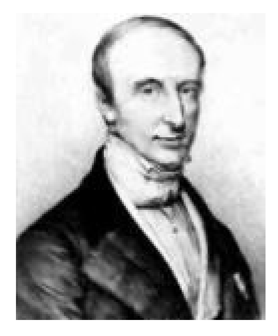
Alexis Claude Clairaut

Alexis Clairaut nació el 7 de mayo de 1 713 en París, Francia. Sus padres fueron Jean-Baptiste Clairaut, profesor de matemáticas en París y miembro de la Academia de Berlín y Catherine Petit. Sus padres tuvieron veinte hijos, pero sólo Alexis logró llegar a la etapa adulta. De joven, fue educado por su padre, aprendió a leer con los Elementos de Euclides y a la edad de nueve años leyó el texto de Guisnée Application de l'algèbre à la géométrie.

A la edad de trece años, presentó su primer trabajo a la Academia de París, siendo el primer matemático en presentar un estudio a tan corta edad. En 1 731, fue elegido miembro de la Academia de Ciencias en París y se convirtió en la persona más joven en ser elegida en la academia. Se unió a un pequeño grupo dirigido por Pierre Louis Maupertuis que seguí la filosofía natural de Newton. Mantuvo una buena amistad con Maupertuis, Voltaire y du Châtelet, con quienes también trabajó.

En 1 734, junto a Maupertuis, fue a Basilea a estudiar con Johann Bernoulli. Conoció a Samuel König y por mucho tiempo intercambiaron correspondencia en la cual se ayudaban científicamente. A pesar de haber mantenido una buena relación, alrededor del año 1 747, Clairaut y d'Alembert comenzaron a atacarse uno al otro acerca de sus trabajos. Uno de sus trabajos en álgebra sirvió por muchos años para la enseñanza en las escuelas francesas. Fue elegido miembro de la Sociedad Real de Londres y de las Academias de Berlín, Bologna, San Petersburgo y Uppsala.

Murió el 17 de mayo de 1 765 en París, Francia a la edad de cincuenta y dos años.



Augstin-Louis Cauchy

Augustin-Louis Cauchy nació el 21 de agosto de 1 789 en París, Francia. Su padre, así como Laplace y Lagrange, que eran amigos de la familia, se encargaron de su educación a temprana edad. Lagrange le recomendó a su padre que debía aprender idiomas antes de iniciar sus estudios en matemáticas, fue así como en 1 802 ingresó al École Centrale du Panthéon a aprender lenguas

clásicas.

En 1 804, comenzó a estudiar matemáticas y en 1 805, ingresó al École Polytechnique. Recibió cursos de Lacroix, de Prony y Hachette, y su tutor fue Ampère. En 1 807, se graduó e ingresó a la Escuela de Ingeniería del École des Ponts et Chaussées. Fue un excelente estudiante y trabajó en su práctica con Pierre Girard en el proyecto Ourcq Canal. En 1 810, trabajó en el puerto de Cherbourg para la flota de invasión inglesa de Napoleón. Su afición hacia la religión Católica le trajo problemas ya que lo consideraron orgulloso y arrogante.

En 1 812, regresó a París enfermo, debido a una severa depresión. Aplicó por varios puestos en diferentes institutos que le fueron rechazados, hasta que en 1 815, fue asignado asistente de profesor de análisis en el École Polytechnique. En 1 816, ganó el Grand Prix de la Academia Francesa de Ciencias por un trabajo acerca de ondas. Un año más tarde, consiguió el puesto que sostuvo Biot en el Collège de France. Su relación con otros científicos no era buena, debido a sus puntos de vista religiosos y a su relación con los jesuitas en contra de la Academia de Ciencias. En 1 830, decidió tomar un descanso y partió a Suiza. En 1 831, el Rey de Piedmont le ofreció un puesto en físicas teóricas en Turín. Después de dos años, viajó a Praga a instruir al nieto de Carlos X y ahí conoció a Bolzano. En 1 838, regresó a París y recuperó su puesto en la Academia aunque se negó a enseñar. En 1 843, aplicó por el puesto en matemáticas en el Collège de France, pero nuevamente le fue negado debido a sus creencias religiosas.

Murió el 23 de mayo de 1 857 en Sceaux, Francia.



Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat Condorcet

Marie Jean Condorcet nació el 17 de setiembre de 1 743 en Ribemont, Francia. Su título de Marqués de Condorcet, lo tomó de la ciudad de Condorcet en Dauphiné. Sus estudios fueron en el Jesuit Colleges en Reims, en el Collège de Navarre en París y por último en el Collège Mazarin también en París. En 1 769, fue elegido miembro de la Academia de Ciencias, y durante este tiempo escribió importantes obras.

En 1 772 conoció a Turgot, un economista francés que fue administrador bajo el mando de Louis XV y dos años después fue el Controlador General de Finanzas del rey Louis XVI. Turgot colocó a Condorcet como Inspector General de la Casa de la Moneda. En 1 776, Turgot fue despedido y Condorcet quiso renunciar debido a esto, pero su renuncia no fue aceptada y continuó ahí hasta 1 791.

En 1 777, fue nombrado a la Secretaría de la Academia de Ciencias. Durante la Revolución Francesa, apoyó la causa liberal y fue elegido como representante de la Asamblea Legislativa en París para luego ser elegido secretario. Elaboró nuevos planes para el sistema educativo los cuales

fueron aplicados un poco después. En 1 782, fue elegido miembro de la Academia Francesa.

En 1 792, fue uno de los líderes de la causa Republicana y veló por la vida del rey. En 1 794, fue encarcelado. Se le encontró muerto en su celda, dos días más tarde, el 29 de marzo en Bourg-la-Reine, Francia.

17.6 Síntesis, análisis, investigación

1. Investigue sobre la Revolución Francesa. Consigne causas, desarrollo y consecuencias de este gran evento histórico en no más de 3 páginas. Utilice bibliografía adicional.
2. Explique el impacto de la Revolución Francesa en las ciencias y matemáticas de Francia.
3. Describa resumidamente la contribución de Gaspard Monge a las matemáticas.
4. Resuma la contribución de Lázare Carnot a las matemáticas. Investigue su participación política. Use bibliografía adicional.
5. Investigue qué son las funciones elípticas. Ofrezca la definición y dé ejemplos.
6. Resuma algunos aspectos de la obra matemática de Legendre.
7. ¿Cómo describía Lagrange el problema de la brachystocrona?
8. Refiérase a Lagrange y las series infinitas.
9. ¿Qué es el cálculo de variaciones? Investigue este tema y ofrezca una descripción más amplia que la que ofrece este libro.
10. Resuma la contribución de Laplace a las matemáticas.
11. Lea con cuidado el siguiente texto de Laplace:

    "Todos los acontecimientos, hasta aquellos que por su insignificancia parecen no seguir las grandes leyes de la naturaleza, son una consecuencia de éstas, tanto como lo son necesariamente las revoluciones del Sol. Desconociendo las relaciones que unen cada acontecimiento con el sistema total del universo se los ha hecho depender de causas finales o del azar, según que sucedieran regularmente o sin orden aparente; pero estas causas imaginarias han retrocedido gradualmente con el ensanchamiento del conocimiento y desaparición por completo ante la sana filosofía que ve solamente en ellas la expresión de nuestra ignorancia de las verdaderas causas."

    Los acontecimientos presentes están unidos con los precedentes mediante un vínculo basado en el principio evidente de que nada puede suceder sin una causa que lo produzca. Este axioma, conocido por el 'principio de razón suficiente', se extiende también a las acciones consideradas como indiferentes; la voluntad más libre no puede provocarlas sin un motivo determinante; si suponemos dos posiciones en las que se den circunstancias exactamente iguales, y averiguamos que la voluntad es activa en una y pasiva en la otra, alegamos que la elección es un efecto sin una causa. Sería entonces, dice Leibnitz, el azar ciego de los epicúreos. La opinión contraria es una ilusión del espíritu, que, perdiendo de vista las razones ambiguas de la selección por la voluntad de cosas distintas, cree que la elección está determinada por sí misma y sin motivos." [De Laplace, Pierre Simon: "Sobre la

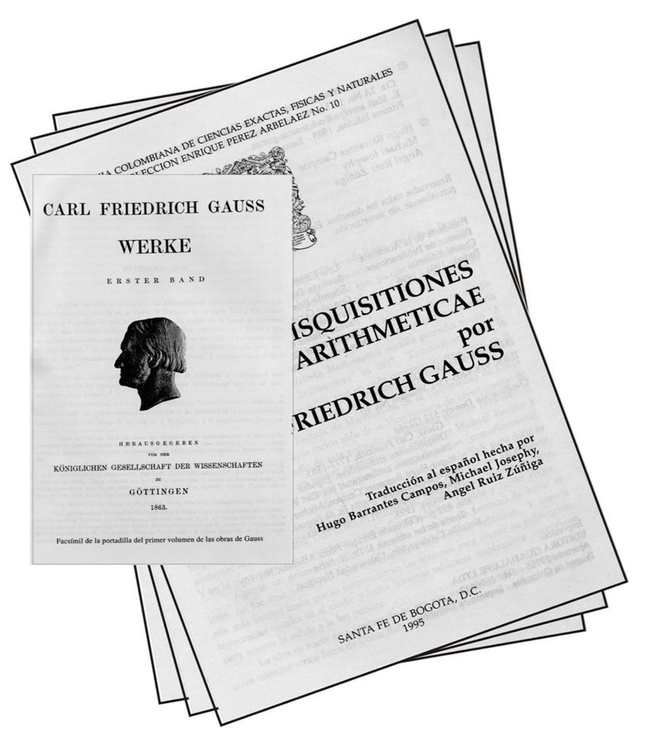
probabilidad", p. 11]

Explique la noción de causalidad en Laplace. Comente la relación entre azar y determinismo en el conocimiento.

12. Mencione algunos aspectos de las contribuciones de Cauchy a las matemáticas.
13. ¿Quién creó la teoría de grupos?
14. ¿Qué son números algebraicos?
15. ¿Quién fue el primero en demostrar que e es trascendente?
16. Describa brevemente la obra de Poincaré.

CAPITULO XVIII

LAS MATEMÁTICAS EN ALEMANIA



El otro lugar clave en las matemáticas del siglo XIX es Alemania.

La Revolución Francesa generó una gran transformación en la educación científica y técnica. En esa dirección, fueron relevantes los colegios técnicos y de ingeniería en los cuales los profesores y estudiantes tenían un salario dado por el Estado. Esto también se desarrolló en Alemania donde después de la derrota que sufrieron ante Napoleón generaron una importante reorganización. Debe recordarse la creación de un nuevo tipo de universidad bajo la influencia de Wilhelm von Humboldt. Se trataba de una entidad financiada y manejada por el Estado, pero donde se ofrecía completa libertad a sus profesores. Esto era decisivo. ¿Que pasó, entonces? Uno de sus resultados más importantes fue que las universidades alemanas se convirtieron en auténticos centros de investigación; en algunos casos también se generaron importantes laboratorios para la experimentación.

Pero hay más. Los cambios de la educación superior no se pueden colocar fuera de otras acciones relevantes, como fue la formación de varias docenas de escuelas técnicas. Estas se orientaron esencialmente a la ingeniería y la minería pero, también, a las técnicas presentes en la producción de textiles.

¿Consecuencias? A finales del siglo XIX las universidades alemanas y sus centros de investigación y laboratorios eran los más importantes del mundo.

Este contexto sociohistórico debe introducirse para comprender el extraordinario desempeño de los matemáticos alemanes durante el siglo XIX.

18.1 Gauss

La figura más relevante es la de Carl Friedrich Gauss. Nacido en la ciudad de Brunswick, fue reconocido muy pronto como un niño prodigio y encontró apoyo para sus estudios. Entre 1795 y 1798 estudió en Göttingen y obtuvo su doctorado en matemáticas en Helmstädt. Su extraordinaria mente obtuvo resultados en los principales campos de las matemáticas del siglo XIX con una originalidad y profundidad que han hecho que se le llame el "príncipe de las matemáticas". Se sabe a partir de su diario personal, una de las joyas de la construcción intelectual y el pensamiento, que en el año 1795 ya había encontrado la ley de reciprocidad cuadrática en la teoría de números (independientemente de Euler).



Gauss, estampilla.

Sus resultados en la teoría de números aparecieron en uno de los más famosos libros de la historia la matemáticas: Disquisitiones Arithmeticae (1801). Aquí se introduce la prueba más rigurosa hasta ese momento del teorema fundamental del álgebra, que establece que toda ecuación algebraica con coeficientes reales tiene al menos una raíz y, de hecho, posee n raíces. Gauss dio varias demostraciones de este teorema a lo largo de su vida. El corazón de esta obra es la teoría de las congruencias cuadráticas, formas y residuos, que culminan con la ley de residuos cuadráticos. También considera la división del círculo, es decir, las raíces de la ecuación $X^n = 1$. Una de las consecuencias de estos trabajos fue la construcción de un polígono de 17 lados mediante regla y compás.



Gauss.

Gauss no abandonó la teoría de números en ningún momento. Entre 1825 y 1831 publicó trabajos sobre residuos bicuadráticos que daban continuación a sus trabajos en las Disquisitiones pero usando la teoría de los números complejos.

Fue Gauss precisamente quien efectuó una representación de los números complejos a través de puntos en el plano, dando pleno sentido a estos números en la conciencia de los matemáticos.

Pero fueron muchos los intereses de Gauss. Por ejemplo, la astronomía. De hecho, fue durante muchos años director del Observatorio Astronómico en Göttingen. Calculó la órbita del planetoide Ceres descubierto en 1801 (por medio de una ecuación de grado 8). Al descubrirse un nuevo planetoide, Pallas, estudió la perturbación secular de los planetas, la atracción de elipsoides generales, la cuadratura mecánica y en los siguientes años generó varias obras relevantes en astronomía, entre ellas Theoria motus corporum coelestium (1 809).

Su trabajo en geodesia le permitió combinar estudios prácticos y teóricos, puros y aplicados. Retomó el estudio del método de cuadrados mínimos, tema que ya había sido considerado por Legendre y Laplace. En 1827, publicó Disquisitiones generales circa superficies curvas: otra obra clásica.

Aunque con el transcurso de los años dedicó cada vez más su concentración a las matemáticas aplicadas, siempre encontró el momento para realizar contribuciones teóricas de primera línea. Por ejemplo, en la década de 1830, interesado en asuntos del trabajo experimental sobre magnetismo terrestre, elaboró una teoría sobre las fuerzas que actúan inversamente proporcionales al cuadrado de las distancias, tema que tocaba la teoría del potencial como una rama separada de las matemáticas.

Un resultado muy conocido en variable compleja es el siguiente. En una curva cerrada simple, con

$f(z) = w = x + yi$ una función compleja con derivada en todo punto de la curva y en el interior de ésta, entonces la integral de línea a lo largo de la curva es nula

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

Éste se suele llamar teorema de la integral de Cauchy, también de Cauchy-Goursat.

Otra de los aportes radicalmente originales de Gauss fueron las geometrías no euclidianas, tema que retomaremos luego.

Gauss había obtenido, también, contribuciones en el tema de las funciones elípticas, que son de la forma:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-k^2x^2)(1-x^2)}}.$$

Este es un tema que también había trabajado durante muchos años Legendre, y antes Euler. Gauss había detectado la doble periodicidad de las funciones elípticas, que también se llaman "lemniscatas". Se sabe que esto lo había obtenido por lo menos desde 1800. Sin embargo, el asunto sería también descubierto tiempo después por Abel, 1827 - 1828, que lo publicó en el Journal de Crelle.

18.2 Jacobi, Dirichlet

Jacobi

El término de "jacobiano", que usamos en los textos de cálculo actuales fue acuñado por el matemático inglés Sylvester, y refiere a Carl Gustav Jacobi, otro de los grandes matemáticos alemanes de la época, quien estudió en Berlín y fue profesor en la Universidad de Königsberg. Jacobi desarrolló una teoría de funciones elípticas basada en las llamadas "Funciones Theta", 4 funciones que se construyen por medio de series infinitas.

Su nombre está en los orígenes de la teoría abeliana de funciones de varias variables. Una de sus primeras obras fue Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum (1829). Su trabajo en los determinantes aparece en el libro: De formatione et propietatibus determinantiumen en 1841. La idea de determinante apareció desde Leibniz, y fue tratada por Gabriel Cramer (el de la "regla de Cramer"), también por el mismo Lagrange, aunque finalmente su nombre lo dio Cauchy.

Dirichlet

Asociado a Gauss y Jacobi, aunque también con matemáticos franceses, se desarrolló el trabajo de Peter Lejeune Dirichlet. Se le suele considerar un puente viviente entre los matemáticos alemanes y franceses de la época. Dirichlet fue profesor de la Universidad de Breslau y luego ocupó la cátedra de Gauss en Göttingen.

Las llamadas "Series de Dirichlet" se encuentran en un trabajo del año 1837 en el que utilizaba la

teoría de funciones analíticas en la teoría de números. De hecho, lo que quería Dirichlet era demostrar que en la sucesión

$$a, a+b, a+2b, a+3b, \ldots, a+nb, \ldots.$$

con a y b primos relativos es posible encontrar un número infinito de números primos. En la demostración usó la serie de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{-z}$$

donde los a_n y z son números complejos.

Sobre la teoría de números, una obra clásica que sirve como introducción y desarrollo de los resultados de Gauss es: Vorlesungen über Zahlentheorie (1863), donde expone las Disquisitiones de Gauss y sus propias contribuciones.

Este matemático ofreció una prueba rigurosa de la convergencia de la serie de Fourier; también estableció el llamado "principio de Dirichlet" en el cálculo de variaciones. Dirichlet fue sucedido en Göttingen por Bernhard Riemann.

18.3 Riemann

Hijo de un pastor luterano, aunque nació enfermizo poseía una inteligencia precoz. Fue estudiante de Gauss en la Universidad de Göttingen y luego logró ser profesor de esa prestigiosa institución alemana. En Göttingen, obtuvo su doctorado en 1 851, fue Privatdozent en 1854 y profesor en 1959. Murió en 1866 a los 40 años. Influido por asuntos de naturaleza hidrodinámica, realizó su tesis sobre las funciones $u + iv = f(x + iy)$. Este trabajo condujo a las superficies de Riemann, concepto que abrió el camino de la intervención de la topología en el análisis (un primer artículo sobre topología apenas había sido publicado en 1847 por J. B. Listing). En 1857, al aplicar sus ideas a la hipergeometría y las funciones abelianas encontró una forma de clasificar estas últimas (con un invariante topológico). En la misma línea, trabajó en la aplicación de este tipo de ideas a superficies mínimas.

Cuando Riemann obtuvo la categoría de Privatdozent presentó dos artículos: uno sobre series trigonométricas y los fundamentos del análisis, el otro sobre los fundamentos de la geometría. El primer artículo estudió las condiciones de Dirichlet para expandir una función como serie de Fourier. En esta dirección, introdujo el concepto de "integral de Riemann". De hecho, mostró que algunas funciones definidas por series de Fourier podían tener un número infinito de máximos o mínimos. Incluso dio ejemplo de una función continua sin derivadas. Con esos resultados el concepto de función se estableció con mayor precisión.

Fue Gauss quien le había dado a Riemann como tema de estudio los fundamentos de la geometría. El trabajo sin embargo no fue publicado sino hasta 1868 y fue intitulado Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen (Acerca de las hipótesis que están en los fundamentos de la geometría). En este artículo se introduce el espacio como una variedad diferencial topológica con n dimensiones. La métrica que definió en esta variedad se hacía por medio de una forma diferencial cuadrática. Esto es muy interesante. Riemann define aquí el carácter del espacio a partir de un comportamiento local, de la misma manera en que había hecho con la función compleja. Esto le permitió clasificar las formas de geometría que existían incluyendo las no euclidianas. Pero, también, le permitió la creación de nuevos tipos de espacio que han encontrado grandes aplicaciones en la física y la geometría. Este asunto lo desarrollaremos en el contexto de la creación de las geometrías no euclidianas.



Weierstrass.

En 1859, Riemann presentó un artículo donde analizó la cantidad de números primos menor que un cierto número x, $F(x)$. Para ello utilizó la teoría de números complejos y la distribución de números primos usando una sugerencia dada por Gauss de que $F(x)$ se aproxima a una integral logarítmica:

$$\int_2^x (\log t)^{-1} dt.$$

Este artículo contiene la famosa "hipótesis de Riemann" sobre la función zeta de Euler $\zeta(s)$: para los complejos $s = +iy$ posee todos los ceros no reales en la recta $x = \frac{1}{2}$.

18.4 Weierstrass

Karl Weierstrass fue profesor de la Universidad de Berlín, aunque había sido maestro en una escuela secundaria durante muchos años. Especialmente durante este período que trabajó en secundaria escribió varios artículos sobre integrales hiperelípticas y sobre ecuaciones diferenciales algebraicas. Contribuyó notablemente a fundamentar la teoría de las funciones complejas sobre series de potencias.

Una de sus contribuciones fue el llamado principio de prolongación analítica. Pudo entonces definir una función analítica como una serie de potencias junto a todas aquellas obtenidas por medio de la prolongación analítica. Esto era útil por ejemplo en la solución de ecuaciones diferenciales en física matemática.

Brindó una gran atención a establecer rigor en la teoría de funciones y en el cálculo de variaciones. Por ejemplo, en lo que se refiere a nociones de mínimo de una función, derivada, continuidad, etc.

Fue Weierstrass precisamente quien descubrió la convergencia uniforme (por lo menos desde 1842): un asunto decisivo para poder diferenciar o integrar series término a término.

Weierstrass descubrió que una función continua sobre un intervalo cerrado sobre el eje real puede expresarse en ese intervalo como una serie de polinomios absoluta y uniformemente convergente. También incluyó funciones de varias variables.

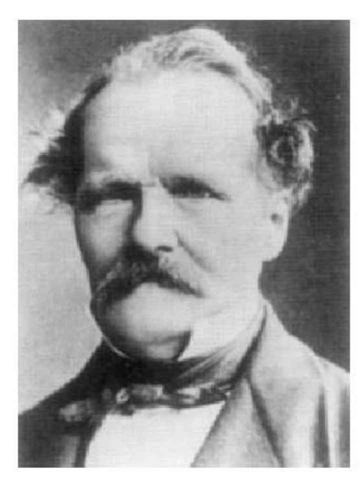
18.5 La escuela de Berlín

Kummer

A la escuela de Berlín pertenecieron Ernst Kummer y Frobenius, y se podrían asociar también Richard Dedekind y Georg Cantor. Kummer desarrolló la geometría diferencial de congruencias, que había sido perfilada por Hamilton. Introdujo los números ideales en la teoría de dominios racionales algebraicos. Los trabajos de Kummer contribuyeron en la aritmética de los números algebraicos.

Creador de la teoría de ideales en 1846, y después de trabajar muchos años en los gymnasiums (escuelas secundarias), Ernst Eduard Kummer siguió a Dirichlet en Berlín cuando este último sucedió a Gauss en Göttingen en el año 1855, enseñando hasta 1883.

Se sabe que sus trabajos en la búsqueda por demostrar el último teorema de Fermat, intentos fallidos, lo condujeron a la teoría de ideales. Esto lo desarrollaremos más adelante.

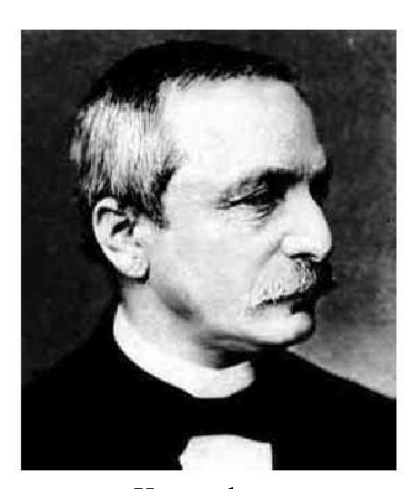


Kummer.

Kronecker

La aritmetización del análisis tuvo un desarrollo especial en la 'Escuela de Berlín' y en particular con el matemático Leopold Kronecker.

Kronecker hizo contribuciones en las funciones elípticas, en la teoría de ideales, y en la aritmética de las formas cuadráticas. En los trabajos que realizó sobre teoría de los números abogó por la aritmetización de las matemáticas, aunque de una manera especial. Kronecker decía que las matemáticas debían estar basadas en los números naturales.



Kronecker.

De hecho, hay una frase famosa que pronunció en una reunión en Berlín en 1886, que dice así:

"Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk".

Esto se inscribía en su búsqueda por el rigor en matemáticas. Rechazó la idea de infinito actual y aceptó la definición de una entidad matemática sólo si ésta podía ser verificada en un número finito de pasos.

El tema del infinito tuvo un tratamiento totalmente distinto al que le dio Kronecker en Dedekind y Cantor. Veamos por qué.

Dedekind

Dedekind fue profesor durante treinta y un años del Technische Hochschule de Brunswick. En su trabajo fue importante la formación que recibiera de Dirichlet, como señala el historiador español de las matemáticas José Ferreirós:

"Con sus sólidos conocimientos de álgebra, teoría de números y análisis, y con su adhesión a las tendencias más rigurosas del momento (Gauss, Cauchy), Dirichlet representaba lo mejor de la matemática de la época, y la tendencia más rigurosa metodológicamente. El cuidado que se tomó en perfeccionar el conocimiento que Dedekind tenía de las distintas ramas de la matemática, la manera en que encauzó su trabajo, y su seguridad en cuestiones metodológicas, fueron sin duda los motivos por los que Dedekind lo consideró siempre su principal maestro y el hombre a quien más debía en su formación." [Ferreirós, José: "Introducción" a Dedekind, Richard: ¿Qué son y para qué sirven los números?, p. 19]



Dedekind, estampilla.

Hizo importantes contribuciones en la teoría de los números irracionales a través de un concepto que se llama precisamente "cortadura de Dedekind". Tanto Cantor como Weierstrass también dieron definiciones de los números irracionales y de maneras no muy alejadas de la aproximación de Dedekind. Dos libros en los que condensa esta teoría: Stetigkeit und Irrationale Zahlen (1872) y Was sind und was sollen die Zahle? (1 882).

Ferreirós nos resume el escenario:

"En 1872 tuvo lugar la publicación de las construcciones de los números reales propuestas por los matemáticos alemanes Weierstrass, Cantor y Dedekind. El artículo de Dedekind resalta por su claridad metodológica y expositiva, que lo ha convertido en un clásico de la literatura matemática. Su teoría es además la más sistemáticamente conjuntista de las tres, cosa que resultará natural teniendo en cuenta los apartados anteriores. Por otro lado, la teoría de Cantor es la que está más cerca de la de Dedekind, y en otros puntos de su artículo avanzaba claramente, de manera independiente, hacia la formulación de nociones conjuntistas; éste fue seguramente el motivo por el que produjo una impresión en nuestro autor. El tomar como base el dominio de los números racionales con su aritmética, la construcción de los reales por medio de ciertos objetos compuestos de infinitos elementos, la comparación de la geometría con la aritmética, la afirmación de que la continuidad del espacio es indemostrable y ha de ser postulada; todos éstos son puntos de estrecho contacto entre ambas exposiciones." [Ferreirós, José: "Introducción" a Dedekind, Richard: ¿Qué son y para qué sirven los números?, p. 36]

18.6 Cantor

Georg Cantor creó un nuevo campo en las matemáticas con la teoría de los "agregados" (Mengenlehre), la que refería a una teoría de cardinales transfinitos. El punto de partida era reconocer la existencia del infinito actual. Cauchy y Weierstrass pensaban que solo se podía llegar a paradojas si se aceptaba la actualidad del infinito.

En 1872 Dedekind dio una definición de conjunto infinito: S es infinito si es semejante a una parte propia de él mismo. El asunto tiene, sin embargo, su historia.

$$\begin{array}{rcll} 1 & \mapsto & 1^2 & = & 1 \\ 2 & \mapsto & 2^2 & = & 4 \\ 3 & \mapsto & 3^2 & = & 9 \\ 4 & \mapsto & 4^2 & = & 16 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 100 & \mapsto & 100^2 & = & 10000 \\ \vdots & & & & \vdots \\ n & \mapsto & n^2 & & \\ \vdots & & & & \vdots \end{array}$$

Por ejemplo, Galileo analizó la posibilidad de establecer una relación biunívoca entre el total de un conjunto y uno de sus subconjuntos. Por ejemplo, si se asocia a cada n un cuadrado perfecto n^2:

$$\begin{array}{rclcl} N & \mapsto & pares & \mapsto & impares \\ 1 & \mapsto & 2 & \mapsto & 3 \\ 2 & \mapsto & 4 & \mapsto & 5 \\ 3 & \mapsto & 6 & \mapsto & 7 \\ 4 & \mapsto & 8 & \mapsto & 9 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 100 & \mapsto & 200 & \mapsto & 201 \\ \vdots & & & & \vdots \\ n & \mapsto & 2n & \mapsto & 2n+1 \\ \vdots & & & & \vdots \end{array}$$

Galileo se dio cuenta de que el número de cuadrados perfectos no era menor que el número de enteros naturales. Sin embargo, pensó que lo que sucedía era que las condiciones de mayor, menor o igual no se aplicaban a los conjuntos infinitos. De hecho, abundan los ejemplos que muestran el carácter infinito de los números naturales. Uno de ellos: existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de pares (y el de impares) y N

Por eso, se puede decir que el conjunto de los pares (y el de los impares) tiene el mismo número de elementos que

N (un número infinito).

Bolzano en un libro que se titula Paradojas del infinito, 1851 (publicado 3 años después de su muerte), había introducido la noción de infinito actual y una óptica conjuntista. Así lo comenta Jean Sebestik, en su introducción al libro de Bolzano:

"La primera novedad de la obra consiste en la introducción de un punto de vista conjuntista en matemáticas. Este nuevo punto de vista responde, en Bolzano, a una doble necesidad. Por un lado, Bolzano intenta unificar a las matemáticas definiendo sus conceptos (en particular los de número y magnitud) a partir de uno solo, el de colección o sistema (Inbegriff). La doctrina de los conjuntos constituye en adelante la base de todas las teorías matemáticas. Por otro lado, los problemas propiamente matemáticos, en particular en la teoría de funciones, imponen un manejo extensional y así requieren de nociones conjuntistas. Finalmente, el punto de visa conjuntista permite abordar la noción de infinito con los medios conceptuales apropiados. Por ello, al inicio de las Paradojas del Infinito, Bolzano da una descripción de sus conceptos conjuntistas; en particular, los de conjunto, el de sucesión o serie, y los de número y de magnitud, que le permitirán dilucidar la naturaleza del infinito. Su concepción del infinito no tiene precedente y revoluciona una tradición milenaria.

Por primera vez, el infinito actual, cuyas propiedades dejan de ser contradictorias para convertirse simplemente en paradójicas, es admitido en matemáticas como concepto definido y con un referente. Por primera vez, igualmente, el infinito es una propiedad susceptible de ser atribuida únicamente a los objetos susceptibles de ser contados o medidos, es decir a los conjuntos y a las magnitudes." [Sebestik, Jean, en presentación del libro de Bernard Bolzano: Paradojas del infinito, pág. 10]

Bolzano sí se dio cuenta de que la característica de poner un conjunto en correspondencia biunívoca con uno de sus subconjuntos propios era la clave para su consideración como conjunto infinito.

Cantor se dio cuenta de que no todos los conjuntos infinitos eran del mismo tamaño. Los conjuntos infinitos también se podían ordenar. De lo que se trataba, entonces, era de establecer una jerarquización de números transfinitos y una aritmética para ellos. La potencia o tamaño de un conjunto era el número cardinal. El primer número cardinal transfinito, asignado a conjuntos numerables, era $\aleph_0$. El cardinal de los números reales era c. Este se llama el cardinal del continuo. Y se ha dado desde entonces una gran discusión sobre si esxisten transfinitos entre estos dos cardinales. Cantor mostró que sí hay cardinales mayores que c, al considerar, por ejemplo, el conjunto formado por todos los subconjuntos de los números reales. Esto es así porque siempre el

conjunto de los subconjuntos de un conjunto dado tiene un cardinal mayor que el conjunto dado.

Cantor también definió los números ordinales transfinitos. Es decir, definió relaciones de orden entre transfinitos.

Se desató una polémica entre Kronecker y Cantor en torno a la aceptación del infinito actual y del fundamento de las matemáticas. Las teorías de Cantor ganaron la aceptación entre los matemáticos (algunos opinan que sobre todo a partir del trabajo en la teoría de la medida desarrollada por Lebesgue), aunque siempre quedaron dificultades lógicas e incluso paradojas que marcaron debates interesantes a finales del siglo XIX y principios del siglo XX.

Se afirma que el debate entre formalistas e intuicionistas que luego se daría no fue sino una prolongación del debate entre Kronecker y Cantor.

18.7 Klein y el Programa de Erlanger

Felix Klein fue asistente de Plücker en Bonn. En el año 1872 se convirtió en profesor de la Universidad de Erlanger. Fue precisamente en su conferencia inaugural en esta institución que describió la relevancia de la teoría de grupos para clasificar las diferentes especialidades y disciplinas matemáticas.

Una vez que Klein descubrió las posibilidades de los grupos, se dedicó mucho tiempo a ello. Entre 1888 y 1893 escribió tres tomos sobre la teoría de grupos de transformaciones; en particular, sistematizó las transformaciones de contacto que había desarrollado el matemático Lie, que permiten una correspondencia biunívoca entre rectas y esferas del espacio euclidiano. De hecho, Sophus Lie fue un gran matemático noruego que hizo grandes contribuciones en el álgebra. En 1870 se encontró con el joven Klein en París y juntos establecieron contactos con los matemáticos franceses, entre ellos Camille Jordan. Precisamente aquí iniciaron su estudio de la teoría de grupos y los trabajos de Galois (especialmente el libro de Jordan: Traité des substitutions). Se afirma que ambos matemáticos se dividieron el énfasis en su aproximación a los grupos: Klein en los discontinuos, Lie se dedicó enteramente al estudio de los grupos de transformaciones continuas y sus invariantes (al igual que Klein, demostrando su relevancia como principio de clasificación en las matemáticas).

La idea fundamental, expresada en lo que quedó para la historia como el "Programa de Erlanger", fue considerar que cada geometría era una teoría de los invariantes de un grupo específico de transformaciones. Las diferentes geometrías se obtenían al ampliar o reducir el grupo. Por ejemplo, la geometría euclidiana se puede describir como el estudio de los invariantes de un grupo métrico. La geometría proyectiva de aquellos del grupo proyectivo. Entonces: la teoría de invariantes algebraicos y diferenciales para cada grupo ofrecía la estructura analítica de una geometría.

Veamos algunos ejemplos. Al usarse la definición proyectiva de una métrica, la de Cayley en particular, la geometría métrica se podía analizar dentro de la geometría proyectiva. Si se añade un invariante cónico a la geometría proyectiva en el plano, se obtienen las geometrías no euclidianas. La topología, otro ejemplo, era en este tipo de clasificación una teoría de los invariantes de las transformaciones continuas de puntos.

Entonces, la teoría de grupos, generada por el joven Galois, hizo posible una síntesis extraordinaria del trabajo geométrico y algebraico de Monge, Poncelet, Gauss, Cayley, Clebsch, Grassmann y Riemann. No obstante, debe decirse que fue la concepción de espacio desarrollada por Riemann la que se encuentra en la base de esta clasificación y síntesis de la geometría en el siglo XIX. Esta nueva visión tuvo influencia en muchos otros matemáticos: entre ellos, Helmholtz, Lie, Hilbert. Ya retomaremos los trabajos de estos científicos.

Una de las contribuciones de Klein fue también en los planos educativo y social: potenció la enseñanza y la investigación de alta calidad en Göttingen, en la tradición de los grandes matemáticos del siglo XIX como Gauss, Dirichlet, Riemann, y logró convertir esta universidad otra vez en la Meca de las matemáticas occidentales.

18.8 Hilbert

También profesor en esa Meca de las matemáticas de la época, Göttingen, otro de los matemáticos universales, que utilizó su intelecto en diversos campos de manera fructífera, es más conocido por su intervención en el Congreso Internacional de Matemáticos de París, en 1 900: David Hilbert.

En esta ocasión resumió la trayectoria y las perspectivas de las matemáticas al entrar el siglo XX, formulando 23 proyectos por desarrollar. Estos tocan los siguientes tópicos:

1. El problema de Cantor del número cardinal del continuo: la hipótesis del continuo.
2. La compatibilidad de los axiomas aritméticos.
3. La igualdad de 2 volúmenes de dos tetraedros de bases iguales y alturas iguales.
4. El problema de la recta como la distancia más corta entre dos puntos: geometrías alternativas.
5. El concepto de Lie de un grupo continuo de transformaciones sin asumir la diferenciabilidad de las funciones que definen el grupo.
6. Tratamiento matemático de los axiomas de la física.
7. Irracionalidad y trascendencia de ciertos números.
8. Problemas de números primos: la distribución de primos y la hipótesis de Riemann.
9. Prueba de la más general ley de reciprocidad en un cuerpo numérico.
10. Determinación de la solubilidad de un ecuación diofantina.
11. Formas cuadráticas sin ningún coeficiente numérico algebraico.
12. Extensión del teorema de Kronecker sobre cuerpos abelianos a dominios de racionalidad algebraicos.
13. Imposibilidad de la solución de la ecuación general de grado 7 por medio de funciones de solo 2 argumentos, generaliza la imposibilidad de resolver la ecuación de grado quinto por radicales.

14. Prueba de la finitud de un sistema completo de funciones.
15. Fundamentación rigurosa del cálculo enumerativo de Schubert.
16. Problema de la topología de curvas algebraicas y superficies.
17. Expresión de formas definidas por cuadrados.
18. Construcción de un espacio desde poliedros congruentes: cristalografía de grupos n-dimensionales, dominios fundamentales, etc.
19. ¿Son las soluciones de problemas regulares en el cálculo de variaciones siempre necesariamente analíticas?
20. El problema general de los valores de frontera (problemas variacionales).
21. Prueba de la existencia de ecuaciones diferenciales lineales que tienen un grupo monodrómico prescrito.
22. Uniformización de las relaciones analíticas por medio de funciones automorfas.
23. Desarrollos adicionales de los métodos del cálculo de variaciones.

El primer problema, que ya lo hemos mencionado antes, posee dos partes. Por un lado, si hay un cardinal transfinito entre $\aleph_0$ y c. Y, por otra parte, si el continuo numérico puede considerarse como un conjunto bien ordenado. Esto último está asociado al llamado "axioma de elección" de Zermelo (Ernst Zermelo, 1871 - 1956).

Hilbert señala en su exposición de 1900:

"La pregunta que ahora emerge es si la totalidad de todos los números podrían no ser acomodados de otra manera tal que cada conjunto parcial pueda tener un primer elemento, i.e., si el continuo no puede ser considerado como un conjunto bien ordenado -una pregunta que Cantor piensa que debe ser respondida en forma positiva-. Me parece lo más deseable obtener una prueba directa de esta afirmación notable de Cantor, tal vez ofreciendo un arreglo de números tal que en cada sistema parcial un primer número pueda ser señalado." [Hilbert, D.: "Mathematical problems", en Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 8, 1901 - 1902, pp 437-479]

El segundo problema refiere a la posibilidad de garantizar la consistencia de la aritmética, lo que el mismo Hilbert intentó realizar por medio de un programa muy ambicioso. Dice Hilbert:

"Por el otro lado, se necesitan un método directo de prueba de la compatibilidad de los axiomas aritméticos. Los axiomas de la aritmética son esencialmente nada más que las conocidas reglas de cálculo, con la adición del axioma de la continuidad. Recientemente los reuní y al hacerlo reemplacé el axioma de continuidad por 2 axiomas más simples, el bien conocido axioma de Arquímedes, y un nuevo axioma que en esencia dice: los números forman un sistema de cosas que no es capaz de mayor extensión, siempre y cuando los otros axiomas sean válidos (axioma de completitud). Estoy convencido que debe ser posible encontrar una prueba directa para la compatibilidad o de los axiomas aritméticos, por medio de un estudio cuidadoso y una modificación adecuada de los métodos conocidos de razonamiento en la teoría de los números irracionales." [Hilbert, D.: "Mathematical problems", en Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 8, 1901 - 1902, pp 437-479]

El problema 7 refiere al estudio de la trascendencia de α^{β}, donde α es algebraico y diferente de 0 y de 1, y β es un irracional algebraico. Este problema fue resuelto en el año 1 934 por el matemático Aleksander Osipovich Gelfond (1906 - 1968): α^{β} es trascendente, en esas condiciones. Lo que no está claro es que expresiones α^{β} con ambos números trascendentes sean también en general trascendentes (hay casos en que sí: e^{π}).

Las matemáticas del siglo XX si bien en algunos casos siguieron sus propuestas de investigación, no obstante fueron mucho más lejos; alcanzaron dimensiones y profundidades difíciles de sospechar a finales del siglo XIX.

Otro de los trabajos de Hilbert con gran influencia fue condensado en el libro Grundlagen der Geometrie (1900), donde realiza un tratamiento axiomático formal de la geometría clásica, con lo que precisa y determina los alcances y nuevas posibilidades de esta geometría, y cuya metodología fue relevante en su búsqueda por fundamentar las matemáticas por medio de lo que se llamó formalismo. De hecho, en lugar de los 5 axiomas y 5 postulados de Euclides, Hilbert utiliza 21 axiomas. Hilbert usa como objetos indefinidos los puntos, las rectas y planos, pero además 6 relaciones indefinidas: ser congruente, ser paralelo, ser continuo, estar sobre, estar en, estar entre.

Si bien no pretendemos incursionar en las matemáticas del siglo XX, debe mencionarse que se trata de un escenario en que se potencia la abstracción matemática y la crítica de sus fundamentos. Bell consigna:

"Las matemáticas del siglo XX se diferencian principalmente de las del siglo XIX en dos aspectos significativos. El primero es la tendencia deliberada hacia la abstracción, según la cual los elementos importantes son las relaciones, y no las cosas que están relacionadas. El segundo es una intensa preocupación por los fundamentos sobre los que descansa el total de la intrincada superestructura de la matemática moderna. Se pueden aventurar de manera problemática que cuando dentro de un siglo se escriba la historia de las matemáticas, si es que éstas llegan hasta entonces, se recordarán los principios del siglo XX, principalmente, como la primera gran edad de un saludable escepticismo en matemáticas, lo mismo que en otras muchas cosas." [Bell, E.T.: Historia de las matemáticas, pp. 277-278.]

Ya volveremos a desarrollar esta temática con mayor detalle.

18.9 Biografías



Johann Carl Friedrich Gauss

Carl Friedrich Gauss nació el 30 de abril de 1 777 en Brunswick, ducado de Brunswick (Alemania). A la edad de siete años inició sus estudios elementales, su maestro Büttner y su asistente Martín Bartels se asombraron de la capacidad de Gauss para sumar números. Estudió lenguas en su juventud pero a los 17 años comenzó a interesarse por las matemáticas.

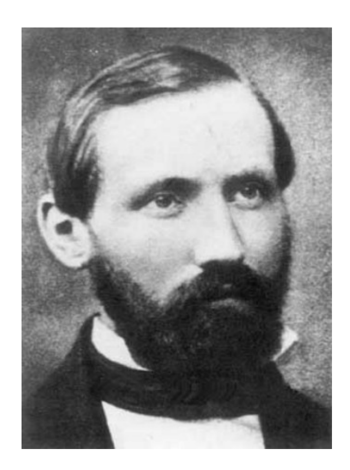
En 1 792 entró al Brunswick Collegium Carolinum. Por su cuenta, descubrió la ley de Bode y el teorema del binomio, así como otros teoremas. En 1 795 ingresa a estudiar a la Universidad de Göttingen la cual dejó en 1 798 sin recibir un diploma. Regresó a Brunswick un año después en donde recibió su diploma. El 9 de octubre de 1 805 se casó con Johanna Ostoff.

En 1807 toma el cargo de director del observatorio de Göttingen. En 1 808 su padre muere y un año después su esposa y su segundo hijo mueren durante el parto.

Al año siguiente se casa de nuevo con Minna, la mejor amiga de Johanna. En 1 816 completó su nuevo observatorio. En 1 831 su esposa muere después de una larga enfermedad y en 1 839 muere su madre.

Gauss se junta con Wilhelm Weber y durante seis años hicieron una larga investigación en magnetismo. De 1 845 a 1 851 se dedicó de lleno a aumentar los fondos de la Universidad de Göttingen, lo cual le dio experiencia para invertir en compañías privadas.

En 1 849 anunció su retiro y recibió muchos honores. Su salud se fue deteriorando poco a poco, murió el 23 de febrero de 1 855 en Göttingen, Hannover (Alemania).



Georg Friedrich Bernhard Riemann

Bernhard Riemann nació el 17 de septiembre de 1 826 en Breselenz, Hanover, Alemania. Bernhard fue el segundo de seis hijos de un pastor luterano. En 1 840, ingresó al Liceo en Hanover y vivió con su abuela. Dos años más tarde, cuando su abuela murió, se trasladó al Gymnasium Johanneum en Lüneburg en donde mostró un gran interés por las matemáticas. Entonces, el director del Gymnasium permitió que estudiara los textos matemáticos de su propia biblioteca.

En 1 846, ingresó a la Universidad de Gotinga. A pesar de que inició una carrera en teología, con el permiso de su padre se trasladó a la facultad de filosofía para poder estudiar matemáticas. Algunos de sus profesores fueron Moritz, Stern y Gauss. En 1 847, se trasladó a la Universidad de Berlín y estudió bajo la tutela de Steiner, Jacobi, Dirichlet y Eisenstein. En 1 849, regresó a Gotinga y dos años más tarde, obtuvo su doctorado en filosofía. Obtuvo un puesto por dos años y medio gracias a la recomendación de Gauss. En 1 857, empezó a trabajar como profesor.

Dos años más tarde, después de que Dirichlet murió, Riemann obtuvo su puesto en Gotinga. Días más tarde fue elegido miembro de la Academia de Ciencias en Berlín. En 1 862, se casó con Elise Koch, una amiga de su hermana y tuvieron una hija. Ese mismo año, se enfermó de tuberculosis y se marchó a Italia. Su salud empeoró considerablemente y finalmente, murió el 20 de julio de 1 866 en Selasca, Italia.



Felix Christian Klein

Felix Klein nació el 25 de abril de 1 849 en Düsseldorf, Prusia (Alemania). En su ciudad natal, asistió al Gymnasium. Luego de graduarse, entró a la Universidad de Bonn y durante un año estudió matemáticas y física; dentro de la universidad trabajó como asistente de laboratorio al lado de Julius Plücker. En 1868, hizo su doctorado, supervisado por Plücker, acerca de la aplicación de la geometría en la mecánica. En ese mismo año, Plücker muere y deja incompleto su trabajo, Klein se ve forzado a terminarlo solo.

En 1869, Klein viajó a Berlín, París y Göttingen.

En 1 870, cuando Francia le declaró la guerra a Prusia, Klein se enlistó en el ejército como asistente de médico. Un año más tarde, regresó a Göttingen. En 1 872 se inició como profesor en Erlanger, Bavaria y fue apoyado por Alfred Clebsch. En 1 875, obtuvo un puesto en el Technische Hochschule de Munich donde impartió cursos avanzados y durante ese mismo año Klein se casó con la nieta del filósofo Friedrich Hegel.

De 1 880 y hasta 1 886 desempeñó un puesto en Leipzig. Posteriormente, aceptó un nuevo puesto en la Universidad de Göttingen, donde fundó un estudio matemático, una biblioteca y un centro de investigación que sirvió de modelo alrededor del mundo.

En 1 895, pide ayuda de David Hilbert con el fin de unirse a su investigación. Finalmente, se retira en 1 913, debido a que se encontraba enfermo. Sin embargo, continua dando lecciones de matemáticas, en su casa, durante los años de la Primera Guerra Mundial.

En 1 908, fue elegido presidente de la Comisión Internacional en Instrucción Matemática en el Congreso Internacional Matemático en Roma. En 1 912, recibió la Medalla Copley, como miembro de la Sociedad Real.
Murió el 22 de junio de 1925 en Göttingen.



Giuseppe Peano

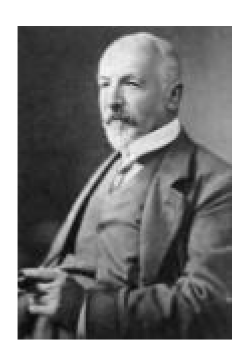
Giuseppe Peano nació el 27 de agosto de 1 858 en Cuneo, Piemonte, Italia. Sus padres trabajaron en la granja “Tetto Galant” y fue ahí donde nació Peano. Posteriormente, asistió a la escuela en Spinetta y luego ingresó a la escuela en Cuneo. Sus padres compraron una casa en Cuneo, pero su padre y dos hermanos de Peano continuaron trabajando en Tetto Galant.

En 1 870, el tío de Peano, que era sacerdote y abogado, descubrió el talento del joven y decidió llevárselo a Turín para que estudiara. Entonces, ingresó al Liceo de Cavour y se graduó en 1 876, año en el que además ingresó a la Universidad de Turín. Durante sus años en la universidad tuvo profesores como: D'Ovidio, le enseñó geometría analítica y álgebra; Angelo Genocchi, que le enseñó cálculo; Giuseppe Bruno, le enseñó geometría descriptiva y Francesco Siacci, con el cual recibió un curso de mecánicas. En 1 880, se graduó con un doctorado en matemáticas y empezó a trabajar como asistente de D'Ovidio. Los siguientes dos años fue asignado como asistente de Genocchi.

En 1 884, inició, oficialmente, a impartir lecciones en la Universidad y continuó impartiendo las lecciones de Genocchi, quien no se encontraba bien de salud. En 1 886, junto al trabajo en la Universidad, inició su carrera de conferencista en la Academia Militar de Turín.

En 1 889, Genocchi murió y Peano fue asignado a su puesto. En 1 891, fundó la Revista de Matemáticas y un periódico, en el que publicó estudios de lógica. Otro proyecto que emprendió fue un Formulario Matemático, el cual fue concluido en 1 908.

Murió el 20 de abril de 1 932 en Turín, Italia.



Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor

Georg Cantor nació el 3 de marzo de 1 845 en San Petersburgo, Rusia. Sus padres fueron Georg Waldemar Cantor, un comerciante danés y corredor de bolsa en San Petersburgo, un hombre culto y amante de las artes y Maria Anna Böhm, rusa y aficionada a la música. Georg heredó el gusto por la música de sus padres y fue un sobresaliente violinista. Después de estudiar en casa con un tutor, ingresó a la escuela primaria en San Petersburgo. En 1 856, a la edad de once años, su familia se mudó a Alemania, debido a que su padre estaba enfermo y necesitaba de un clima cálido.

En Wiesbaden, Georg asistió al Gimnasio. Luego, estudió en Realschule en Darmstadt. En 1 860, se graduó con una increíble habilidad hacia la matemática, especialmente la trigonometría. Después de graduarse, ingresó a Höheren Gewerbeschule y dos años más tarde asistió al Polytechnic de Zurich, durante este tiempo su padre falleció. Georg se mudó a la Universidad de Berlín y se hizo amigo de Herman Schwarz. Recibió clases con Weierstrass, Kummer y Kronecker.

En 1 866, fue a la Universidad de Göttingen y regresó un año más tarde a terminar sus estudios en Berlín. En 1 864 1 865, fue presidente de la Sociedad Matemática. Después de recibir su doctorado, inició a impartir clases en una escuela para niñas en Berlín. Luego, en 1 868, se unió al Seminario de Schellbach, para profesores matemáticos. En 1 869, fue contratado en Halle y cuatro años más tarde, fue promovido como Profesor Extraordinario y entabló una amistad con Dedekind.

En 1 874, se comprometió con Vally Guttmann, amiga de su hermana y se casaron el 9 de agosto de ese mismo año. En 1 886, compró una casa en Händelstrasse y para finales de ese año tuvo a su sexto hijo. Inició a tener periodos de depresión, y estos se agravaron después de la muerte de su madre, de su hermano menor y de su hijo menor en 1 896 y 1 899. En 1 911, fue invitado de honor en el 500 aniversario de la Universidad de San Andrews en Escocia y un año después, se le otorgó el Título Honorario de Doctor en Leyes, el cual no pudo recibir en persona debido a que se encontraba enfermo.

En 1 913, se retiró y pasó sus últimos años en la pobreza debido a la guerra en Alemania. En 1 917, fue internado en un sanatorio y murió de un ataque al corazón el 6 de enero de 1 918 en Halle, Alemania.



Julius Wihelm Richard Dedekind

Richard Dedekind nació el 6 de octubre de 1 831 en Braunschweig, ducado de Braunschweig, Alemania. Su padre fue profesor en el Collegium Carolinum en Brunswick y su madre fue la hija de un profesor que también trabajó en el Collegium Carolinum. Fue el menor de cuatro hijos y nunca se casó.

A los siete años asistió a la escuela de Brunswick. En 1 848, a la edad de dieciséis años, ingresó a la escuela Martino-Catharineum, en donde estudió ciencias, en particular física y química. Fue durante este tiempo que nació su interés en las matemáticas. Luego, en 1 850, ingresó a la Universidad de Göttingen. En esos momentos, la universidad no era el lugar adecuado para estudiar matemáticas. El departamento de matemáticas era dirigido por Stern y Ulrich; y Gauss enseñaba ahí. El departamento de física era dirigido por Listing y Weber. El primer curso que realmente entusiasmó a Dedekind, fue uno de física experimental impartido por Weber, pero fue más bien el profesor quien lo inspiró más que el tema del curso. Otro de los cursos que le influyó en su vida, fue uno impartido por Gauss.

En 1 852, presentó su doctorado bajo la supervisión de Gauss, y se convirtió en el último pupilo de Gauss. Dedekind, junto a Riemann, quien estudiaba también en Göttingen, se dieron cuenta que la educación impartida ahí correspondía solo para quienes quisieran convertirse en profesores de secundaria, así que los dos años siguientes comenzaron a estudiar los últimos avances en matemática. Dedekind comenzó a impartir cursos de probabilidad y geometría en la Universidad de Göttingen.

En 1 855, Gauss murió y Dirichlet lo reemplazó; esto significó un gran paso para Dedekind, ya que se convirtieron en amigos y trabajaron juntos. En 1 858, emprendió la enseñanza en Polytechnikum en Zurich, después de que Dirichlet lo recomendó. Un año más tarde, viajó junto a Riemann a Berlín y ahí conoció a Weierstrass, Kummer, Borchardt y Kronecker. En 1 862, fue asignado al Brunswick Polytechnikum, lo que fue antes el Collegium Carolinum, y ese mismo año fue elegido miembro de la Academia de Göttingen. Otras academias de las que fue parte fueron las de Berlín, Roma, Leopoldino-Carolina Naturae Curiosorum y la de Ciencias en París.

Murió el 12 de febrero de 1 916 en Braunschweig, ducado de Braunschweig, Alemania.



Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet

Dirichlet nació el 13 de febrero de 1 805 en Düren, durante el Imperio Francés, Alemania. Su familia provenía de la ciudad Belga llamada Richelet. Esto explica el origen de su nombre "Le jeune de Richelet" que significa "El joven de Richelet". Su padre fue el administrador de correos en Düren.

A la edad de doce años, ingresó al Gimnasio de Bonn y su pasión por las matemáticas creció, gastando su dinero comprando libros de matemática. Después de dos años, sus padres decidieron cambiarlo al Jesuit Collège en Cologne, en donde tuvo la fortuna de conocer a Ohm.

A la edad de dieciséis años, después de concluir sus estudios en el colegio, decidió partir a París ya que consideró que Alemania no le brindaba la correcta formación; esto cambió a través de los años y las universidades en Alemania se convirtieron en las mejores del mundo, gracias a la ayuda entre muchos de Dirichlet. En París algunos de sus profesores fueron Biot, Fourier, Francoeur, Hachette, Laplace, Lacroix, Legedre y Poisson. En 1 823, fue contratado por el General Maximilien Sébastien Foy. Dos años después el General murió y Dirichlet decidió volver a Alemania. La Universidad de Cologne le otorgó un Doctorado Honorario.

A partir de 1 827, enseñó en Brelau, pero encontró los estándares de la universidad en un bajo nivel; así que un año más tarde, se trasladó a Berlín y comenzó a dar clases en Colegio Militar. Luego, dio clases en la Universidad de Berlín hasta 1 855. En 1 831, ingresó a la Academia de Ciencias en Berlín y poco después se casó con Rebecca Mendelssohn. Mantuvo una buena amistad con Jacobi, y viajó con él a Italia. En 1 845, regresó a Berlín.

Murió el 5 de mayo de 1 859 en Göttingen, Hanover, Alemania.



Alexander Markowich Ostrowski

Alexander Ostrowski nació el 25 de setiembre de 1 893 en Kiev, Ucrania. Sus padres fueron Mark Ostrowski, un comerciante en Kiev y Vera Rashevskaya. Sus estudios primarios los realizó en Kiev y después ingresó a la Escuela de Comercio en donde, durante tres años, participó en seminarios de matemáticas. En 1 911, recibió un título y una medalla de oro al ser reconocido como Candidato del Comercio. Cuando completó sus estudios, ya tenía escritos varios estudios. No pudo ingresar a la universidad de inmediato, debido a que sus estudios no los completó en un colegio sino en la Escuela de Comercio. Entonces, pidió ayuda a Landau y Hensel en Alemania. Ambos matemáticos le consiguieron un puesto en la Universidad de Marburgo en 1 912. Fue allí donde inició sus estudios, supervisado por Hensel.

Al estallar la Primera Guerra Mundial, en 1 914, le fueron restringidos seriamente sus derechos por parte de las autoridades, tanto fuera como dentro de la universidad. En 1 918, cuando la guerra concluyó, fue a Göttingen en donde Klein, Hilbert y Landau fueron grandes influencias para él. En 1 920, obtuvo su doctorado y se trasladó a Hamburgo, donde trabajó como ayudante de Hecke. En 1 923, aceptó un puesto en la Universidad de Göttingen. De 1 925 a 1 926 pasó su tiempo en las Universidades de Oxford, Cambridge y Edimburgo. Posteriormente, aceptó un puesto en la Universidad de Basilea y se mantuvo ahí hasta su retiro en 1 958. Luego, visitó diferentes universidades en los Estados Unidos.

En 1 949, se casó con Margaret Sachs, una psicoanalista que había sido estudiante de Carl Jung.

Murió el 20 de noviembre de 1 986 en Montagnola, Lugano, Suiza.



Emmy Amalie Noether

Emmy Noether nació el 23 de marzo de 1 882 en Erlanger, Bavaria, Alemania. Asistió al Höhere Töchter Schule en Erlanger desde 1 889 hasta 1 897. Allí asistió a clases de alemán, inglés, francés, aritmética y piano. Decidió convertirse en profesora de idiomas y, en 1 900, recibió un título de enseñanza del inglés y francés, aunque nunca ejerciera en esta área.

Decidió estudiar matemáticas en la universidad. Después de obtener los permisos requeridos por su condición de mujer, Emmy estudió en la Universidad de Erlanger de 1 900 a 1 902. Después, en 1 903, aprobó el examen de admisión e ingresó a la Universidad de Göttingen. Asistió a conferencias de Blumenthal, Hilbert, Klein y Minkowski

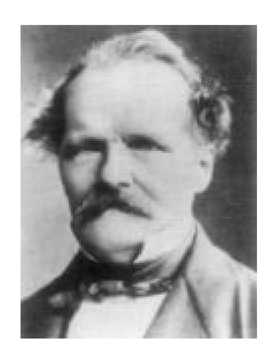
Un año más tarde, se matriculó en la Universidad de Erlangen y, en 1 907, obtuvo un doctorado bajo la tutela de Paul Gordan. Después de haber completado su doctorado, ayudó a su padre en la universidad y realizó sus propias investigaciones.

En 1 908, fue elegida dentro del Círculo Matemático de Palermo. Un año después, fue elegida para ser miembro del Deutsche Mathematiker Vereinigung y ese mismo año fue invitada a dirigir la reunión anual de la Sociedad en Salzburg. En 1 915, Hilbert y Klein convencieron a Emmy de volver a Göttingen, pero fue hasta cuatro años después que obtuvo los permisos necesarios para impartir lecciones dentro de la universidad.

En 1 928, dirigió el Congreso Internacional de Matemáticas en Bolonia y en 1 932, lo dirigió en Zurich. Ese mismo año recibió junto a Artin, el Alfred Ackermann-Teubner, un premio Conmemorativo por el Avance del Conocimiento en las Matemáticas.

En 1 933, fue despedida de la Universidad de Göttingen, debido a su condición de judía. Entonces, se marchó a Estados Unidos, y trabajó en el Colegio Bryn Mawr y, también, en el Instituto de Estudios Avanzados en Princeton.

Murió el 14 de abril de 1 935 en Bryn Mawr, Pennsylvania, Estados Unidos.



Ernst Eduard Kummer

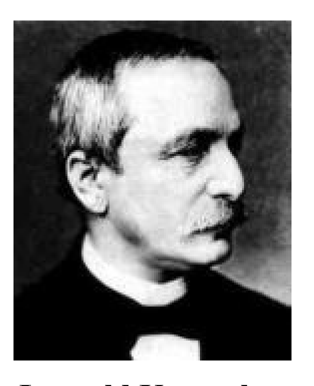
Eduard Kummer nació el 29 de enero de 1 810 en Sorau, Brandenburgo, Prusia (hoy Alemania). Cuando Eduard tenía tres años, su padre el Dr. Carl Gotthelf Kummer murió. Su madre quedó a cargo de él y de su hermano mayor. A los nueve años entró al Gymnasium de Sorau. En 1 828 ingresó a la Universidad de Halle a estudiar teología protestante pero su profesor de matemáticas pronto lo influyó para que estudiara matemáticas como su carrera principal.

En 1 831 se le otorgó un premio por un ensayo matemático, además de que obtuvo un certificado que le permitía enseñar en escuelas. Hizo un año de prueba de enseñanza en el Gymnasium de Sorau. Tiempo después, obtuvo un puesto durante diez años en el Gymnasium en Liegnitz, Polonia.

En 1 840 se casó con una prima de la esposa de Peter Dirichlet, después de un corto tiempo de estar casados su esposa muere en 1 848. En 1 842 comenzó a dar clases en la Universidad de Breslau, Polonia.

En 1 861 Kummer y Karl Weierstrass establecieron en Alemania el primer seminario de matemática pura. De 1 863 a 1 878 se hace cargo de la sección de matemáticas y física de la Academia. Fue rector de la Universidad de Berlín de 1 868 a 1 869.

Murió el 14 de mayo de 1 893 en Berlín.



Leopold Kronecker

Leopold Kronecker nació el 7 de diciembre de 1823 en Liegnitz, Prusia (Polonia). Sus padres, Isidor Kronecker y Johanna Prausnitzer procedían de familias adineradas judías.

Kronecker fue instruido por tutores privados antes de entrar al Gymnasium (Gimnasio) de Liegnitz, al iniciar sus estudios en el Gymnasum se interesa por las matemáticas. Ersnt Kummer, su profesor, reconoció en él una increíble habilidad para éstas. Entonces, ingresa, en 1841, a la Universidad de Berlín donde estudió, además de matemáticas, astronomía, meteorología y química. Pero lo que

realmente le interesaba era estudiar los trabajos filosóficos de Descartes, Leibniz, Kant, Spinoza y Hegel.

Posteriormente, ingresó a la Universidad de Bonn durante el verano de 1843 con el fin de ampliar sus conocimientos en astronomía. Después ingresó a la Universidad de Breslau hasta 1844, debido a que deseaba estudiar con su antiguo profesor Kummer. Al regresar a Berlín, trabajó en su tesis de doctorado.

Tiempo después, Kronecker salió de Berlín para tratar asuntos familiares en los que ayudó a manejar el negocio de su tío y en 1848 se casó con la hija de él, Fanny Prausnitzer. En 1855, regresó a Berlín a iniciar ciertas investigaciones al lado de sus colegas. En 1860 Kummer propuso a Kronecker para elección en la Academia de Berlín y un año después la Academia lo aceptó. En 1861 Kummer y Weierstrass fundaron el Seminario Matemático en Berlín y en 1883 cuando Kummer se retiró, Kronecker asumió el papel de codirector de éste.

Su esposa murió en un accidente en agosto de 1891; el 29 de diciembre del mismo año Kronecker murió en Berlín.

18.10 Síntesis, análisis, investigación

1. Explique la influencia de la Revolución Francesa en la educación alemana.
2. Mencione algunas de las contribuciones de Gauss a las matemáticas.
3. ¿Qué es la hipótesis de Riemann?
4. ¿Quién descubrió el concepto de convergencia uniforme?
5. Averigüe qué significa la frase: "Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk". Explíquela.
6. ¿A quién consideró siempre Dedekind su principal maestro?
7. Comente la relación entre las teorías de los números reales de Dedekind y Cantor.
8. Explique la principal característica de los conjuntos infinitos.
9. Explique la aproximación de Bolzano sobre el infinito.
10. Explique brevemente la aproximación de Cantor a los conjuntos infinitos.
11. Los siguientes párrafos son de una novela que recientemente ganó el Premio Biblioteca Breve 1999, de la editorial Seix Barral. El autor es un escritor mexicano: Jorge Volpi.

    "Nacido en 1823, Kronecker se convirtió en un próspero empresario después de presentar su tesis sobre teoría algebraica de los números en 1845. Como estudiante, había entrado en contacto con algunos de los mejores matemáticos de la época, como Weierstrass, Jacobi y Steiner, y había encauzado su trabajo hacia la aritmetización universal del análisis matemático con la ciega creencia de que la aritmética debía ser finita. 'Dios creó los enteros y lo demás es obra del hombre', afirmó en clara alusión a Cantor.
12.

En 1883, después de muchos años de dedicarse a sus propios negocios, Kronecker aceptó una cátedra en la Universidad de Berlín. Desde allí, urdió una oscura campaña contra Cantor, la cual impidió que a éste se le otorgase un nombramiento similar al suyo; a partir de entonces, Kronecker se dedicó a destruir, paulatinamente, su trabajo sobre el infinito. Despreciado, Cantor tuvo que refugiarse hasta el fin de su vida en la modesta Universidad de Halle, del mismo modo que su amigo Dedekind se había conformado con un puesto en un gimnasio de Brunswick.

Azotado por la ira y el rencor de sus enemigos, Cantor sufrió una serie de ataques nerviosos que lo postraron en cama durante semanas. No obstante, en 1884 pudo concluir un largo tratado que contenía la mayor parte de sus aportaciones a las matemáticas, titulado Fundamentos de una teoría general de las variedades, cuyo principal objetivo era presentar batalla a las intrigas de Kronecker. En este libro, Cantor volvió a exponer su idea de que los conjuntos infinitos podían tener numeraciones definidas tanto como los finitos. Para demostrarlo, no le importaba rozar las cuestiones teológicas que tanto le habían impresionado desde su juventud e incluso llegaba a sostener que, si bien Dios era inaprensible por medio de la razón, era posible acercarse a Él, tal como lo habían hecho los místicos, por medio de su teoría.

Kronecker rechazó cualquier confrontación pública con Cantor aunque en una ocasión accedió a recibirlo en su casa. Era el encuentro de dos genios distintos, de dos siglos, de dos temperamentos. Al final, las posiciones se mantuvieron irreductibles y nada cambió en el miserable destino de Cantor. A pesar de todo, siguió confiando en sus descubrimientos. Entonces escribió: 'Mi teoría se mantiene firme como una roca; cada flecha dirigida en su contra regresará rápidamente a su arquero. ¿Cómo sé esto? Porque la he estudiado desde todos los ángulos durante muchos años; porque he examinado todas las objeciones que se han hecho en contra de los números infinitos; y, sobre todo, porque he seguido sus raíces, por así decirlo, a la primera causa infalible de todas las cosas creadas.'

Más que los argumentos de Kronecker, fue uno de sus propios descubrimientos el que terminó arrinconándolo definitivamente en la locura. Era la 'hipótesis del continuo'. En su aritmética del infinito, Cantor pensaba que debía existir un conjunto infinito con una potencia 'mayor' que la de los números naturales y 'menor' que la de los números reales. Por desgracia, nunca fue capaz de comprobarlo: como si se tratase de una bofetada de Dios, la `hipótesis del continuo' se convirtió en una especie de maldición, una muestra de la estrechez humana, que nunca llegó a solucionarse.

Desilusionado, Cantor abandonó las matemáticas y comenzó a enseñar filosofía en los escasos momentos de paz que disfrutaba. Tembloroso y abatido, caía en frecuentes ataques depresivos que cada vez se prolongaban más. Creía que el ángel de las matemáticas lo había abandonado para siempre a pesar de que, como le escribió a un amigo, Dios fuese el único centro de su trabajo. Desesperado por la falta de pruebas a su hipótesis del continuo, en 1899 solicitó una licencia que le permitiese seguir recibiendo su pago sin la obligación de dar clases, a fin de consagrar todo su tiempo a solucionar este problema. Por fin, en 1905 se dio por vencido. Nunca resolvería este último acertijo, la sublime tortura que había caído sobre su alma." [Volpi, Jorge: En busca de Klingsor, p. 125]

Comente este texto. ¿Cuál era la relación entre Cantor y Kronecker? Integre en su comentario el carácter humano de las construcciones matemáticas, y la relevancia de tener una visión histórica de éstas.

13. ¿Cuál era la idea básica del Programa de Erlanger?

14. Mencione los distintos énfasis que dieron Klein y Lie en su trabajo con la teoría de grupos aplicada a la clasificación de la geometría.

15. Explique el primer problema planteado por Hilbert en el Congreso Internacional de Matemáticos de París en el año 1 900.

16. ¿De qué trata el libro Grundlagen der Geometrie?

17. Investigue qué es el axioma de elección. Explíquelo.

18. Comente la cita de Bell con la que cerramos la exposición de contenidos de este capítulo.

19. El siguiente pasaje está tomado de un famoso cuento del gran escritor argentino Jorge Luis Borges. Lea con cuidado el texto.

"Arribo, ahora, al inefable centro de mi relato; empieza, aquí, mi desesperación de escritor. Todo lenguaje es un alfabeto de símbolos cuyo ejercicio presupone un pasado que los interlocutores comparten; ¿cómo transmitir a los otros el infinito Aleph, que mi temerosa memoria apenas abarca? Los místicos, en análogo trance, prodigan los emblemas: para significar la divinidad, un persa habla de un pájaro que de algún modo es todos los pájaros; Alanus de Insulis, de una esfera cuyo centro está en todas partes y la circunferencia en ninguna; Ezequiel, de un ángel de cuatro caras que a un tiempo se dirige al Oriente y al Occidente, al Norte y al Sur. (No en vano rememoro esas inconcebibles analogías; alguna relación tienen con el Aleph.) Quizá los dioses no me negarían el hallazgo de una imagen equivalente, pero este informe quedaría contaminado de literatura, de falsedad. Por lo demás, el problema central es irresoluble: la enumeración, siquiera parcial, de un conjunto infinito. En ese instante gigantesco, he visto millones de actos deleitables o atroces; ninguno me asombró como el hecho de que todos ocuparan el mismo punto, sin superposición y sin transparencia. Lo que vieron mis ojos fue simultáneo: lo que transcribiré, sucesivo, porque el lenguaje lo es. Algo, sin embargo, recogeré.

En la parte inferior del escalón, hacia la derecha, vi una pequeña esfera tornasolada, de casi intolerable fulgor. Al principio la creí giratoria; luego comprendí que ese movimiento era una ilusión producida por los vertiginosos espectáculos que encerraba. El diámetro del Aleph sería de dos o tres centímetros, pero el espacio cósmico estaba ahí, sin disminución de tamaño. Cada cosa (la luna del espejo, digamos) era infinitas cosas, porque yo claramente la veía desde todos los puntos del universo. Vi el populoso mar, vi el alba y la tarde, vi las muchedumbres de América, vi una plateada telaraña en el centro de una negra pirámide, vi un laberinto roto (era Londres), vi interminables ojos inmediatos escrutándose en mí como en un espejo, vi todos los espejos del planeta y ninguno me reflejó, vi en un traspatio de la calle Soler las mismas baldosas que hace treinta años vi en el zaguán de una casa en Frey Bentos, vi racimos, nieve, tabaco, vetas de metal, vapor de agua, vi convexos desiertos ecuatoriales y cada uno de sus granos de arena, vi en Inverness a una mujer que no olvidaré, vi la violenta cabellera, el altivo cuerpo, vi un cáncer en el pecho, vi un círculo de

tierra seca en una vereda, donde antes hubo un árbol, vi una quinta de Adrogué, un ejemplar de la primera versión inglesa de Plinto, la de Philemon Holland, vi a un tiempo cada letra de cada página (de chico, yo solía maravillarme de que las letras de un volumen cerrado no se mezclaran y perdieran en el decurso de la noche), vi la noche y el día contemporáneo, vi un poniente en Querétaro que parecía reflejar el color de una rosa en Bengala, vi mi dormitorio sin nadie, vi en un gabinete de Alkmaar un globo terráqueo entre dos espejos que lo multiplican sin fin, vi caballos de crin arremolinada, en una playa del Mar Caspio en el alba, vi la delicada osatura de una mano, vi a los sobrevivientes de una batalla, enviando tarjetas postales, vi en un escaparate de Mirzapur una baraja española, vi las sombras oblicuas de unos helechos en el suelo de un invernáculo, vi tigres, émbolos, bisontes, marejadas y ejércitos, vi todas las hormigas que hay en la tierra, vi un astrolabio persa, vi en un cajón del escritorio (y la letra me hizo temblar) cartas obscenas, increíbles, precisas, que Beatriz había dirigido a Carlos Argentino, vi un adorado monumento en la Chacarita, vi la reliquia atroz de lo que deliciosamente había sido Beatriz Viterbo, vi la circulación de mi oscura sangre, vi el engranaje del amor y la modificación de la muerte, vi el Aleph, desde todos los puntos, vi en el Aleph la tierra, y en la tierra otra vez el Aleph y en el Aleph la tierra, vi mi cara y mis vísceras, vi tu cara, y sentí vértigo y lloré, porque mis ojos habían visto ese objeto secreto y conjetural, cuyo nombre usurpan los hombres, pero que ningún hombre ha mirado: el inconcebible universo." [Borges, Jorge Luis: El Aleph, págs. 168-171]

En este cuento hay una visión metafórica del infinito. Explique esta visión. Comente lo que expresa el texto de manera literaria y lo que se consigna en nuestro libro sobre el infinito. Busque otras referencias acerca de este cuento.

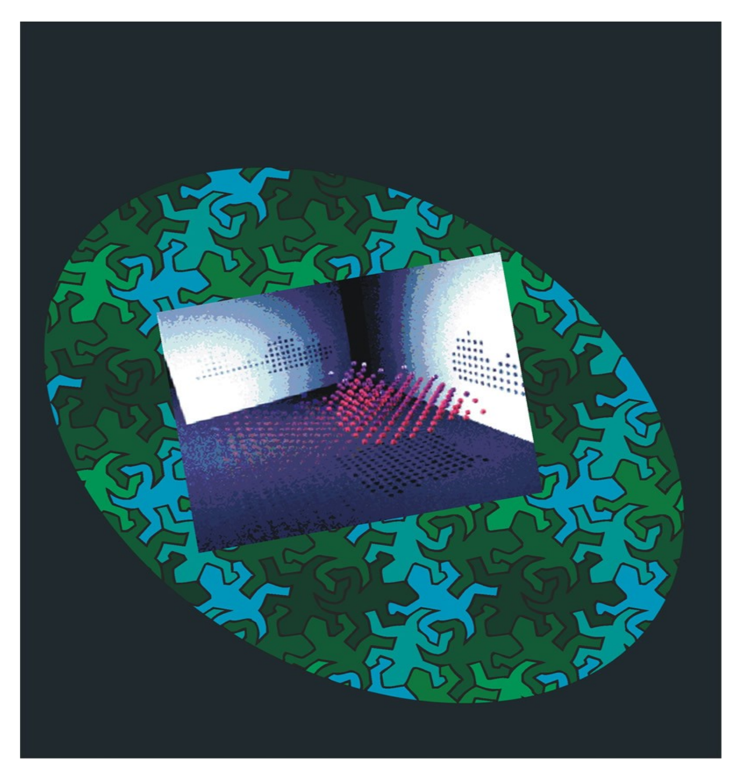
20. Lea con cuidado el siguiente texto de Bernard Bolzano.

"Lo infinito se contrapone a lo finito, como la palabra misma lo indica. El hecho de que derivemos la primera designación a partir de la segunda nos indica que también pensamos el concepto de infinito como algo que se obtiene a partir del concepto de finitud cuando se añade a éste una componente nueva (como lo es, por ejemplo, el concepto de negación). Además, es innegable que, en última instancia, ambas ideas se aplican a conjuntos, más precisamente a multiplicidades (es decir, a conjuntos de unidades) y, por lo tanto, a cantidades. Es natural, entonces que sean las matemáticas, en tanto que teoría o doctrina general de las cantidades, donde se hable con mayor frecuencia del infinito. Es en este ámbito donde han de ser objeto de estudio y cómputo tanto las cantidades finitas como las infinitas, sean éstas infinitamente grandes o infinitamente pequeñas. Ahora bien, independientemente de que estas ideas (finitud e infinitud) puedan aplicarse solamente a objetos que de alguna manera exhiban cantidad y multiplicidad, cabe esperar que una investigación rigurosa del problema de las condiciones en que puede atribuirse a un conjunto uno de los dos predicados 'finito' e 'infinito' arroje, igualmente, luz sobre la naturaleza misma del infinito." [Bolzano, Bernard: Paradojas del infinito, págs. 39-40]

Explique el concepto de infinito que expresa Bolzano en este texto.

CAPITULO XIX

LAS MATEMÁTICAS EN LAS ISLAS BRITÁNICAS



En el Reino Unido las matemáticas también tuvieron importantes desarrollos, especialmente en el álgebra y la lógica. Los aspectos lógicos los desarrollaremos posteriormente en otro capítulo.

19.1 En el siglo XVIII

Maclaurin, Taylor

En cuanto a los matemáticos en el mundo británico del siglo XVIII después de Newton, el más importante fue Colin Maclaurin, quien fue profesor de la Universidad de Edimburgo, Escocia, discípulo directo de Newton.

Al igual que en el continente con Euler o Clairaut, Maclaurin trabajó en la extensión de los métodos diferenciales, las curvas de segundo y órdenes superiores, la atracción de los elipsoides de revolución; también trabajó en geometría proyectiva, métodos cinemáticos para describir curvas planas de diferentes grados, etc. Dos de su obras: Geometria organica (1720) y Tratado sobre fluxiones (2 volúmenes, 1742).

En este último aparece la famosa "serie de Maclaurin" que en realidad había sido introducida por Brook Taylor en 1715. Las "series de Taylor" fueron aplicadas por Euler en 1755. Taylor también estudió el problema de la cuerda vibrante.

Implicaciones de la polémica

Asunto de gran importancia para la historia de las matemáticas en Gran Bretaña fueron las consecuencias de la confrontación entre Newton y Leibniz. La escuela Newtoniana en Inglaterra y la de Leibniz se separaron de una manera muy profunda, que hizo que se generara un estancamiento en las islas británicas en relación con las matemáticas que se desarrollaban en el continente. En particular, como señala Bell:

"La lealtad patriótica hacia Newton ocultó a los matemáticos ingleses la evidente superioridad de la notación de Leibniz sobre los puntos de Newton, y...; el resultado fue que a principios del siglo XVIII Suiza y Francia quedaron a la cabeza de las matemáticas. Los herederos científicos de Newton fueron los matemáticos del continente, no sus paisanos. Finalmente, en 1820, los matemáticos jóvenes de Cambridge se dieron cuenta de que sus reaccionarios mayores no honraban la memoria de Newton con su obstinado nacionalismo, y adoptaron las mejoras llevadas al cálculo por los del continente, e introdujeron la geometría analítica y la notación de Leibniz en los exámenes. Cambridge revivió matemáticamente." [Bell, E.T.: Historia de las matemáticas, p. 157]

Mientras que Alemania y Francia tuvieron un gran dominio en el análisis y la geometría, fue en las islas británicas donde se darían los resultados más importantes en el álgebra, excepto por la teoría de grupos.



Catedral de Canterbury.

19.2 Siglo XIX

Peacock, De Morgan, Babbage, Herschel

No fue sino hasta principios de la segunda década del siglo XIX que un grupo de matemáticos en Cambridge buscó propagar la notación diferencial y promover una reinserción de los matemáticos británicos en los trabajos que se hacían en Europa. Entre ellos se encontraban George Peacock, Charles Babbage y John Herschel, que incluso formaban parte de una llamada Sociedad Analítica. Esta fue fundada en el Trinity College de Cambridge en 1815.

Babbage es conocido por su construcción de máquinas calculadoras. Herschel fue más bien astrónomo.

Peacock no generó resultados de mucho relieve en las matemáticas pero trató de ofrecer al álgebra una estructura lógica similar a la de los Elementos de Euclides en la geometría (Treatise on Algebra, 1830) sugirió que los símbolos algebraicos no necesariamente referían a números. Fue una figura relevante en la organización de las matemáticas y las ciencias británicas: fundador de las Astronomical Society of London, la Philosophical Society of Cambridge y la British Association for the Advancement of Science.

Algunos de sus puntos de vista fueron apoyados por August De Morgan; fue más lejos en la potenciación del carácter abstracto de los símbolos en el álgebra: las interpretaciones de los símbolos de operaciones podían ser arbitrarias; pero sin ir en toda la línea; es decir, las leyes y conceptos del álgebra arbitrarios en todo su carácter. De hecho, De Morgan creyó que los números reales y complejos agotaban los tipos de álgebras posibles, algo que Hamilton se encargaría de cambiar.

Green, Hamilton

En un sentido similar, debe entenderse la contribución de otros matemáticos que buscaron asociarse con el trabajo de los matemáticos continentales: William R. Hamilton y George Green.

Este último desarrolló una primera aproximación para una teoría matemática del electromagnetismo, a partir de una obra que se supone fue influenciada por la Mécanique céleste de Laplace: Essay on the Application of Mathematical Analysis to Theories of Electricity and Magnetism (1 828). Para algunos historiadores de las matemáticas, éste se trata del principio de la física matemática en Inglaterra. Había una cercanía entre los resultados y términos usados por Green y aquellos que usó Gauss. Algunos de estos trabajos empujaron contribuciones en las probabilidades y la teoría de funciones complejas.

De igual manera, fueron relevantes para los trabajos decisivos de James Clerk Maxwell sobre el electromagnetismo, la que tuvo importancia, también, en la teoría de la relatividad.

Jacobi había estudiado las ecuaciones diferenciales parciales de primer orden y sus aplicaciones en la dinámica, y su trabajo encuentra intersección con el del irlandés William Rowan Hamilton, asociado al Trinity College de Dublín. De hecho, en unas conferencias que ofreció Jacobi entre 1842 y 1843, luego publicadas en 1866 (como Vorlesungen über Dynamik), usó una ecuación

diferencial parcial relevante en la dinámica que precisamente se conoce con el nombre de "Hamilton-Jacobi".



Hamilton, estampilla.

Esta era una de las ecuaciones que satisfacía la función característica establecida por Hamilton dentro de su búsqueda por derivar la óptica y la dinámica de un principio general (lo que lo llevó a convertirlas en aspectos del cálculo de variaciones).

La obra representativa de Hamilton es General Method in Dynamics (1834 - 1835).

Cabe decir que Hamilton estableció la derivación de las leyes de la física y la mecánica a partir de la variación de una integral, lo que fue usado posteriormente tanto por la Teoría de la Relatividad como la Mecánica Cuántica.

Uno de los asuntos más conocidos de Hamilton fue el descubrimiento-construcción de los cuaterniones en 1843, un resultado en la última etapa de su vida que dedicó al álgebra después de haber trabajado la dinámica y la mecánica. En su obra Theory of Algebraic Couples (1835), Hamilton construyó una álgebra de los números complejos tomando a los complejos como pares ordenados (más o menos como Gauss, quien había considerado los complejos como puntos de un plano, desde 1831). Como parte de estudios de mayor generalización (tripletes ordenados, etc.) llegó a los cuaterniones y a una teoría de vectores. Incluso fue Hamilton quien le dio ese nombre a ellos. Lo más relevante es que sus cuaterniones abandonan la conmutatividad de la multiplicación, creando un salto cualitativo en el carácter abstracto y libre de las matemáticas.

Sus obras sobre esto son Lectures on Quaternions (1853) y la póstuma Elements of Quaternions (1866, publicada por su hijo). En esta línea de estudio sobre el álgebra, se colocó el trabajo de Grassmann en Alemania. Pero ya volveremos sobre esto.

Cayley, Sylvester, Salmon

Siempre en el mundo británico deben mencionarse los nombres de Arthur Cayley, James Joseph Sylvester y George Salmon por sus contribuciones en el álgebra.

Cayley contribuyó en la geometría analítica y en los determinantes. En particular, fue importante su trabajo en las matrices, las que mediante apropiadas definiciones de operaciones se pueden

considerar como un álgebra.

Fue Cayley quien ofreció una definición proyectiva de la métrica euclidiana (lo que sería retomado por Klein).

Sylvester fue el creador del método dialítico para eliminar una incógnita entre dos ecuaciones polinomiales.

Cayley y Sylvester en colaboración desarrollaron la teoría de los invariantes de las formas algebraicas. Esta sería posteriormente retomada y ampliada por los matemáticos alemanes Aronhold y Clebsch.

Sylvester ofreció una teoría de divisores elementales y la ley de inercia de las formas cuadráticas, entre los años 1 851 y 1 852. Al igual que Leibniz contribuyó en la creación de muchas notaciones y términos de las matemáticas modernas. Por ejemplo, son de su cosecha: invariante, covariante, contravariante. Además, este matemático fue decisivo en el florecimiento de las matemáticas en los Estados Unidos, país en el cual enseñó. Salmon se conoce por la elaboración de libros de texto de gran calidad y claridad en geometría analítica y álgebra.

Los trabajos de Cayley y Sylvester sobre los invariantes algebraicos fueron retomados en Alemania por Hesse, Aronhold, Alfred Clebsch y Paul Gordan. Estos matemáticos usaron las coordenadas homogéneas y los determinantes en su desarrollo algebraico de la geometría analítica y construyeron un importante simbolismo para la teoría invariante ("Clebsch-Aronhold") que perdura hasta nuestros días. Con la participación de otros matemáticos, como Grassmann o Gibbs, se generaron fundamentos de algunas dimensiones relevantes del análisis vectorial.

Clifford

También deben mencionarse en álgebra los trabajos de William Kingdon Clifford. Ya analizaremos la visión del espacio de este último matemático, que fue sumamente relevante. Pero aquí es necesario decir un par de cosas. Clifford, profesor del University College de Londres, fue otro de esos matemáticos que murió muy joven: con 34 años, en 1879. Generalizó los cuaterniones haciendo que sus coeficientes pudieran ser tomados de los números complejos: los bicuaterniones y los octoniones (desarrollados entre 1873 y 1876), que podían ser usados en el estudio del movimiento en geometrías no euclidianas. Estos son casos particulares de las llamadas " álgebras de Clifford". Los bicuaterniones no poseen una multiplicación asociativa.

Su obra Common Sense of the Exact Sciences, muestra elementos en común con Klein.

Boole, Peirce

Suele enmarcarse en esta misma corriente algebraica la obra de George Boole, que buscó hacer de la lógica un cálculo matemático y simbólico, en el mejor ideal de la characteristica universalis de Leibniz. Para Boole, más allá de Peacock y De Morgan, el carácter de las matemáticas está en su forma más que en su contenido. En su Mathematical Analysis of Logic señala con toda claridad que las matemáticas no se pueden considerar la ciencia del número y la magnitud.

Boole, también, apuntalaría corrientes logicistas en la búsqueda por ofrecer una fundamentación de las matemáticas. Ya volveremos a esto.

La obra de Boole fue continuada por De Morgan y Peirce, quienes descubrieron de manera independiente la llamada "ley de dualidad".

Aunque sin ser británico pero influenciado por los trabajos algebraicos en esa nación, el norteamericano Benjamin Peirce, asociado a la Universidad de Harvard, hizo contribuciones en los números hipercomplejos: Linnear Associative Algebra (leído en 1864 ante la American Association for the Advancement of Science, y publicado en 1881 en el American Journal of Mathematics). Estas álgebras lineales asociativas incluyen el álgebra usual, el análisis vectorial, los cuaterniones y otras más. En este trabajo se introduce la noción de elemento nilpotente: es decir, un a tal que $a^n = 0$, para algún entero positivo n.

Tanto Benjamin como su hijo Charles Sanders realizaron trabajos sobre las matrices.

19.3 Biografías



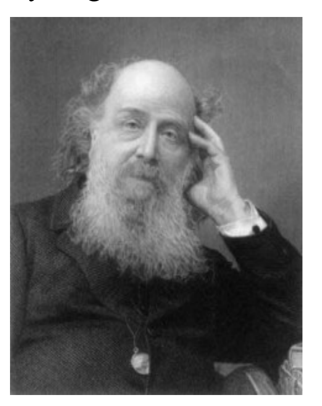
George Peacock

George Peacock nació el 9 de abril de 1 791 en Denton, Inglaterra. Fue educado por su padre en su casa hasta le edad de diecisiete años, después asistió a una escuela en Richmons, Yorkshire y finalmente en 1 809, ingresó a la Universidad Trinity en Cambridge. Dentro de la Universidad entabló amistad con John Herschel y Charles Babbage. En 1 812, se graduó y ganó en segundo lugar el premio Smith. En 1 815, se convirtió en tutor y conferencista en la Universidad Trinity.

Junto a Herschel y Babbage, sus amigos, fundaron la Sociedad Analítica, que pretendía traer a la universidad métodos avanzados de cálculo. En 1 816, la Sociedad Analítica tradujo un libro de Lacroix acerca de cálculo diferencial e integral. En 1 831, fue fundada la Asociación Británica para el Avance de la Ciencia; uno de sus objetivos era obtener informes sobre el estado y el progreso de varias ciencias en diversos campos. Peacock preparó el primero de estos informes, aunque lo restringió al Álgebra, Trigonometría y Aritmética. Este informe fue leído en 1 833, en la Asociación en Cambridge y se imprimió inmediatamente.

En 1 836, fue asignado profesor de astronomía y geometría en Cambridge y tres años después, fue nombrado el deán de la Catedral de Ely. Allí permaneció, desempeñando ese puesto por veinte años.

Murió el 8 de noviembre de 1 858 en Ely, Inglaterra.



James Joseph Sylvester

James Joseph Sylvester nació el 3 de septiembre de 1 814 en Londres, Inglaterra. Sus estudios primarios los realizó en Londres, y los secundarios, en el Instituto Real en Liverpool. En 1 833, ingresó a la Universidad St John en Cambridge. En el tiempo en que Sylvester estudió, para graduarse era necesario firmar un juramento religioso a la Iglesia de Inglaterra: Como Sylvester era judío se negó a tomar el juramento y, entonces, no pudo graduarse. Esto también lo afectó porque lo descalificó como candidato para el premio Smith.

Desde 1 838 enseñó física, durante tres años, en la Universidad de Londres, donde fue colega de su antiguo profesor Augusto De Morgan.

Obtuvo un puesto en la Universidad de Virginia, el cual tuvo que dejar después de unos meses debido a un incidente con un estudiante que lo insultó. Sylvester lo golpeó y al creer que lo había matado huyó a Inglaterra.

Durante este periodo en Inglaterra trabajó al lado de Arthur Cayley, como abogado en el Colegio de Abogados de Lincoln, en Londres.

Se convirtió en profesor de matemáticas de la Academia Real Militar en Woolwich. Además, fue el segundo presidente de la Sociedad Matemática de Londres.

A los cincuenta y cinco años se retiró de la Academia Militar.

En 1 877, aceptó la presidencia de la sección de matemáticas en la Universidad Johns Hopkins y, en 1 878, fundó el American Journal of Mathematics, la primer revista matemática de Estados Unidos. En 1 883, asumió la presidencia del departamento de geometría en Oxford, pero, pocos años después, comenzó a perder la memoria y regresó a Londres.

Murió el 15 de marzo de 1 897 en Londres, Inglaterra.

George Green

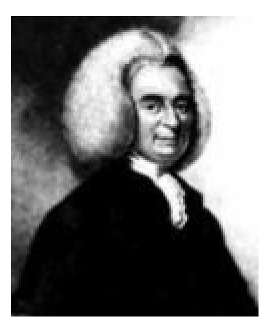
George Green nació en julio de 1 793 en Sneinton, Nottingham, Inglaterra. Su padre era panadero en Nottingham. En 1 801, George fue a la escuela de Robert Goodacre y el año siguiente la abandonó para trabajar en el negocio de su padre. Se desconoce casi en totalidad como Green tuvo las posibilidades de aprender matemáticas, se supone que John Toplis, un matemático graduado de

la Universidad de Cambridge, pudo perfectamente ser el mentor de Green. Tuvo siete hijos junto a Jane Smith, en 1 824 nació su primer hijo.

En 1 823, Green comenzó a visitar la Biblioteca de Nottingham lo que le dio acceso a importantes trabajos matemáticos. Entre 1 823 y 1 828 se dedicó a estudiar matemáticas por su cuenta. Su madre murió en 1 825 y su padre en 1 829. A pesar de estos acontecimientos Green publicó uno de los trabajos más importantes en toda la historia, un ensayo acerca del análisis matemático a las teorías de electricidad y magnetismo. En 1 830, Green hizo caso de la oferta de Sir Edward Bromead de enviar su estudio a la Sociedad Real de Londres, Sociedad Real de Edinburgh o a la Sociedad Filosófica de Cambridge.

Green escribió otros tres estudios que fueron publicados en 1 833, 1 834 y 1 836. Bromhead le propuso estudiar en Cambridge y en octubre de 1 833 a la edad de cuarenta años, Green fue admitido y se graduó en 1 837.

Murió el 31 de mayo de 1 841 en Nottingham.



Colin Maclaurin

Colin Maclaurin nació en febrero de 1698 en Kilmodan, Cowal, Escocia. Su padre John Maclaurin fue ministro de la parroquia de Glendaruel y murió cuando Colin tenía apenas seis semanas de edad. Colin tuvo dos hermanos mayores: John y Daniel. Su madre deseaba la mejor educación para sus hijos, así que se mudaron a Dumbarton, con el fin de que sus hijos la recibieran. En 1 707, su madre murió, Colin y John quedaron a cargo de su tío Daniel.

En 1709, a la edad de once años, comenzó a estudiar en la Universidad de Glasgow. Un año después, al familiarizarse con una copia de los Elementos de Euclides, surgió su interés por la matemática avanzada. Su profesor de matemáticas, Roberto Simon, lo involucró en el estudio de la geometría de la Antigua Grecia.

En 1714, regresó a vivir durante un tiempo con su tío. Tres años después, fue nombrado profesor de matemáticas en el Colegio Mariscal en la Universidad de Aberdeen. En 1 719, fue a Londres donde la Sociedad Real lo hizo miembro.

En esos tiempos al igual que ahora, los hijos de los personajes importantes acostumbraban realizar un viaje alrededor de Europa con el fin de completar su educación; Maclaurin tuvo también la oportunidad de realizarlo cuando Lord Polwarth le ofreció que acompañara a su hijo. El viaje duró dos años, tiempo que aprovechó para estudiar matemáticas francesas y hasta llegó a recibir el Gran Premio otorgado por la Academia de Ciencias por su trabajo sobre el impacto de los cuerpos.

En 1725, recomendado por Newton, obtiene un puesto en la Universidad de Edinburgh. En 1 733,

se casó con Anne Stewart, hija del Procurador General de Escocia. Tuvieron siete hijos pero sólo cinco llegaron a su vida adulta.

Además, desempeñó un papel activo durante la defensa de Edimburgo durante la rebelión jacobita de 1 745. Ayudó en la preparación de las defensas para la ciudad. Al comenzar el ataque, huyó a Inglaterra y dejó en Escocia a su familia. Cuando los jacobitas salieron de Edinburgh en noviembre de 1 745, regresó a la ciudad.

Durante el tiempo que viajó entre Edimburgo e Inglaterra, contrajo una grave enfermedad, la cual finalmente le causó la muerte el 14 de junio de
1 746 en Edinburgh, Escocia.

19.4 Síntesis, análisis, investigación

1. Comente acerca de las implicaciones de la polémica Newton-Leibniz sobre el desarrollo de las matemáticas en las islas británicas y la creación de la Sociedad Analítica.
2. ¿Cuál fue la idea de Peacock sobre la estructura del álgebra?
3. Mencione un resultado de George Green.
4. Mencione algunas de las contribuciones de William Hamilton en las matemáticas.
5. ¿Quiénes crearon la teoría de invariantes de formas algebraicas?
6. ¿Quién creó los bicuaterniones?
7. Lea cuidadosamente el siguiente texto.

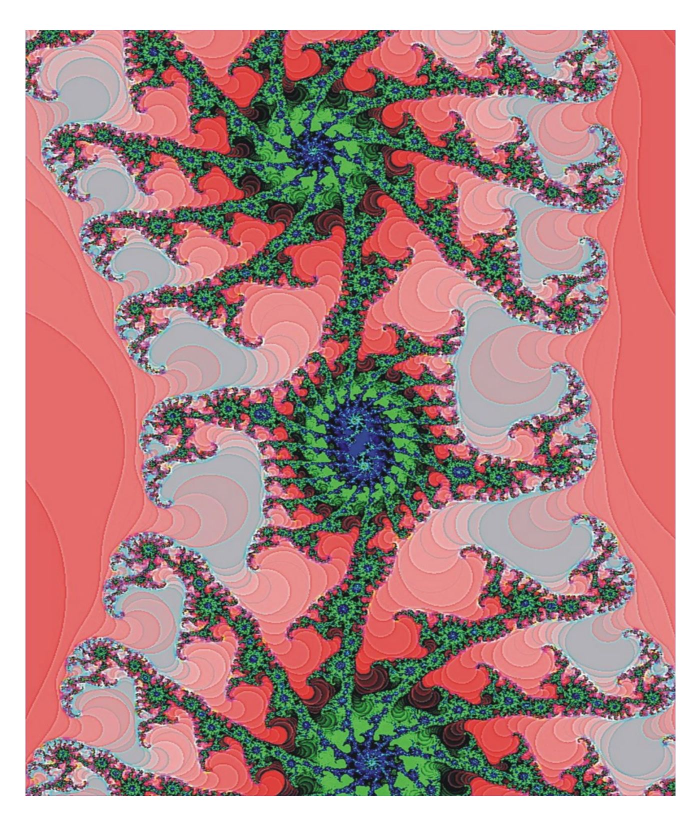
   "La teoría de probabilidades no es más que la ciencia de la lógica tratada cuantitativamente. Hay dos certezas concebibles con respecto a cualquier hipótesis: la certeza de su verdad y la certeza de su falsedad. Los números uno y cero son apropiados, en este cálculo, para marcar dichos puntos extremos del conocimiento, mientras que las fracciones, al representar valores intermedios entre ellos, indican, vagamente hablando, los grados en que la evidencia se inclina hacia el uno o hacia el otro. El problema general de las probabilidades consiste en fijar, a base de un determinado cuadro de hechos dados, la probabilidad numérica de un hecho posible. Esto es lo mismo que buscar el valor de los hechos dados, considerados como evidencia para demostrar el hecho posible. Así el problema de las probabilidades no es más que el problema general de la lógica.

   La probabilidad es una variable continua, por lo que cabe esperar grandes ventajas de este sistema de estudiar la lógica. Algunos autores han llegado a sostener que, mediante el cálculo de probabilidades, toda ilación sólida puede representarse por legítimas operaciones aritméticas a base de los números dados en las premisas. Si esto es realmente cierto, el gran problema de la lógica, el problema de cómo es que la observación de un hecho puede darnos el conocimiento de otro hecho independiente, se reduce a una mera cuestión de aritmética. Parece oportuno examinar tal afirmación antes de intentar cualquier solución más profunda de la paradoja." [Peirce, Charles Sanders: "Las rojas y las negras", p. 20]

   Explique qué son las probabilidades según Peirce. Relacione lógica y probabilidades en Peirce. Comente el anterior texto.

CAPITULO XX

EL ÁLGEBRA DEL SIGLO XIX



Hasta el mismo siglo XIX, el álgebra tenía como su problema central la resolución de ecuaciones algebraicas. Se trataba de encontrar raíces a ecuaciones utilizando las operaciones algebraicas básicas y la extracción de raíces. Los procedimientos obtenidos acumulados empujaron a modificaciones relevantes en este siglo. Y en particular nos interesa el desarrollo de la teoría de grupos, los hipercomplejos, y las matrices y los determinantes.

20.1 Los grupos

Antes de ir a los progresos en la resolución de las ecuaciones algebraicas, debe tomarse en cuenta algunos elementos que empujaron en el álgebra y la teoría de los grupos. Debe aquí mencionarse que la geometría desde antes del siglo XIX sufrió un cambio decisivo pues empezó a perder un sentido métrico que dominó los siglos anteriores, debido al concurso de la geometría proyectiva y la misma no euclidiana.

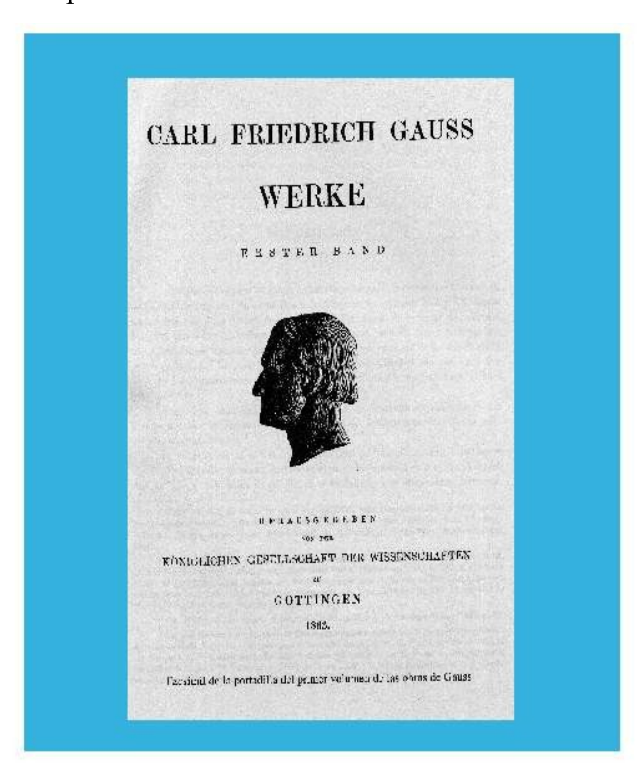
Ya dentro de la gran producción de Euler se encuentran asuntos que no se pueden dejar de caracterizar como relativos a los grupos, por ejemplo la descomposición de un grupo conmutativo en subgrupos o relaciones entre el orden de un subgrupo y el grupo madre. Y, luego, Gauss también

trabajó con grupos conmutativos tanto en el estudio de las formas cuadráticas (transformaciones y sustituciones en las formas) como al estudiar las congruencias (el orden, por ejemplo).

También, debe señalarse: el matemático Möbius ofreció, desde la segunda década del siglo, una clasificación de las geometrías, notando que existían propiedades invariantes bajo un grupo particular que permitían definir una gometría particular. No obstante, no llegó a comprender o construir el concepto de grupo.

Lo de Gauss, como siempre, es importante: en sus Disquisitiones Arithmeticae, además, estudió el problema de encontrar las raíces de

$x^n - 1 = 0$ con n primo impar.



Del primer volumen de las obras de Gauss, en alemán.

Esta ecuación se llama la ecuación ciclotómica. Salvo $x = 1,$ todas las raíces son imaginarias. La ecuación también se llama "ecuación para la división de un círculo". Y eso es debido a que las raíces se pueden escribir como

$$x_k = \cos \frac{k2\pi\theta}{n} + \text{sen} \frac{k2\pi\theta}{n}, \text{con } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Veamos eso con detalle.

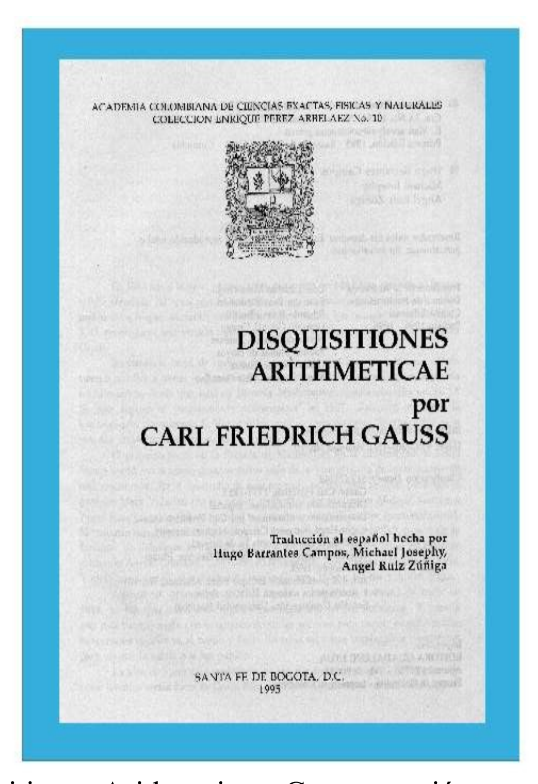
Sea r una raíz. Gauss encontró que todas las raíces tenían la forma:

$r, r^2, r^3, \ldots r^{n-1}$ o $r^e, r^{2e}, r^{3e}, \ldots r^{(n-1)e}$

para cualquier entero positivo o negativo e.

Los métodos que desarrolló en esta empresa apuntaban directamente a los grupos. Este era un primer elemento por tomar en cuenta.

Una famosa consecuencia geométrica de su trabajo fue la demostración de que se puede inscribir un polígono regular de 17 lados en el círculo usando regla y compás. Esto se debía a que las raíces complejas al dibujarse geométricamente son vértices de un polígono regular de n lados sobre el círculo unitario.



Disquisitiones Arithmeticae, Gauss, versión en español.

Lagrange, en 1770, había estudiado funciones con n raíces que preservaban su valor aunque se permutaran algunas de sus raíces. Su trabajo lo llevó a considerar subgrupos de un grupo de substituciones. Por ejemplo, si x_1, x_2, x_3 son raíces de una ecuación cúbica y si se toma como 1, α, α^2 las raíces cúbicas de la unidad, encontró que la expresión $x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3$ posee solamente 2 valores al realizar las 6 permutaciones de las raíces x_1, x_2, x_3

Ruffini en su Teoria generale delle equazioni (1799), con base en los trabajos de Lagrange, había observado que el conjunto de substituciones de raíces que dejaban invariante el valor de una función racional es un subgrupo del grupo simétrico. Lagrange había demostrado también que el

orden de un subgrupo debe dividir al del grupo. Ruffini incluso hablaba de permutación y usaba la propiedad de cierre, y diferenciaba entre grupos cíclicos y no cíclicos (llamados de otra manera). En 1802, muestra que en una ecuación irreducible el grupo de permutaciones asociadas es transitivo.

Cauchy, ya en 1815, también dedicó trabajos a las substituciones. Por ejemplo, demostró que el número de valores diferentes de una función no simétrica con n letras no podía ser menor que el primo más grande p menor que n, excepto por el 2.

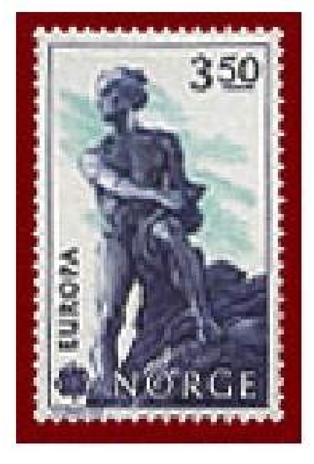
Otro de los elementos por considerar fue el trabajo de Abel. Aunque siendo muy joven Abel pensó que había obtenido la solución por radicales de la ecuación de grado 5, rápidamente se percató de su error, y más bien trató de demostrar su insolubilidad. Al tratar de resolver la división de la lemniscata encontró una clase de ecuaciones algebraicas resolubles por medio de radicales: las ecuaciones abelianas. Estas son ecuaciones cuyas raíces, dada una de ellas, digamos, α_1, son de la forma:

$$\alpha_1, f_1(\alpha_1), f_2(\alpha_1), \ldots, f_{n-1}(\alpha_1),$$

con f_i funciones racionales, y un par de condiciones más.

En este trabajo Abel introdujo las ideas de campo y de polinomio irreducible aunque sin usar esos términos.

Este es un buen lugar para mencionar un poco más del trabajo de Abel. Niels Henrik Abel, nació en Findö, Noruega, en 1802, tuvo una vida trágica, asediado por la pobreza y la enfermedad, casi como la de Galois. Fue este joven quien demostró que no se podía resolver la ecuación de quinto grado por medio de radicales. Trabajó la convergencia de series, funciones elípticas, las llamadas "integrales abelianas" (integrales de funciones algebraicas de una variable) y contribuyó a fundamentar la teoría de series infinitas. Cinco de sus artículos fueron recogidos en el Journal für die reine und angewandte Mathematik (editado por August Leopold Crelle).



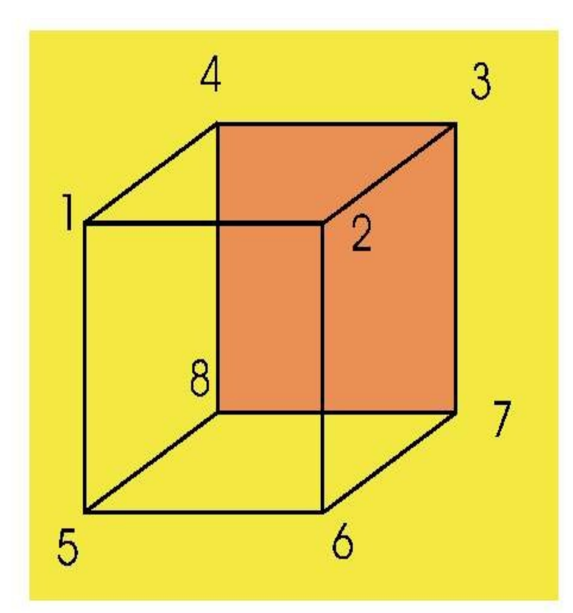
Abel, estampilla.

En el año 1827 publicó la primera parte de sus Recherches sur les fonctions elliptiques donde se reconoce que comienza la teoría de las funciones elípticas doblemente periódicas. Debe recordarse que los grupos conmutativos se denominan también "abelianos".

Este es el contexto en que se desarrolló el trabajo de Evariste Galois. El propósito principal de Galois era determinar las propiedades de las ecuaciones solubles por medio de radicales. El asunto es más o menos como sigue.

El concepto base es el de permutación o substitución, que ya mencionamos: dados, por ejemplo, tres objetos x_1, x_2, x_3, un cambio en su orden es una permutación. En nuestro caso: x_3, x_1, x_2. Se puede aplicar 2 permutaciones seguidas: hay composición de ellas (se llama producto). El conjunto de todas las permutaciones de un conjunto de n elementos se llama el grupo simétrico del conjunto. Está integrado por $n!$ permutaciones. Con 3 elementos $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ permutaciones.

Como usted sabe, las propiedades que debe satisfacer un conjunto de elementos para ser un grupo son las de conmutatividad, asociatividad, tener un elemento neutro y poseer cada elemento un inverso. Las permutaciones o substituciones satisfacían esas condiciones.



Para que se tenga una idea de la relevancia y aplicación del concepto (lo que a veces no se trasmite en los cursos de álgebra usuales), varias de las simetrías de figuras geométricas forman grupos. Por ejemplo, las simetrías de un polígono regular de $n \geqq 3$ lados son un grupo de orden $2n$. Se considera y se numeran los vértices. En el caso del cubo, los 8 vértices. Las simetrías incluyen la rotación:

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8 \\ 2, & 3, & 4, & 1, & 6, & 7, & 8, & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8 \\ 1, & 4, & 8, & 5, & 2, & 3, & 7, & 6 \end{pmatrix}$$

y la reflexión

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8 \\ 5, & 6, & 7, & 8, & 1, & 2, & 3, & 4 \end{pmatrix}$$

Pero volvamos a las ecuaciones algebraicas. Si se considera una ecuación irreducible con n raíces, las propiedades del grupo simétrico ofrecen las condiciones para que pueda ser resoluble por radicales. Una ecuación algebraica irreducible se puede resolver por radicales siempre y cuando su grupo simétrico asociado lo sea, pero la solubilidad de un grupo es algo complejo.

Otro ejemplo de grupo nos lo da Keyser:

"Todos han visto el bonito fenómeno de una ardilla gris haciendo girar rápidamente la jaula cilíndrica de alambre que la encierra. La jaula puede rodar en cada uno de los dos caminos, sentidos o direcciones opuestas. Permitámonos pensar la rotación en uno solo de los caminos y llamemos giro a cualquier rotación, tanto si es grande como pequeña. Cada giro traslada un punto de la jaula a lo largo de un arco de círculo de una cierta longitud, corta o larga. Llamen R al giro especial (de 360°) que traslada cada punto de la jaula hacia atrás hasta su posición inicial. Supongan que S_{10} es el sistema cuya clase C es la clase de todos los giros posibles y cuya $*$ es la adición de giros, tal que $a * b$ debe ser todo el giro obtenido añadiendo al giro a el giro b. Pueden ver inmediatamente que S_{10} tiene la propiedad de grupo, ya que la suma de dos giros cualesquiera es un giro; también es evidente que se satisface la propiedad asociativa [condición (b)]. Noten que R es equivalente a no girar, equivalente a estar en reposo, o, si quieren, equivalente al giro cero. Noten que si a es un giro mayor que R y menor que $2R$, a es equivalente al exceso de a sobre R; que si a es mayor que $2R$ y menor que $3R$, a es equivalente al exceso de a sobre $2R$ y así sucesivamente; de esta manera, cualquier giro mayor que R y distinto de un múltiplo de R es equivalente a un giro menor que R; permitámonos considerar cualquier giro mayor que R como

idéntico a su equivalente menor que R; entonces solamente hemos de considerar R y los giros menores que R, de los cuales hay una infinidad; ustedes pueden ver inmediatamente que, si a es un giro cualquiera, $a * R = R * a = a,$ lo que significa que la condición (c) se satisface con R como elemento neutro. Después noten que, para cualquier giro a, existe un giro a' tal que $a * a' = a' * a = R$. Por esto, como ven, S_{10}, es un grupo. Demuestren que es abeliano. Encontrarán instructivo examinar el sistema derivado del S al permitir que C sea la clase de todos los giros (hacia adelante y hacia atrás)". [Keyser, Cassius J. : "El concepto de grupo" pp. 334, 335]

La noción de grupo fue construida por Galois, tiene grandes aplicaciones, pero, como hemos mencionado antes, su influencia tendría lugar solamente muchos años después de su muerte.



Galois, estampilla.

En 1844, Cauchy publicó un trabajo sobre la teoría de permutaciones, y posteriormente muchos otros. Cauchy dio la definición de grupo como "sistema conjugado de sustituciones". Esta expresión y la de grupo cohabitarían años hasta que, finalmente, se impuso el término de grupo.

Ya desde 1849 Cayley había publicado un artículo que conectaba permutaciones y el trabajo de Cauchy; y luego en 1854 publicó 2 artículos que contienen la definición abstracta de grupo y muestra que las matrices y los cuaterniones son grupos. Se dedicó al asunto mucho más tiempo y en 1878 publicó su libro: The Theory of Groups, donde señala cómo todo grupo finito se puede representar como un grupo de permutaciones.

Betti había publicado artículos sobre la teoría de permutaciones y ecuaciones desde 1851; de hecho, fue el primero en probar que el grupo de Galois asociado a una ecuación era el grupo de permutaciones.



Liouville.

Aunque Liouville publicó los trabajos de Galois, en 1846, y reconoció su relación con los trabajos sobre permutaciones realizados por Cauchy, no puso énfasis en el concepto clave de grupo. Por eso, no es sino hasta Jordan en artículos de 1865, 1869 y 1870 que se subraya este concepto (define isomorfismo en grupos de permutaciones).

El punto histórico decisivo se estableció con Klein que utilizó el concepto de forma central para clasificar geometrías. Otros matemáticos que contribuyeron a la teoría de grupos fueron Hölder, Frobenius, Netto y von Dyck (este último fue el creador de los grupos libres y quien definió grupo por medio de generadores y relaciones).

Vamos ahora a introducir una nota adicional que, en nuestra opinión, retrata la realidad social y personal de la construcción matemática y del conocimiento en general. Se especula si Cauchy fue influenciado por Galois, pues uno de los articulos presentados por Galois en 1829 fue precisamente a Cauchy, para que lo entregara a la Académie, quien al parecer convenció a Galois de rehacerlo para presentarlo nuevamente en 1830, y poder concursar por un premio: Grand Prix. ¿Tomó Cauchy resultados de Galois, sin reconocerle su contribución?

La definición de grupo que usaron tanto Galois como Cauchy se basaba en la propiedad de cierre nada más, porque se trabajaba sobre permutaciones, donde las otras propiedades salen por sí mismas.

Parece que Cauchy era dado a este tipo de comportamientos poco loables.

20.2 "Aritmetización" del álgebra

Retrocedamos un poco. Galois además de crear la noción de grupo, con sus aplicaciones en las ecuaciones algebraicas, propició un proceso que algunos historiadores consideran como una "aritmetización del álgebra", en el sentido de empujar hacia una caracterización de los cuerpos o campos numéricos de una manera algebraica: grupo conmutativo en relación con la suma y la multiplicación (salvo en el elemento nulo), y dotado de la distributividad. Esta definición fue dada por Dedekind en 1879. Son campos los racionales, reales y complejos, y los "dominios de racionalidad" formulados por Kronecker.

Durante la segunda mitad del siglo XIX, se potenciaron los métodos algebraicos y nuevas estructuras y números definidos algebraicamente. Ya desde Gauss, por ejemplo, se había dado una ampliación de los dominios numéricos con sus "enteros de Gauss" (números complejos de la forma $a + bi$, con a y b enteros). Dedekind generalizó esto aun más con los "enteros algebraicos". Veamos esta noción.

Si r es una raíz de la ecuación

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

con los a_i enteros racionales negativos o positivos, siempre y cuando r no sea raíz de ninguna ecuación del mismo tipo y de grado menor a n, se llama a r un número algebraico de grado n. Si a_0 es 1, r se llama entero algebraico de grado n.

Dedekind mostró que los números algebraicos forman un campo numérico, y los enteros algebraicos un anillo. Dedekind trabajó en la factorización única de los nuevos números enteros, que no se cumple y, por lo tanto, no forman un campo. Aquí es donde se ocupaba el concepto de ideal.

La teoría de los ideales constituye una generalización de los números enteros ordinarios. De hecho, la teoría de números algebraicos se demostró, en 1887, ser independiente de la teoría de números reales (Kronecker).

Recordemos qué es un dominio de integridad. Para ello empecemos por la noción de anillo: un conjunto con dos operaciones en el que la suma es un grupo conmutativo, y la multiplicación es asociativa y distributiva en relación con la suma.

Si un anillo tiene su multiplicación conmutativa, posee elemento neutro y no tiene divisores de cero, se llama "dominio de integridad".

Un ideal es un subconjunto I de un anillo A tal que para la suma es grupo y además cumple una propiedad especial: si $i \in I$ y $a \in A$ entonces se tiene que ia y ai pertenecen a I.

Un ejemplo: los pares son un ideal en el anillo de los enteros.

Por medio de los ideales se podía obtener una factorización única, que era el asunto clave. Fue Kummer quien dio el concepto de ideal.

20.3 Los hipercomplejos

En esta discusión sobre el álgebra del siglo XIX, podemos afirmar un marco general en el que se coloca el trabajo de Hamilton sobre los cuaterniones, los n-tuples, la potenciación del carácter abstracto del álgebra, así como, también, la creación de los vectores (un importante instrumento en la física y la ingeniería) y los espacios lineales. Todo ello podemos decir que se engloba en la construcción de números hipercomplejos.

En la primera parte del siglo XIX, los matemáticos usaban los símbolos del álgebra como números ya fueran reales o complejos, aunque sin definiciones precisas de éstos. En particular, en relación con las operaciones. Lo que podemos afirmar que estaba en juego sobre el tapete era la fundamentación del álgebra. Es aquí donde se encuentra como una primera referencia el trabajo de Peacock, que incluso hizo una distinción entre álgebra aritmética y álgebra simbólica, la primera referida a los enteros positivos, en donde solo se permitían operaciones que condujeran a enteros positivos. La otra álgebra, si bien adoptaba las reglas de la aritmética no imponía restricciones sobre los enteros positivos. Ahora bien, cuando se obtiene un resultado en el álgebra aritmética cuya expresión es general en su forma aunque particular en su valor, se asume como resultado en el álgebra simbólica. Es lo que se llama el "principio de la permanencia de la forma". Peacock en unos trabajos trató de derivar el principio a partir de axiomas, un énfasis en la deducción, potenciando de esta forma un pensamiento abstracto en el álgebra.

De Morgan siguió en esta línea, por ejemplo en Trigonometry and Double Algebra (1849), donde el álgebra "doble" significaba los números complejos y la simple los números negativos; antes menciona una aritmética universal que son los números reales positivos. Tanto Peacock como De Morgan buscaron hacer del álgebra algo independiente de las propiedades de los números complejos y reales, una ciencia de símbolos sin interpretar y leyes de operación. Sin embargo, asumieron que las mismas propiedades debían cumplirse para todos los tipos de números, con lo que a pesar del avance realizado establecían una limitante.

Los números complejos recibieron su representación como un par ordenado en un trabajo de Hamilton en 1837 (con resultados presentados a la Academia irlandesa en 1833), aunque Gauss parece que tenía este concepto desde 1831. También existía desde hacía más rato una representación geométrica de los números complejos como puntos en el plano (Argand, 1814).

Hamilton, también, en una búsqueda de una representación tridimensional de vectores en el espacio (que le tomó 10 años), lo que mencionamos antes, llegó a los números llamados cuaterniones, con cuatro componentes y que no satisfacen la conmutatividad en la multiplicación. Esto era auténticamente revolucionario en el álgebra de la época. Detengámonos en esto un poco.

Los cuaterniones se pueden definir de la siguiente manera.

Considérese R^4 con la suma usual y con una base $\{h, i, j, k\}$ y con la siguiente ley de multiplicación:

a) h es la identidad

b) $i^2 = j^2 = k^2 = -h$

c) $jk = -kj = i, ki = -ik = j, ij = -ji = k$

d) la suma es distributiva en relación con la multiplicación

e) $(\alpha x)y = x(\alpha y) = \alpha(xy)$ para α real y x y y en R^4.

Los cuaterniones servían por ejemplo para estirar o encoger vectores dados. Hamilton obtuvo aplicaciones en geometría, óptica, mecánica. No obstante su principal relevancia se dio en el álgebra. De hecho, la existencia de los cuaterniones hacía ver la posibilidad de nuevas álgebras construidas de una forma más libre y sin respetar las propiedades usuales de los números reales y complejos. Esto era lo más importante para el desarrollo del álgebra y el análisis vectoriales.

Como producto de este tipo de generalizaciones y de creación de hipercomplejos se construyó el concepto de vector. Aunque hay elementos precursores en Stevin, Galileo e incluso, algunos afirman, hasta en la misma Antigüedad, se trata de uno de los resultados importantes del álgebra del siglo XIX.

En ese siglo se puede citar el trabajo de Bolzano, quien en 1804 publicó un libro sobre fundamentos de la geometría: Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargoemetrie, donde analiza puntos, rectas y planos en tanto elementos indefinidos y define operaciones sobre ellos.

Otro elemento por citar son las coordenadas baricéntricas creadas por Möbius (Der barycentrische Calcul, 1827), con transformaciones de rectas y cónicas, en donde aparecían vectores de una manera primigenia; de igual manera en otro trabajo de 1837. Otro matemático, Bellavitis, en 1832, también incorporó cantidades del tipo vectorial en un trabajo geométrico.

Con Grassmann, en Alemania, estos trabajos se extendieron: hipercomplejos con n componentes, "álgebras de Grassmann". Aunque publicó su obra Die lineale Ausdehnunglehre; ein neuer Zweig der Mathematik (Teoría de la Extensión Lineal; una nueva Rama de la Matemática) un año después que Hamilton diera a conocer sus famosos cuaterniones (se publicó en 1844 por primera vez), ya había desarrollado sus ideas desde años antes.

Su noción central es la de cantidad extensiva, un número hipercomplejo con n componentes. Definió productos entre hipercomplejos, entre hipercomplejos y vectores, ofreció significados geométricos a estos asuntos e incluso mostró que existían aplicaciones en mecánica, magnetismo y cristalografía. Su trabajo empujó el desarrollo de los tensores.

Sin embargo, Grassmann no tuvo mucha influencia porque su presentación era algo oscura. Las coordenadas baricéntricas al parecer fueron su principal motivacion para este trabajo. En 1862, aparentemente bajo sugerencia de Clebsch, ofreció una nueva versión de su obra, más leíble. Aquí

aparecen los conceptos de independencia lineal y elementos linealmente dependientes, también el producto escalar (con términos diferentes).

Otros matemáticos trabajaron en esta temática: Cauchy y Saint Venant. El segundo, en efecto, había publicado un trabajo en el que "multiplicaba segmentos de recta", casi como Grassmann. En 1853 Cauchy publicó Sur les clefs algébriques en la revista Comptes Rendus donde aparecen métodos y sistemas similares a los de Grassmann. La originalidad de Cauchy ha estado en cuestión, porque, años antes, Grasssmann había enviado a Cauchy y Saint Venant un ejemplar de su trabajo. Cauchy hizo luego publicaciones con contenidos que señalan un indudable parentesco con la perspectiva de Grassmann, pero nunca dio crédito a Grassmann. Fue Hankel el primero en darle crédito al trabajo de Grassmann, en 1867.

El concepto de vector tuvo un apoyo relevante en las islas británicas a partir del trabajo de Maxwell, quien, aunque usó los cuaterniones como una herramienta, el instrumento más significativo que desarrolló en su trabajo eran los vectores.

En otro orden de cosas, un matemático italiano, Gregorio Ricci Curbastro, desarrolló lo que se llama el cálculo diferencial absoluto. Uno de sus alumnos, Tullio Levi-Civita, fue quien desarrolló este cálculo creando una teoría de los tensores, la que permitía una unificación de los simbolismos invariantes con grandes aplicaciones en la elasticidad, la hidrodinámica y la relatividad.

El inicio del análisis vectorial tridimensional, de manera independiente a los cuaterniones, fue realizado por Josiah Willard Gibbs y Oliver Heaviside en los años 1 880.

Los vectores son simplemente la parte vectorial de un cuaternión considerada independientemente.

Si $q = a + bi + cj + dk$ es un cuaternión, entonces

$$u = bi + cj + dk$$

es un vector.

Aquí es posible establecer los productos escalar y vectorial.

En relación con el primero,

si $u = ai + bj + ck$ y $v = a_1 i + b_1 j + c_1 k$

entonces:

$$u \cdot v = aa_1 + bb_1 + cc_1,$$

que es un escalar.

El segundo producto:

$$u \times v = (bc_1 - b_1 c)i + (ca_1 - ac_1)j + (ab_1 - ba_1)k$$

es otro vector. Este último producto no es conmutativo, ni tampoco se cumple que al dar la multiplicación de dos vectores cero, necesariamente uno de ellos deba ser cero. Tampoco es asociativo, y no hay inverso multiplicativo.

Se puede pasar del álgebra vectorial al análisis vectorial y aquí aparecen conceptos usuales en las matemáticas para ingenieros, como, por ejemplo, el de gradiente de u:

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k,$$

o el de la divergencia de una función vectorial v

$$div v = \nabla . v = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}.$$

Mucho del análisis se puede expresar usando vectores. El teorema de la divergencia (también llamado de Gauss) establece: Si V es un sólido en E^3 limitado por una superficie cerrada orientable S, y $\vec{n}$ la normal unitaria exterior a S, $\vec{F}$ un campo vectorial derivable con continuidad que se define en V, se tiene:

$$\iiint_V (div \vec{F}) dx dy dz = \iint_S \vec{F} . \vec{n} dS$$

Esta expresión se puede poner de otra manera. Sean

$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ y

$\vec{n} = \cos\alpha \vec{i} + \cos\beta \vec{j} + \cos\gamma \vec{k},$

entonces la ecuación se convierte en:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz =$$

$$\iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) dS.$$

Durante la época hubo una controversia sobre qué era más útil y relevante, los cuaterniones o los

vectores. A finales del siglo XIX la sanción histórica benefició a los vectores.

Hemos visto cómo se definieron sistemas de hipercomplejos durante todo el siglo. Es interesante notar que no existe un álgebra tridimensional que sea conmutativa. De hecho, ya el mismo Gauss pensaba que no existía una extensión de los complejos que preservara las propiedades de éstos. Estos resultados fueron demostrados por F. Georg Frobenius y por Charles Sanders Peirce, independientemente. Las únicas álgebras asociativas lineales con coeficientes reales (de las unidades primarias), con un número finito de unidades primarias, con elemento unidad en el producto, y que obedecen la ley del producto son los reales, los complejos, y los cuaterniones reales. Y si los coeficientes pueden ser reales o complejos y se pide conmutatividad, entonces solo los sistemas de números reales y complejos cumplen. Esto último lo había obtenido Weierstrass en 1861 (en un trabajo publicado en 1884), aunque Dedekind también un poco después (1870, trabajo publicado en 1885).

Otra de las consecuencias de este tipo de investigaciones fue el concepto de espacio lineal. Con base en los resultados de Möbius, Hamilton y Grassmann, Peano dio en 1888 el concepto abstracto de espacio lineal real (es decir sobre el cuerpo de los números reales); la obra: Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann preceduto dalle operazioni della logica deduttiva. Definió sistema lineal, dimensión, elementos dependientes o independientes, base, operadores lineales sobre un espacio lineal, suma y producto de operadores lineales.

Hilbert generalizó aun más esto: los "espacios de Hilbert", en los cuales sus elementos ya no son puntos euclidianos sino sucesiones infinitas de números complejos $z_1 + z_2 + z_3 + etc.$ tal que $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + etc.$ sea convergente. Estos espacios han tenido aplicaciones en la mecánica cuántica.



Banach, estampilla.

Todo esto sería colocado en una perspectiva aún más general por el polaco Stephan Banach en la segunda década del siglo XX. Por ejemplo, con la noción de "espacio de Banach". Este último es un espacio normado completo con una métrica dada por la norma. El "espacio de Hilbert" es un espacio de Banach donde además se cumple que

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2.$$

20.4 Matrices y determinantes

Podemos estar de acuerdo con Kline en que las matrices y determinantes no son temas decisivos en la historia de las matemática porque, más que nuevos contenidos teóricos, se trata, efectivamente, de innovaciones en lenguaje, simbolismo o instrumentos de expresión matemática. Aun así, no puede olvidarse que estas dimensiones no substantivas de las matemáticas siempre han ocupado su lugar en el progreso de las matemáticas.

¿De dónde surgieron los determinantes? Por supuesto, en el contexto de la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Pero no solamente ahí: una vez dentro del cálculo diferencial e integral, también en los sistemas de ecuaciones diferenciales, cambios de variables en métodos de integración, y en el estudio de propiedades de las formas cuadráticas en 3 o más variables que se pueden ver asociadas, por ejemplo, a la teoría de números, pero que aparecen en muchas otras partes de las matemáticas.

Es casi increíble pero se encuentra un método matricial en la China del 200 a.C. Se trata de un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas. Ya lo mencionamos anteriormente.

Ya en el siglo XVI, Cardano ofreció un método para resolver un sistema lineal de dos ecuaciones, que es básicamente lo que conocemos como la "regla de Cramer" (aunque no llega a la noción de determinante).

Tampoco se puede dejar de reconocer en el trabajo Elements of curves de de Witt, en 1660, lo que podría señalarse como una diagonalización de una matriz simétrica.

Puede decirse que los sistemas de ecuaciones lineales fueron iniciados por Leibniz en 1678; de hecho, en 1693 usó índices en los coeficientes de un sistema de 3 ecuaciones con 2 incógnitas y eliminando las variables obtenía una expresión como determinante. Se afirma que la primera aparición del determinante en Europa se dio en una carta de Leibniz a L'Hôpital, en 1683, e incluso usó el término "resultante" para sumas combinatorias de términos de un determinante. Algo similar a la regla de Cramer se encuentra en algunos de sus trabajos. También estudió sistemas de coeficientes de formas cuadráticas, que lo empujaron hacia las matrices.



Maclaurin.

No obstante, fue Maclaurin que usó el método de los determinantes para resolver sistemas de ecuaciones lineales con 2, 3 y 4 incógnitas (con 4, dejó planteado o sugerido el método). Esto aparece en su libro póstumo: Treatise of Algebra (resultados obtenidos probablemente como en el año 1729, y obra publicada en 1748). Aquí se encuentra la llamada "regla de Cramer".

Si se tiene el sistema

$$ax + by = c$$

$$dx + ey = f$$

la solución y viene dada por

$$y = \frac{af - dc}{ae - db}$$

y si el sistema es

$$ax + by + cz = m$$

$$dx + ey + fz = n$$

$$gx + hy + fz = p$$

entonces:

$$z = \frac{aep - ahn + dhm - dbp + gbn - gem}{aek - ahf + dhc - dbk + gbf - gec}.$$

Cramer publicó su regla en Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques, en 1750. Cramer dio la fórmula para sistemas de $n \times n$. Su motivación había sido encontrar la ecuación de una curva plana que pasara por un número dado de puntos.

Bezout también hizo contribuciones en este campo: por ejemplo, en 1764, mostró que en un sistema homogéneo de n ecuaciones lineales con n incógnitas, existen soluciones no nulas si el determinante asociado de los coeficientes se anula.

Vandermonde se considera el primero en ofrecer una exposición consistente de la teoría de determinantes.

Laplace también generalizó, en 1771, algunos de los resultados de Vandermonde, Cramer y Bezout. De hecho, consideró imprácticos los métodos de Cramer y Bezout, en el contexto de un estudio sobre órbitas de los planetas interiores. Curiosamente, usó el término "resultante" para referirse al determinante, el mismo que había usado Leibniz, sin saberlo Laplace. Hay una expansión de un determinante que lleva precisamente el nombre de Laplace.

Lagrange estudió identidades de determinantes funcionales de 3×3 en 1773, aunque sin conectar con los trabajos de Laplace o Vandermonde.

El uso de determinantes también se dio para encontrar raíces comunes a dos polimomios de grados m y n; un asunto que había investigado Newton, también Euler, aunque será un método de eliminación elaborado por Bezout el que se llegará aceptar plenamente por los matemáticos.

Ahora bien, fue Gauss, en su Disquisitiones Arithmeticae, quien había usado por primera vez el término determinante para el discriminante de la forma cuadrática

$$ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Sin embargo, el sentido que le dio al término no es el que nosotros le damos modernamente.

Gauss es, por supuesto, el creador del método de la eliminación gaussiana para resolver sistemas de ecuaciones. El método apareció en un trabajo en el que estudiaba la órbita del planetoide Pallas, donde emergió un sistema de 6 ecuaciones lineales con 6 incógnitas.

La historia de los determinantes en el siglo XIX empieza realmente con Cauchy y Jacobi. Cauchy usó el término de determinante pero ya en un sentido moderno. En el año 1812 Cauchy dictó una conferencia en la cual consideraba n elementos

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

y realizaba el producto

$$a_1 a_2 a_3 \ldots a_n (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \ldots (a_n - a_1)(a_3 - a_2)$$

$$(a_4 - a_2) \ldots (a_n - a_2.) \ldots (a_n - a_{n-1})$$

de los n elementos y todas las diferencias entre ellos.

Aquí procedía a la definición de determinante, por medio de una expresión en forma cuadrada:

$$a_{1.1}, a_{1.2}, a_{1.3}, \ldots, a_{1.n}$$

$$a_{2.1}, a_{2.2}, a_{2.3}, \ldots, a_{2.n}$$

....

$$a_{n.1}, a_{n.2}, a_{n.3}, \ldots, a_{n.n}$$

en donde el segundo subíndice es la potencia del elemento a_i.

Cauchy llamaba a esto un "sistema simétrico de orden n". Lo denotaba como

$$S(\pm a_{1.1}, a_{2.2}, a_{3.3}, \dots, a_{n.n}).$$

Poco tiempo después usó la expresión semejante

$$S(\pm A_1 B_2 C_3)$$

para referirse al producto

$$A_1B_2C_3 - A_1B_3C_2 + A_2B_3C_1 - A_2B_1C_3 + A_3B_1C_2 - A_3B_2C_1.$$

Cauchy consignó con precisión la multiplicación de 2 determinantes:

$$|a_{ij}| * |b_{ij}| = \left| \sum_k a_{ik} b_{kj} \right|$$

Cauchy probó el teorema de la multiplicación para matrices, dio los eigenvalores, ofreció resultados en la diagonalización de matrices (para convertir formas a la suma de cuadrados), dio la idea de matrices similares, y probó que una matriz simétrica real es diagonalizable.

Jacques Sturm dio una generalización del problema de los eigenvalores.

Heinrich F. Scherk, debe decirse, ofreció bastantes propiedades nuevas de los determinantes (Mathematische Abhanlungen, 1825).

Con gran relevancia, debe citarse el trabajo de Sylvester y su método dialítico para eliminar x de polinomios de grado m y n respectivamente usando determinantes.

Jacobi usó, por ejemplo, ya en el año 1829, los determinantes que se llaman precisamente jacobianos, aunque no fuera el primero en utilizarlos. En 1841, publicó su obra: De determinantibus functionalibus, enteramente dedicada a los determinantes funcionales. Esto era muy relevante porque ahora las entradas no solo podían ser números sino que también funciones. Por ejemplo, si f_{ij} son funciones de la variable t, con F_{ij} el cofactor de f_{ij} y D es el determinante, entonces:

$$\frac{\partial D}{\partial f_{ij}} = F_{ij}$$ y $$\frac{dD}{dt} = \sum_{i,j} F_{ij} f'_{ij},$$

f' es la derivada de f con respecto a t.

En el contexto del cambio de variables en la integración, se puede ver su uso:

Considérese la expresión

$$\iint G(x,y)dxdy$$

y ahora hágase el cambio de variable siguiente

$$x = g(u,v) \text{ y } y = h(u,v)$$

Entonces, tenemos que

$$\iint G(x,y)dxdy = \iint H(u,v)\begin{vmatrix} g_u & g_v \\ h_u & h_v \end{vmatrix} dudv,$$

con $H(u,v) = G(x(u,v), y(u,v))$.

Este determinante es precisamente el jacobiano de x y y con respecto a u y v.

O simplemente: si $x = f(u,v)$ y $y = g(u,v)$, el jacobiano con respecto a u y v es

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \times \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \times \frac{\partial x}{\partial v}.$$

Otro asunto de interés aquí era lo siguiente:

Considere f_i, n funciones de n variables x_j, lo que se busca es saber si las f_i son no independientes, es decir que las x_j puedan ser eliminadas de tal manera que las f_i formen parte de una ecuación, ¿cuál? Todo se resume así: las f_i no son independientes si y solamente si el jacobiano asociado se anula.

Los determinantes, como hemos mencionado, se usaron también en el tratamiento de formas cuadráticas.

Una forma cuadrática de 3 variables la escribimos de la siguiente manera:

$$b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + 2b_{12}x_1x_2 + 2b_{13}x_1x_3 + 2b_{23}x_2x_3$$

que se puede poner usando determinantes así:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

donde $b_{ik} = b_{ki}$.

Se llama ecuación característica de la forma a la siguiente expresión:

$$\begin{vmatrix} b_{11}-\lambda & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22}-\lambda & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

se llaman raíces características a aquellas que satisfacen esta ecuación.

Lagrange y Laplace habían usado el concepto de ecuación característica (en el marco de sistemas de ecuaciones diferenciales), aunque -se suele mencionar- que Euler lo había hecho antes de una manera implícita. Fue Cauchy quien consignó los términos de ecuación característica. Este matemático mostró la invariancia de esta ecuación al hacerse un cambio de ejes rectangulares y, también, logró determinar cuáles son los ejes principales para una forma de varias variables.

Sylvester fue quien creó en 1851 el concepto de divisores elementales.

Weierstrass, quien en 1858 había encontrado un método general para deducir 2 formas cuadráticas simultáneamente a sumas de cuadrados, completó la teoría de las formas cuadráticas y la extendió a las formas bilineales. Estas son expresiones como la siguiente:

$$b_{11}x_1y_1 + b_{12}x_1y_2 + \ldots + b_{nn}x_ny_n.$$

Fue Henry J. S. Smith quien introdujo los términos de arreglo aumentado y arreglo no aumentado en el manejo de los determinantes. Es decir:

si se tiene el sistema

$$a_1x + a_2y = p$$

$$b_1x + b_2y = q$$

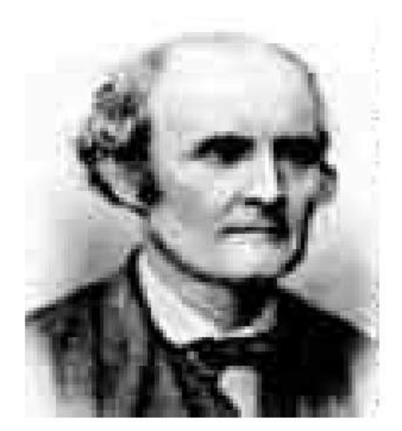
el aumentado es

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & p \\ b_1 & b_2 & q \end{matrix} \right\|$$

y el no aumentado

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{matrix} \right\|.$$

Fue dentro del estudio de las propiedades de los determinantes, lo que hemos reseñado, que surgió la noción de matriz, para expresar el arreglo en sí mismo, es decir: sin darle un valor (recuerde que un determinante simplemente refiere a un valor para un arreglo de coeficientes o elementos). Sylvester fue quien usó la palabra matriz por primera vez.



Cayley.

Cayley afirmaba correctamente que la noción de matriz era lógicamente previa a la noción de deteminante: se calcula el determinante, un valor, de una matriz. Primero está la matriz. Pero, históricamente, primero se desarrollaron los determinantes. A Cayley se le considera el creador de la teoría de matrices, debido a que fue el primero en darles un estatus independiente y en publicar una colección de artículos al respecto, pero, como vimos, las matrices estaban implícitamente presentes en el estudio de los determinantes. De hecho, el mismo Cayley las usó primeramente como un mecanismo para simplificar la notación en un estudio que realizaba sobre invariantes de transformaciones lineales.

Cayley definió la igualdad de matrices, la matriz nula, la unitaria, la suma y multiplicación de matrices, etc. Es decir, ofreció un álgebra de matrices. Dio una construcción explícita de la inversa de una matriz en términos de su determinante.

Tal vez sea interesante enfatizar que la multiplicación de matrices no es generalmente conmutativa. Otro caso en que, al igual que con los cuaterniones, se rompe con leyes fundamentales de los sistemas numéricos clásicos.

Cayley consideró la ecuación característica, aunque sin usar esos términos, así: si se tiene la matriz M y I es la matriz unidad, entonces la ecuación dada por el determinante

$$|M - xI| = 0$$

es la ecuación característica.

Probó en el caso de las matrices 2×2 que la matriz satisface su propia ecuación característica. Precisamente, el teorema Cayley-Hamilton establece que una matriz satisface su ecuación característica. Hamilton había establecido el caso para $n = 4$ dentro de su estudio de los cuaterniones.

Cayley introdujo, además, las líneas en los determinantes, por ejemplo en:

$$\left\| \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{matrix} \right\|.$$

Sobre estos asuntos relacionados con la ecuación característica, dieron contribuciones otros matemáticos como Hermite, Clebsch, Arthur Buchheim, Henry Taber, William Henry Metzler, Frobenius y Kurt Hensel.



Frobenius.

Fue Frobenius quien introdujo la noción de rango de una matriz, en 1879. Este matemático, que al parecer en un principio no conocía el trabajo de Cayley, también obtuvo resultados para matrices similares a aquellos que habían encontrado Sylvester y Weierstrass sobre los factores invariantes y

los divisores elementales. Esto era importante para encontrar condiciones que establecieran la equivalencia de 2 matrices. Se dice que 2 matrices A_1 y A_2 son equivalentes si existen matrices no singulares H y L tal que $A_1 = HA_2L$. A_1 y A_2 son equivalentes si y solo si tienen los mismos divisores elementales.

Frobenius no usó el término matriz, pero probó resultados relevantes sobre matrices canónicas como representantes de clases de equivalencias de matrices. Fue el primero en probar el caso general del teorema de Cayley-Hamilton. Cuando se enteró en 1896 que Cayley lo había demostrado para $n = 2$ y $n = 3$, y aunque él lo había demostrado para el caso general, con gran generosidad adjudicó el nombre de Cayley al teorema.

Además, Frobenius dio la definición de matrices ortogonales (usada por Hermite en 1854): A es ortogonal si y solamente si $A = (A^T)^{-1}$, donde A^T es la transpuesta de A (A^T es formada al intercambiar las filas por las columnas de A).

En el año 1870, Jordan introdujo lo que se llama "forma canónica de Jordan".

Las matrices han sido consideradas, incluso, como argumentos de funciones trascendentes.

Metzler, en 1892, definió funciones en forma de serie; por ejemplo, si A es una matriz, entonces, se puede definir

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Una definición axiomática de determinante fue dada por Weierstrass, aparece en un libro póstumo de 1903.

Finalmente, debe decirse que se usaron también determinantes y matrices infinitas, sobre todo en el contexto de algunas aplicaciones en la física.

20.5 Biografías



Evariste Galois

Evariste Galois nació el 25 de octubre de 1 811 en Bourg La Reine, Francia. Sus padres Nicholas Gabriel Galois y Adelaide Marie Demante fueron educados en filosofía, literatura clásica y religión, pero no existían indicios de alguna habilidad matemática en la familia. Un evento histórico que marcaría la vida de Galois fue el ataque de la Bastille el 14 de julio de 1 789; a pesar del ataque, Francia comenzó a tener buenos tiempos bajo la orden de Napoleón Bonaparte, quien luchó hasta la victoria.

Hacia el año 1 824, Galois asistía al Liceo de Louis-le-Grand, su registro de notas era muy bueno y recibió varios premios. En 1 828 tomó el examen de la École Polytechnique pero lo perdió. Un año después, Galois publicó su primer estudio matemático.

Galois sufrió una tragedia que le afectaría el resto de su vida cuando el 2 de julio de 1 829 su padre cometió suicidio.

Galois volvió a presentar el examen a la École Polytechnique, y una vez más falló. Entró a la École Normale y recibió su diploma el 29 de diciembre de 1 829.

Después de la revolución de 1830, Galois fue encarcelado varias veces por sostener sus ideales republicanos, en una de esas ocasiones Galois trató de suicidarse pero los otros prisioneros lo detuvieron.

Después de su liberación Galois participó en un duelo en el que quedó herido y murió a la edad de 21 años en un hospital de París el 31 de mayo de 1832.



Hermann Günter Grassmann

Hermann Grassmann nació el 15 de abril de 1 809 en Stettin, Prusia (hoy Szczecin, Polonia). A lo largo de su vida dio clases solamente en dos lugares: Stettin, en donde enseñó en el Gymnasium desde 1 831 hasta su muerte, y durante un periodo muy corto en Berlín (1 834 a 1 836). Grassmann es reconocido debido a su trabajo en el desarrollo del cálculo general por vectores.

En 1 844 desarrolló lo que fue su principal trabajo, en el cual utilizó la idea de un álgebra en la que los símbolos representaran entidades geométricas tal como puntos, líneas y planos; manipulados por ciertas reglas. Se le atribuye la invención de lo que se conoce hoy en día como el Álgebra Exterior. Se le conocieron otro tipo de escritos en los cuales desarrollaba temas como lingüística y botánica, así como del color y de la acústica.

A la edad de cincuenta y tres años no se sentía complacido acerca de sus ideas matemáticas por lo que volvió el estudio de sánscrito, otro de sus intereses. Su diccionario de sánscrito sigue siendo usado.

Murió el 26 de setiembre de 1 877 en Stettin, Alemania.



Niels Henrik Abel

Niels Henrik Abel nació el 5 de agosto de 1 802 en Frindoe, Noruega. Su vida fue marcada por la pobreza debido a grandes cambios políticos en su país natal. Sus padres fueron Soren Georg Abel quien fue un nacionalista que luchó en el movimiento de independencia de Noruega y Ane Marie Simonson, hija de un comerciante.

A la edad de un año y tras la muerte de su abuelo, su padre fue asignado Ministro de Gjerstad, donde Niels creció. En 1 815, junto a su hermano mayor, fue enviado a la Escuela Catedral en

Christiania y fue aquí donde mostró sus habilidades hacia las matemáticas y las físicas. Dos años después, Bernt Holmboe ingresó como el nuevo profesor de matemáticas de la escuela y sirvió de gran influencia para Niels, quien ya estudiaba textos de Euler, Newton, Lalande y d'Alembert.

En 1 820, su padre murió y Niels se vio obligado a retirarse de la escuela, pero un año más tarde Holmboe le consiguió una beca para ingresar a la Universidad de Christiania en donde un año más tarde se graduó. En 1825, el gobierno noruego le otorgó una beca que le permitió viajar a conocer distintos matemáticos en Noruega y Dinamarca. A su regreso a Christiania en 1 827, recibió por parte de la Universidad una pequeña cantidad de dinero e inició a impartir tutorías en Froland.

Murió el 6 de abril de 1 829 en Froland, Noruega.



Jan Arnoldus Schouten

Jan Schouten nació el 28 de agosto de 1 883 en Nieuweramstel, Ámsterdam, en los Países Bajos.

Antes de iniciar sus estudios matemáticos, Jan estudió ingeniería eléctrica en la Technische Hogeschool en Delft y por varios años se desempeñó como ingeniero eléctrico. Heredó una gran cantidad de dinero, entonces dejó su empleo e ingresó a la Universidad Leiden a estudiar matemáticas.

En 1 914, presentó su tesis acerca de análisis de tensor. Ese mismo año obtuvo un puesto en Delft donde dio clases de matemáticas por casi treinta años.

De 1 948 a 1 953 fue asignado como profesor en la Universidad de Ámsterdam pero nunca enseñó, ya que fue el Director del Centro de Investigación Matemática en Ámsterdam.

En 1 954, fue el presidente del Congreso Internacional de Matemáticas también en Ámsterdam.

Murió el 20 de enero de 1 971 en Epe, Países Bajos.

20.6 Síntesis, análisis, investigación

1. ¿Cuál es la ecuación ciclotómica?
2. ¿Cómo demostró Gauss que se puede inscribir un polígono regular de 17 lados en el círculo usando regla y compás?
3. ¿Qué son ecuaciones abelianas?
4. ¿Qué es el grupo simétrico de un conjunto de n elementos?
5. ¿Cuál fue el momento decisivo para el reconocimiento de la noción de grupo?
6. Estudie el siguiente texto.

   "Ahora estamos en condiciones de vislumbrar la íntima conexión entre la idea de grupo y la idea de invariancia. Supongamos que nos dan un grupo de transformaciones; una de las principales preguntas que surgen al considerarlo es ésta: ¿qué es lo que permanece inalterado --invariante-- bajo todas y cada una de las transformaciones del grupo? En otras palabras, ¿qué propiedad o propiedades son comunes a los objetos transformados y a los que se transforman? Bien, ahora tenemos ante nosotros un cierto grupo de transformaciones: el grupo de las traslaciones. Llamémoslo G. Cada traslación de G convierte (transforma, lleva, mueve) un punto en otro punto y, así, convierte cualquier configuración de puntos, F --cualquier figura geométrica--, en otra configuración F'. ¿Qué es lo que queda sin cambiar? ¿Cuáles son los invariantes? Es obvio que un invariante --muy importante-- es la distancia; esto es, si P y Q son dos puntos cualesquiera y si sus transformados bajo cierta traslación son, respectivamente, P' y Q', entonces la distancia entre P' y Q' es la misma que entre P y Q. Otro es el orden entre los puntos; si Q está entre P y R, Q' está entre P' y R'. Pueden ver inmediatamente que todas las formas de los ángulos, áreas y volúmenes son invariantes; en una palabra, la congruencia es invariante; si una traslación convierte una figura F en una figura F', F y F' son congruentes. Por consiguiente, la congruencia es invariante bajo todas las traslaciones que tienen una dirección dada. ¿ Constituyen éstas un grupo? Obviamente lo constituyen y este grupo G' es un subgrupo de G. La congruencia es invariante bajo G', pero también lo es bajo G y G' está contenida en G; por esto es natural preguntar si el mismo G no puede incluirse en un grupo, aun más amplio, que deje invariante la congruencia. La pregunta sugiere la inversa de la pregunta del principio. Esta primera era: ¿cuáles son los invariantes de un grupo dado? La pregunta inversa es: ¿ cuáles son los grupos y en particular el grupo más amplio de un invariante dado? Esta pregunta es tan importante como la otra. Consideremos el ejemplo que estamos manejando. El invariante dado es la congruencia. ¿G, el grupo de las traslaciones, es el grupo más amplio de las transformaciones del espacio que deja la congruencia sin cambiar? Evidentemente, no. Supongan las transformaciones del espacio que consisten en rotaciones de éste (como un cuerpo rígido) alrededor de una línea fija (como eje); si una rotación tal convierte una figura F en F' las dos figuras son congruentes. Es evidente que lo mismo sucede si la transformación es un movimiento helicoidal, esto es, una rotación y una traslación simultáneas respecto a una línea fija. Todas estas rotaciones y movimientos helicoidales, junto con las traslaciones, constituyen un grupo llamado grupo de los

desplazamientos del espacio, que incluye todas las transformaciones que dejan invariante la congruencia. Este grupo, como les mostrará una pequeña reflexión, tiene muchos, infinitos, subgrupos; el conjunto de los desplazamientos que dejan invariante un punto específico es uno de tales subgrupos; otro es el conjunto que deja invariantes dos puntos dados. ¿Qué relación tiene este último con el subgrupo que deja invariante sólo uno de los puntos? ¿Hay algún desplazamiento que deje invariantes tres puntos no alineados? Estas preguntas son sólo ejemplos de otras muchas que les resultará provechoso formular e intentar resolver.

Me permito repetir las dos cuestiones principales para darles más énfasis.

(1) ¿Qué es lo que queda invariante, al aplicar un grupo de transformaciones dado?

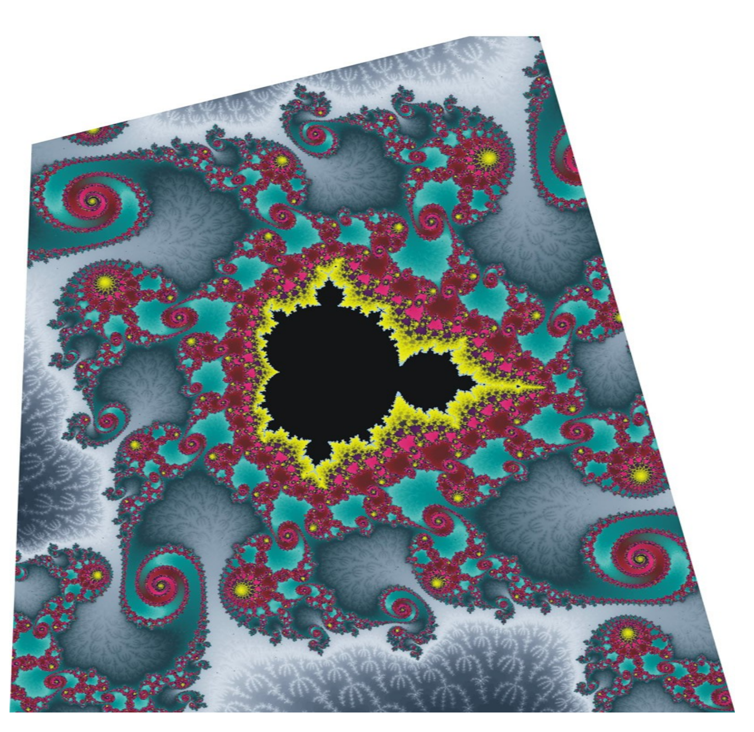
(2) ¿Cuáles son los grupos de transformaciones, y en particular el grupo más amplio, que dejan inalterada alguna cosa dada --un objeto, una propiedad, una relación, no importa lo que sea--, que deba permanecer invariante? [Keyser, Cassius J. : "El concepto de grupo", p. 338, 339]

Explique la relación entre grupo e invariancia según este texto.

7. Diga qué son los enteros de Gauss.
8. ¿Quién creó la teoría de ideales?
9. Mencione y explique las distinciones de Peacock para el álgebra.
10. Explique qué son los cuaterniones.
11. ¿Qué contribución hizo Grassmann a la generalización de los trabajos en cuaterniones?
12. Describa brevemente la evolución de los vectores con base en la información dada en este libro. Explique la relación vector-cuaternión.
13. ¿Quién fue el matemático que dio el concepto de espacio lineal?
14. ¿Qué es un espacio de Banach?
15. Dé 2 ejemplos de cómo funciona la regla de Cramer.
16. ¿En qué tipo de ensayo usó Gauss el método de eliminación gaussiana?
17. ¿Qué es la ecuación característica?
18. Explique la relación entre matrices y determinantes desde una perspectiva histórica.
19. Diga quién dio la definición de matrices ortogonales.

CAPITULO XXI

LAS GEOMETRÍAS DEL SIGLO XIX



Si bien el análisis y el álgebra fueron las disciplinas de mayor desarrollo en la Modernidad, la geometría experimentó un importante progreso durante el siglo XIX. Se suele hacer una diferenciación entre la geometría sintética y aquella que utiliza los métodos del álgebra y el análisis.



Reina egipcia.

21.1 Sintética y algebraica

En lo que se refiere a la primera es interesante mencionar nuevamente a la geometría proyectiva que arrancó en la segunda década del siglo XIX. El nombre al que nos refiere esta temática es el de Poncelet, aunque no se puede negar contribuciones de Joseph Gergonne. Sin embargo, mientras que Poncelet afirmaba la superioridad de los métodos sintéticos, Gergonne lo hacía con los analíticos.

En el desarrollo de la nueva geometría proyectiva hay que considerar el papel jugado en Francia por la École Polytechnique. Y recordar que, ya en el año 1806, un joven estudiante de esta institución había publicado un teorema muy conocido: "en cualquier hexágono circunscrito a una cónica, las tres diagonales se cortan en el mismo punto". Este es el teorema de "Brianchon". Este mismo estudiante había hecho una formulación moderna y demostración del llamado teorema de Pascal: "para todo hexágono inscrito en una cónica, los tres puntos de intersección de los pares de lados opuestos están en una recta". Estos dos resultados serían relevantes para el desarrollo de la geometría proyectiva. En particular, nótese que los términos recta y punto se intercambian de alguna manera.



Cabeza de Anubis.

Charles Julien Brianchon y Poncelet publicaron juntos un trabajo: "Re-cherches sur la détermination d'une hyperbole équilatère", en 1820 - 1821. En este artículo se encuentra un teorema que también fue desarrollado por otro matemático, Karl Wilhelm Feuerbach, quien estableció resultados en la geometría del triángulo en la circunferencia.

En su obra Applications d'analyse et de géométrie, escrita entre 1813 y 1814 pero publicada hasta 1862 - 1864, Poncelet realizó un extraordinario desarrollo de la geometría sintética buscando el tipo de generalización que encontraba en la geometría analítica. Hay un principio fundamental sobre el cual partía: el "principio de la continuidad". Éste se puede establecer de la siguiente forma: "Las propiedades métricas descubiertas para una figura primitiva siguen siendo aplicables, sin otras modificaciones que cambios de signos, a todas las figuras correlativas que puedan considerarse como surgiendo de la primera."

El filósofo e historiador de las matemáticas Javier de Lorenzo señala:

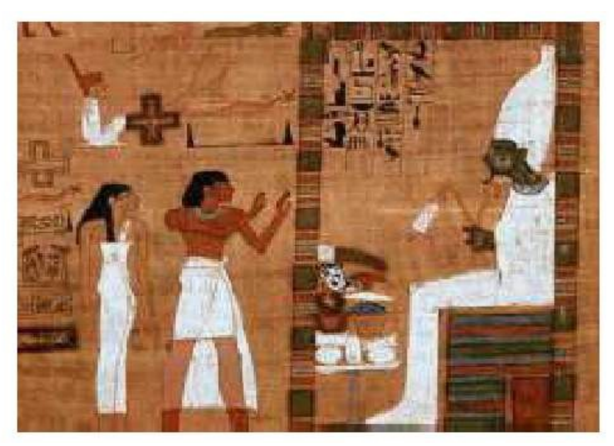
"Poncelet distingue dos tipos de propiedades geométricas: a) métricas, en las cuales interviene la medida de distancia y ángulos; b) descriptivas, proyectivas o de posición, que sólo dependen de la posición relativa de los elementos de la figura considerada. Las métricas no se conservan al realizar una proyección puntual de la figura, mientras que las que se conservan serán las calificadas de proyectivas o de posición. El exagrama místico de Pascal, por ejemplo, constituye una propiedad geométrica proyectiva de las cónicas -y cito esta propiedad por encontrarse en el Tratado de cónicas, tratado de geometría proyectiva que Leibniz ordenó para su publicación en las mismas fechas en las que hace el comentario a la geometría cartesiana de no dar cuenta de un análisis de la posición, de la situación de los elementos geométricos, lo que se ha entendido por una afirmación de que Leibniz había entrevisto la 'topología' en lugar de considerar sin más que hablaba de la proyectiva- mientras que una propiedad como la reflejada en el teorema de Pitágoras es métrica y no se conserva en la proyección puntual". [de Lorenzo, J.: La matemática y el problema de su historia, p.49]

Gergonne sostuvo un "principio de dualidad" que permitía un cierto intercambio entre los términos de punto y recta en varios teoremas. La justificación algebraica de este principio, como veremos, sería dada por Plücker.

Los trabajos en geometría fueron extendidos por geómetras como el suizo Jakob Steiner y los alemanes August Ferdinand Möbius, Julius Plücker y Christian von Staud. La orientación de Steiner y von Staud fue más bien sintética, mientras que la de Möbius y Plücker fue más bien la algebraica. A Steiner se le considera uno de los grandes geómetras de la época moderna. Hizo importantes contribuciones en la geometría sintética, y la proyectiva: por ejemplo, Systematische Entwicklungen de 1832. Sus trabajos incluyeron los llamados precisamente "puntos de Steiner", así como el estudio de la transformación geométrica "inversión". Von Staud ofreció un tratamiento de la geometría proyectiva sin acudir a las magnitudes ni a los números (Geometrie der Lage, 1847).

Möbius, quien también hizo trabajos en astronomía, fue el primero en introducir las coordenadas homogéneas, una aproximación aceptada plenamente para el manejo algebraico de la geometría proyectiva. Debe decirse también que hizo contribuciones en la topología; de hecho, la famosa "cinta de Möbius" es una muestra que nos recuerda esto.

Plücker también fue un físico experimental, que hizo contribuciones en la conducción eléctrica de gases, en la espectroscopia, el magnetismo de cristales, y que dio importantes resultados en la geometría analítica. Por ejemplo, estableció una teoría general de curvas algebraicas en el plano en donde encontró relaciones entre el número de singularidades que precisamente se llaman "relaciones de Plücker". Debe mencionarse que, aunque en un principio había hecho trabajos con métodos en parte sintéticos, luego, se convertiría en lo que para algunos historiadores fue el primer especialista en geometría analítica.



La muerte ante Osiris, el juez supremo.

Uno de los trabajos que realizó fue de simplificación de las notaciones utilizadas en geometría analítica. Por ejemplo, para expresar la familia de las circunferencias que pasan por dos puntos de intersección, y circunferencias dadas por las expresiones siguientes

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

y

$$x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0.$$

Gergonne y Plücker reducían la expresión algebraica a

$$C + \lambda C' = 0.$$

De hecho, anteriormente, la misma situación fue expresada por Gabriel Lamé como

$$mC + m'C' = 0$$

También debe mencionarse: en este contexto el desarrollo de una notación abreviada. Plücker obtuvo las coordenadas homogéneas, un resultado que, también, había sido construido por el matemático Feuerbach y también, como mencionamos antes, por Möbius, todos de manera independiente. Incluso se menciona el nombre de Étienne Bobillier como otro de los creadores de estas coordenadas. La idea central de éstas afirma la localización de un punto en el plano a través de tres coordenadas y no solamente dos. Este tipo de coordenadas permitía desde la geometría analítica el tratamiento de problemas de la geometría proyectiva. Es interesante señalar también que las coordenadas homogéneas empujaban en la dirección de una aritmetización de la geometría.

Además, este matemático estableció un punto de vista tremendamente novedoso en la geometría analítica, que constituía básicamente el principio de la dualidad que habían usado Poncelet y

Gergonne, pero desde una base algebraica. Boyer lo expresa de la siguiente forma:

"... en 1829 Plücker publicó en el Journal de Crelle un artículo en el que se exponía un punto de vista revolucionario que venía a romper completamente con la vieja concepción cartesiana de las coordenadas como longitudes de segmentos rectilíneos. La ecuación de una recta en coordenadas homogéneas tiene, como hemos visto, la forma

$$ax + by + ct = 0.$$

Los tres coeficientes o parámetros (a, b, c) determinan, pues, una única recta en el plano, exactamente lo mismo que las tres coordenadas homogéneas (x, y, t) determinaban un único punto del plano. Dado que las coordenadas son números lo mismo que los coeficientes o parámetros, Plücker vio claramente que uno podría modificar el lenguaje usual y llamar a la terna (a, b, c) las coordenadas homogéneas de la recta correspondiente. Si, por último, invertimos el convenio cartesiano de manera que las letras del comienzo del alfabeto representen variables y las del final constantes, entonces la ecuación $ax + by + ct = 0$ representa el haz de todas las rectas que pasan por el punto (x, y, z) en vez del haz de todos los puntos situados sobre la recta fija (a, b, c). Si consideramos, pues, una ecuación 'no comprometida a priori' de la forma $pu + qv + rw = 0$, está claro que la podemos considerar indiferentemente como representando la colección de todos los puntos (u, v, w) que están sobre la recta (p, q, r), o como la colección de todas las rectas (p, q, r) que pasan por el punto fijo (u, v, w). (...). El intercambio de las palabras 'punto' y 'recta' corresponde simplemente, desde este punto de vista, a un intercambio de las palabras 'constante' y 'variable' con respecto a las cantidades p, q, r y u, v, w." [Boyer, C.: Historia de la Matemática, p. 667]

Es interesante también señalar que Plücker contribuyó a establecer que la geometría no sólo necesita estar basada en los puntos como los elementos básicos, sino también puede serlo en rectas, planos, círculos, esferas.

En esta geometría de rectas, de dimensión 4, consideró la figura dada algebraicamente por $f(r, s, t, u) = 0$, la que llamó un "complejo", y descubrió que un complejo cuadrático de rectas tiene propiedades similares a las de una superficie cuadrática o cuádrica. Es decir, tocó con sus manos la idea de invariancia, pero se murió antes de desarrollar este tipo de idea, que sí desarrollaría su discípulo Klein.

En Francia mientras tanto la figura representativa en la geometría era Michel Chasles, quien fuera alumno de la École Polytechnique, con Monge, y profesor de la misma entre 1841 y 1846. Fue el creador de lo que se llama la geometría "enumerativa", basada en métodos que había utilizado Poncelet, y luego sería desarrollada por Hermann Schubert y H. G. Zeuthen. Dio un énfasis a las llamadas razones anarmónicas entre cuatro puntos alineados o rectas concurrentes, que son de la forma

$$\frac{c-a}{c-b} \div \frac{d-a}{d-b}.$$

En su libro Traité de géométrie supérieure (1852) estableció en la geometría lo que se llama "segmentos orientados". Resulta interesante señalar que este matemático escribió probablemente la primera historia de las matemáticas: Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie (1837).

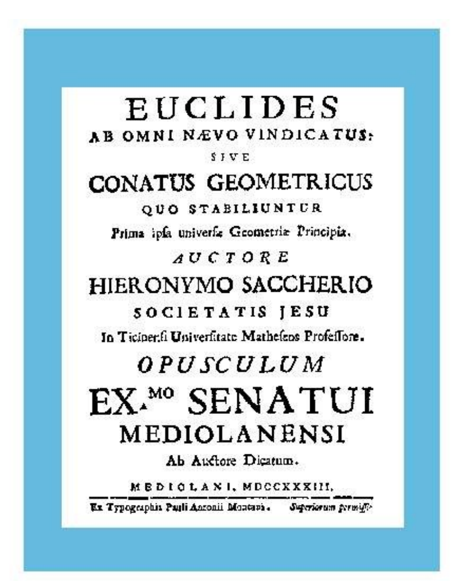
21.2 No euclidianas

La geometría vivió una auténtica revolución con el surgimiento de geometrías no euclidianas. Todo giraba alrededor del postulado de las paralelas de Euclides. Después de muchos años de tratar de demostrar el quinto postulado como una derivación de los otros postulados o de sustituirlo por otros, se asumió su independencia. Con ello se daría una importante transformación en la percepción de las matemáticas, en particular sobre su naturaleza.

Fueron Gauss, el ruso Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1793 - 1856) y el húngaro János Bolyai (1802 - 1860), los creadores de las geometrías no euclidianas, de una manera independiente. Se sabe, gracias a su diario, que Gauss se había adelantado a los otros matemáticos, pero este matemático no había publicado sus resultados. Gauss empezó a trabajar en la geometría no euclidiana desde 1792, con 15 años, cuando le mencionó a un amigo, Schumacher, la idea de una geometría válida sin el quinto postulado.

En una carta dirigida al matemático húngaro Wolfgang Farkas Bolyai (1775 - 1856), en 1799, Gauss afirmó que no se podía deducir el quinto postulado de los otros postulados euclidianos. Desde ese momento con mayor interés le dedicó sus esfuerzos a geometrías sin ese postulado: por lo menos desde 1813, Gauss trabajó en la nueva geometría que llamó primero anti-euclidiana, luego astral y después no euclidiana. Gauss llegó a la conclusión de que no podía probarse que los resultados de la geometría euclidiana fueran autoevidentes y su verdad necesaria, lo que sí sucedía -en su opinión- con la aritmética.

En la geometría que desarrolló Gauss, la suma de los ángulos de un triángulo es menor que 180 grados, pero esta suma aumenta de acuerdo con el tamaño del área del triángulo: conforme el área del triángulo se hace más pequeña, e incluso tiende a 180 cuando el área tiende a 0.



EUCLIDES
AB OMNI NÆVO VINDICATUS:
SIVE
CONATUS GEOMETRICUS
QUO STABILIUNTUR
Prima ipsa universæ Geometriæ Principia.
AUCTORE
HIERONYMO SACCHERIO
SOCIETATIS JESU
In Ticinensi Universitate Matheseos Professore.
OPUSCULUM
EX.MO SENATUI
MEDIOLANENSI
Ab Auctore Dicatum.
MEDIOLANI, MDCCXXXIII.
Ex Typographia Pauli Antonii Montani. Superiorum permissu.

Euclides ab omni naevo vindicatus, de Girolamo Saccheri (1733).

Lobachevsky, hijo de un modesto funcionario del gobierno ruso, empezó a los 21 años como profesor de la Universidad de Kazán, institución de la cual llegó a ser rector en 1827. Ya en el año 1826 había ofrecido su visión y resultados en la nueva geometría, pero este trabajo se perdió. Tiempo después publicó sus trabajos en Kazan, y también en el Journal für Mathematik, con un primer ensayo que se llamó "Sobre los fundamentos de la geometría" (1829 - 1830) y, luego, un segundo trabajo: "Nuevos Fundamentos de la Geometría con una Teoría Completa de las Paralelas" (1835 - 1837). Lobachevsky llamó su geometría en un principio imaginaria y posteriormente pangeometría.

Bolyai, hijo del profesor húngaro de matemáticas Wolfgang (Farkas) Bolyai (amigo de Gauss) publicó, en 1832 - 1833, "Ciencia absoluta del espacio", como apéndice en un libro de Farkas: Tentamen Juventutem Studiosam in Elementa Matheseos Purae Introducenci (Intento de introducir la juventud estudiosa en los elementos de Matemáticas Puras). Bolyai había trabajado las geometrías no euclidianas por lo menos desde 1823, sin embargo, publicó sus resultados después que Lobachevsky.

Gauss, Lobachevsky y Bolyai asumieron que el postulado euclidiano de las paralelas no se podía probar como deducción de los otros 9 postulados y axiomas de la geometría euclidiana, y que por eso mismo se requería un postulado adicional para ofrecer un fundamento a la nueva geometría. Lo que se hizo fue lo siguiente: puesto que el postulado de las paralelas era un hecho independiente, se adoptó una proposición contraria a ese axioma, para entonces deducir las consecuencias en un nuevo sistema con el nuevo axioma.



Lobachevsky, estampilla.

Como ha sucedido en otras ocasiones en las que se dan resultados casi idénticos o similares en un tema, se dio una polémica acerca de la prioridad histórica de los resultados. Gauss al leer en 1832 el artículo de János escribió a Farkas diciéndole que no podía aplaudir ese trabajo porque de hacerlo sería aplaudir su propio trabajo (de Gauss). Bolyai también pensó que Lobachevsky le había plagiado su trabajo. Fue Lobachevsky el primero en publicar su obra, y, por eso, se le suele considerar como el padre de la geometría no euclidiana. El tema estaba en el ambiente matemático de la época, en un contexto de profundas reformas y cambios sociales y culturales, y existía una tradición de trabajos precedentes que los tres matemáticos habían podido considerar: Saccheri, Lambert, Schweikart y Taurinus.

Aunque la geometría no euclidiana constituía una verdadera revolución, su influencia en la comunidad matemática no fue inmediata. Por un lado, porque el mismo Gauss no publicó sus resultados y, por el otro, porque Lobachevsky y Bolyai no eran originarios de los países "importantes" en las ciencias y matemáticas de la época. Además, Lobachevsky publicó primero en ruso y los rusos que lo leyeron fueron muy duros con su trabajo. No fue sino hasta 1840 que Lobachevsky publicó en alemán. Hay que decir, además, que durante esa época la geometría de moda era la proyectiva, y, por otra parte, los matemáticos no se sentían a gusto con ideas tan radicales y novedosas.

Después de la muerte de Gauss, en 1855, se publicó sus trabajos incluyendo notas y correspondencia en torno a la geometría no euclidiana. Esto hizo que se le pusiera atención al tema.

Los trabajos de Bolyai y Lobachevsky fueron mencionados en 1866 - 1867 por el matemático Richard Baltzer (1818 - 1887) y poco después se fue tomando conciencia de la trascendencia de la nueva geometría. La geometría que desarrollaron asumió que por un punto exterior a una recta pasan un número infinito de rectas paralelas a la dada (es decir que no poseen puntos de intersección). Esto se derivaba de la hipótesis del ángulo agudo de Saccheri. De hecho, es con dos paralelas que trabajó Lobachevsky.

Una valoración de las geometrías no euclidianas y su impacto en la naturaleza de las matemáticas:

"Al dar el hecho histórico escueto de que Lobachewsky en 1826 - 9 y J. Bolyai en 1833 casi simultáneamente y con entera independencia publicaron detallados desarrollos de la geometría hiperbólica, hemos recordado una de las mejores revoluciones del pensamiento. Para encontrar otra que se le pueda comparar en importancia de largo alcance hemos de remontarnos a Copérnico, y

aún esta comparación es inadecuada en ciertos aspectos, ya que la geometría no euclidiana y el álgebra abstracta habrían de cambiar toda la perspectiva del razonamiento deductivo y no limitarse simplemente a ampliar o a modificar secciones particulares de la ciencia y de las matemáticas. Al álgebra abstracta de 1830 y años siguientes, y a las atrevidas creaciones de Lobachewsky y de Bolyai se remontan el concepto actual (1945) de las matemáticas como creación arbitraria de los matemáticos. Exactamente de la misma manera que un novelista inventa personajes, diálogos y situaciones de las que es a la vez autor y señor, el matemático imagina a voluntad los postulados sobre los que se basa sus sistemas matemáticos. Tanto el novelista como los matemáticos pueden estar condicionados por el medio ambiente por la condición y por la manera de tratar su material; pero ni unos ni otros se ven obligados por ninguna necesidad eterna y extrahumana a crear ciertos personajes o a inventar ciertos sistemas. Y si el caso fuera que sí están así condicionados, nadie lo ha demostrado, y para una inteligencia adulta del siglo XX la multiplicación de las hipótesis superfluas y místicas es una empresa aún más fútil de lo que lo era en los días de Occam." [Bell, E.T.: Historia de las matemáticas, pp. 342-343]

Realmente las geometrías no euclidianas serían integradas a las líneas centrales de las matemáticas hasta Riemann, quien contribuyó directamente a la generación de nuevas geometrías de una forma muy amplia. De igual manera que Gauss, Bolyai y Lobachevsky Riemann asumió un postulado contrario al quinto de Euclides, pero lo hizo de una manera diferente. En lugar de asumir que existe un número infinito de rectas paralelas que pasan por un punto exterior a una recta dada, asumió que no pasaba ninguna. Puesto de otra forma: al extenderse indefinidamente las rectas, tarde o temprano éstas se deberían cortar. Esta era la hipótesis del ángulo obtuso de Saccheri.

Pero Riemann fue más lejos: no solo dudó del quinto postulado de Euclides sino que de los otros, en particular el segundo. Riemann consideró que lo que realmente podemos garantizar no es una recta infinita, sino más bien que el proceso de extender un segmento es sin fin. Hizo una distinción muy sutil entre longitud infinita y longitud ilimitada o inacabable. Por ejemplo: uno puede recorrer un círculo ilimitadamente pero el círculo posee una longitud finita. De esta manera, Riemann enfatizó una dimensión especial del concepto de recta; éstas aquí no son longitudes infinitas sino ilimitadas.

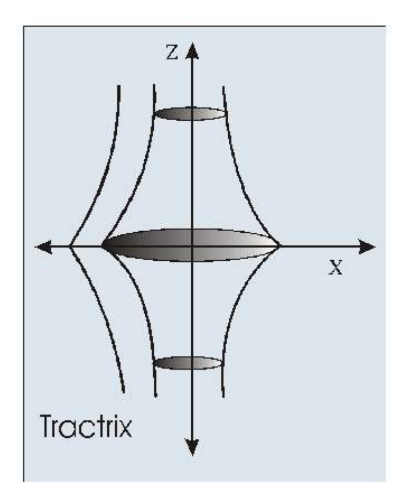
Usando esta modificación en los postulados creó una nueva geometría no euclidiana.

Para que se tenga idea de las diferencias, repetimos: en la geometría de Gauss la suma de los ángulos de un triángulo es menor que 180 grados, mientras que en la de Riemann es mayor que 180. En ambas geometrías la suma varía según el área del triángulo. Y cuando el área del triángulo tiende a 0: en la de Gauss la suma tiende a 180 grados, en la de Riemann la suma se acerca por arriba. En ambos casos, para triángulos pequeños, entonces, la suma ronda los 180, como también sucede en la geometría euclidiana.

Sobre la geometría esférica, hagamos intervenir una bella explicación dada por Poincaré:

"Imaginemos un mundo poblado únicamente por seres carentes de espesor; y supongamos que estos animales 'infinitamente chatos' estén todos en un mismo plano y no puedan salir de él. Admitamos, además, que ese mundo esté suficientemente alejado de los otros para estar sustraído a su influencia. Si estamos dispuestos a hacer hipótesis, no nos cuesta nada dotar de razonamiento a esos seres y considerarlos capaces de construir una geometría. En ese caso, ciertamente atribuirán al espacio sólo dos dimensiones.

Pero supongamos ahora que esos animales imaginarios, aun permaneciendo siempre carentes de espesor, tengan la forma de una figura esférica y no de esfera, sin poder alejarse de ella. ¿Qué geometría podrán construir? En primer lugar, es evidente que atribuirán al espacio sólo dos dimensiones; lo que desempeñará para ellos el papel de la recta, será la distancia más corta de un punto a otro de la superficie esférica, es decir un arco de círculo máximo; en una palabra, su geometría será la geometría esférica." [Poincaré, Henri: Filosofía de la ciencia, p. 175]



Pseudoesfera.

El italiano Beltrami desarrolló una construcción de la pseudoesfera, superficie donde la curvatura de Gauss es negativa; un método que, en esencia, demostraba, al igual que la visión proyectiva de Klein, que la geometría no euclidiana era igualmente consistente que la euclidiana.

21.3 La geometría diferencial

Este es un buen momento para retomar la idea de la geometría diferencial (término usado así por primera vez por Luigi Bianchi, 1856 - 1928, en 1894), pues se trata de un marco teórico más general en el cual se integran las geometrías no euclidianas y más que eso: todas las geometrías. La geometría ya no trata de puntos o rectas del espacio, sino de lo que se llama variedades. El punto de partida puede decirse que era el trabajo realizado por Gauss en la construcción de mapas y la llamada geodesia, que apoyaría un nuevo enfoque sobre la naturaleza del espacio. Es decir:

"El problema de construir mapas planos de la superficie de la tierra fue uno de los que dio origen a la geometría diferencial, que se puede describir a grandes rasgos como la investigación de las propiedades de curvas y superficies en el entorno de un punto." [Bell, E.T.: Historia de las matemáticas, p. 365]

La geometría diferencial trata de las propiedades de las curvas y superficies que varían de un punto a otro, y son sujetas a variaciones (de punto en punto) donde tiene sentido la utilización de las técnicas del Cálculo. Gauss, en su Disquisitiones Generales circa Superficies Curvas (Investigaciones generales sobre superficies curvas) ofreció la nueva idea que usaría Riemann: una superficie se podía ver como un espacio en sí mismo.

Puede resultar interesante hacer aquí una digresión casi filosófica sobre la naturaleza de la geometría. Para Riemann, al igual que para Gauss, la geometría debía asociarse con la mecánica; por eso, buscó demostrar que los axiomas específicos de Euclides eran empíricos y no autoevidentes y necesarios en sí mismos sin tomar en cuenta la acción de la experiencia. Su estrategia fue buscar qué era lo realmente a priori en la geometría del espacio y estudiar sus consecuencias. Las otras propiedades del espacio no eran a priori. Con ello podría concluir que serían de naturaleza empírica. Es decir, buscar lo realmente necesario y autoevidente y, luego, hacer ver que lo que quedaba fuera tenía que ser empírico.



Ramsés II.

En su investigación, Riemann concluyó que, para estudiar el espacio, debía hacerse localmente y no como un todo: el espacio se debía analizar por pedazos. Eso implicaba, por ejemplo, que no se podía ofrecer resultados aplicables para todo el espacio. ¿ Cómo resumir la geometría diferencial? El estudio de las propiedades de las curvas y superficies en el espacio en una variedad diferencial, que es uno de esos pedazos a estudio. Las variedades eran el concepto más general y éstas poseían un conjunto de propiedades aplicables a cualquier variedad. Este conjunto era el de las propiedades necesarias y autoevidentes que Riemann quería encontrar. Se trataba de una geometría con n dimensiones, y donde había ciertas reglas. El espacio "normal" tenía 3. Riemann consideró la distancia entre 2 puntos infinitamente próximos: en un espacio euclidiano, la métrica viene dada por la expresión

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Si la métrica es diferente, el espacio es otro. Por ejemplo, si la métrica es:

$$ds^2 = g_{11}dx^2 + g_{12}dxdy + g_{13}dxdz + g_{21}dydx + g_{22}dy^2 + g_{23}dydz +$$
$$+g_{31}dzdx + g_{32}dzdy + g_{33}dz^2$$

se tiene lo que se llama un "espacio de Riemann". Se puede establecer el espacio euclidiano (localmente, porque en Riemann todo es por pedazos), como un caso particular de un espacio de Riemann.

La teoría de geometrías de más de 3 dimensiones había sido desarrollada por el matemático alemán Hermann Grassmann en una obra de 1844: Ausdehnungslehre. Sus trabajos abrieron el camino al análisis vectorial para espacios afines y métricos. También Cayley había usado el concepto de espacio de n dimensiones, y Plücker también hizo contribuciones. Tomaría más tiempo, sin embargo, para que se le diera plena importancia a este tipo de espacios en la comunidad de matemáticos.

Para Riemann el espacio físico era un caso específico de una variedad diferencial. Por lo tanto, la geometría del espacio no podría ser deducida del conjunto de propiedades generales de las variedades. ¿Cómo obtener entonces las propiedades que distinguen el espacio físico de otras variedades de tres dimensiones? Respuesta: por medio de la experiencia. Es la experiencia la que debe decidir si las propiedades específicas que sintetiza la geometría euclidiana corresponden a la realidad o no. Las implicaciones filosóficas y científicas son aquí muchas. Por ejemplo, los axiomas de la geometría euclidiana podrían corresponder o no con el mundo circundante. Pero, ¿quién lo debe determinar? No la geometría, sino la física.

¿Más consecuencias? Sin duda. Aquí se introducía una visión del espacio radicalmente diferente de la que incluso hoy en día nos resulta normal. Vamos a usar un listado de propiedades del espacio físico dadas por el matemático inglés William K. Clifford para contribuir a entender aun más lo que suponía esta aproximación en la geometría:

"Riemann ha demostrado que existen diferentes clases de líneas y superficies, de la misma manera que existen diferentes clases de espacios de tres dimensiones y que sólo podemos averiguar por la experiencia a cuál de estas clases pertenece el espacio en que vivimos. En particular, los axiomas de la geometría plana son ciertos dentro de los límites de experimentación en la superficie de una hoja de papel y, sin embargo, sabemos que la hoja está realmente cubierta de un cierto número de lomas y surcos, sobre los que (al no ser cero la curvatura total) estos axiomas no son ciertos. De manera análoga, dice que aunque los axiomas de la geometría del sólido son ciertos dentro de los límites de experimentación para porciones finitas de nuestro espacio, todavía no tenemos motivo para concluir que son ciertos para porciones muy pequeñas; y si por ello puede obtenerse alguna explicación de los fenómenos físicos, tendremos razones para concluir que ellos no son ciertos para regiones muy pequeñas del espacio.

Deseo indicar aquí un método por el cual estas especulaciones pueden aplicarse a la investigación de los fenómenos físicos. Mantengo, en efecto:

(1) Que, de hecho, las porciones pequeñas del espacio son de naturaleza análoga a las pequeñas colinas de una superficie que en promedio es plana; es decir, que las leyes ordinarias de la geometría no son válidas en ellas.

(2) Que esta propiedad de curvatura o torsión está pasando continuamente de una porción a otra del espacio en forma de onda.

(3) Que esta variación de la curvatura del espacio es lo que realmente sucede en los fenómenos que llamamos movimiento de materia, ya sean ponderables o etéreos.

(4) Que en el mundo físico no sucede otra cosa que esta variación, sujeta (posiblemente) a la ley de continuidad. Estoy intentando un método general para explicar las leyes de doble refracción a partir de estas hipótesis, pero no he llegado a ningún resultado suficientemente decisivo para

comunicarlo. [Clifford, William Kingdon: "Teoría de la materia en el espacio", p. 159]

En este espacio la curvatura varía de lugar en lugar y, además, debido al movimiento de la materia, la curvatura cambia también de tiempo en tiempo.

¿Conclusión? Hay variación debida al espacio y al tiempo. Entonces: es imposible que las leyes de la geometría euclidiana se puedan aplicar en un espacio de este tipo. Una asociación entre espacio y materia, como ésta que se encuentra en las conclusiones de Clifford y Riemann, empujó en la dirección de la teoría de la relatividad.

Otro de los conceptos relevantes usado por Riemann en 1854 fue el de curvatura de una variedad, mediante el cual trató de caracterizar el espacio euclidiano y los espacios en los cuales las figuras pueden ser movidas sin que cambien en forma y magnitud. Se trataba de un concepto que era una generalización de otro similar usado por Gauss para las superficies.

Después de Riemann fueron las geometrías no euclidianas de curvatura constante las que más interés generaron. El mismo Riemann había sugerido en 1854 que un espacio de curvatura constante positiva en dos dimensiones se podía realizar en la superficie de una esfera, en la cual las geodésicas se tomaran como las rectas. Riemann nos plantea esto de la siguiente manera:

"La consideración de las superficies con medida de curvatura constante puede servir para una ilustración geométrica. Es fácil ver que las superficies cuya medida de curvatura es constante siempre puede arrollarse alrededor de una esfera cuyo radio sea igual a 1 dividido por la raíz de la medida de curvatura; pero, para abarcar toda la variedad de estas superficies, demos a una de ellas la forma de una esfera y a las restantes la configuración de superficies de revolución que la tocan en el ecuador. Las superficies con media de curvatura mayor que esa esfera la tocarán entonces desde adentro y tomarán una forma similar a la parte de la superficie de un anillo apartada del eje; se podrían arrollar a zonas de esferas con radio menor, aunque rodeándolas más de una vez. Las superficies con medidas de curvatura positivas menores se obtendrán si de superficies esféricas con radio mayor se recorta una porción limitada por dos semicírculos máximos y se unen las líneas de corte. La superficie con medida de curvatura nula será la superficie cilíndrica sobre el ecuador; pero las superficies con medida de curvatura negativa tocarán este cilindro desde fuera, y tendrán la forma de la parte de la superficie de un anillo vuelta hacia el eje. Si se piensan estas superficies como lugares de fragmentos de superficie que se mueven en ellas, igual que consideramos el espacio como lugar de cuerpos, entonces en todas estas superficies los fragmentos de superficie se pueden mover sin estirarse. Las superficies con medida de curvatura positiva siempre se pueden configurar de tal manera que los fragmentos de superficie también puedan moverse sin curvarse, a saber como superficies esféricas, pero las que la tienen negativa no. Fuera de esta independencia de los fragmentos de superficie respecto a la posición, también encontramos en la superficie con medida de curvatura nula una independencia de la dirección respecto a la posición, que no se presenta en las demás superficies." [Bernhard Riemann: "Sobre la hipótesis en que se funda la geometría" (1 854), en [Consejo Superior de Investigaciones Científicas: Bernhard Riemann, Riemanniana selecta, Madrid: CSIC, 2 000, p. 13]]

Veamos, además, cómo nos explica esto el gran Poincaré:

"He aquí cómo lo ha logrado. Consideremos una figura sobre una superficie cualquiera. Imaginemos que dicha figura está trazada sobre una tela flexible pero inextensible aplicada sobre la superficie, de tal manera que cuando la tela se desplace y se deforme, las diversas líneas de la figura puedan cambiar de forma, sin variar de longitud. En general, esa figura flexible pero inextensible no podrá desplazarse sin abandonar la superficie; pero hay ciertas superficies particulares para las cuales un movimiento semejante sería posible: son las superficies de curvatura constante." [Poincaré, Henri: Filosofía de la ciencia, p. 177]

Y añade:

"Esas superficies de curvatura constante son de dos clases:

Unas son de curvatura positiva, y pueden ser deformadas de manera que puedan ser aplicables sobre una esfera. La geometría de dichas superficies se reduce entonces a la geometría esférica, que es la de Riemann.

Las otras, son de curvatura negativa. Beltrami ha hecho ver que la geometría de estas superficies no es otra que la de Lobachevski. Las geometrías de dos dimensiones de Riemann y de Lobachevski se encuentran así, vinculadas a la geometría euclidiana." [Poincaré, Henri: Filosofía de la ciencia, p. 177 y 178]

Detengámonos un poco más. La ruta más corta entre dos puntos en el plano euclidiano es el segmento de una recta. Una recta es un ejemplo de geodésica. Pero en la esfera la ruta más corta entre dos puntos es un arco de un círculo grande; el círculo grande es la geodésica. Una geometría así se llama doble elíptica o, a veces, elíptica.

Un detalle por comentar, la relación entre la investigación teórica y la aplicada:

"En geometría el intercambio constante entre la matemática pura y la aplicada continuó durante todo el siglo XIX. Por ejemplo, la cartografía y la geodesia se pueden asignar a cualquiera de las dos ramas; también sus resultados en geometría diferencial son matemáticas puras o aplicadas según que se tenga más interés en la geometría misma o en la interpretación que le dé la cosmología y las ciencias físicas. Pero lo de menos es la etiqueta con que se designa algún proceso particular; lo que interesa es el intercambio continuo entre la geometría creada con fines prácticos y científicos y la que se desarrolló de una manera pura." [Bell, E.T.: Historia de las matemáticas, pp. 433-434]

Finalmente, la apreciación de de Lorenzo:

"Lo que puede destacarse, aquí, de la creación de la Geometría diferencial es, por un lado, y como ya he indicado anteriormente, que la misma supone una inversión del Cálculo diferencial supeditado, ahora, en su propio desarrollo y sobre todo en el terreno de las ecuaciones diferenciales, a las previas concepciones geométricas a las que ha de servir. Por otro lado, y aunque se conserve como objetivo central del estudio geométrico la figura y no el espacio en el cual se encuentra sumergida, la simple posibilidad de establecer y estudiar las propiedades intrínsecas obliga a plantearse desde una perspectiva nueva el papel de ese espacio, obliga a cuestionar las propiedades del mismo y, con ello, obliga a un cambio de perspectiva en cuanto a la naturaleza en sí de dicho espacio.(...)

Constituye, de esta forma, la Geometría diferencial un elemento revolucionario para la concepción del espacio, más aún que las restantes geometrías, dado que éstas mantenían la imagen de un espacio real intocable en el cual se encontraban las figuras, cuyas propiedades 'reales' tenía que develar el matemático bien con unos métodos sintéticos puros, bien con unos medios de coordenadas no intrínsecas. Aspecto revolucionario en cuanto a la ideología -y que no he visto suficientemente destacado, por darse preferencia a las discusiones 'filosóficas' provocadas por las geometrías noeuclídeas, de repercusión inferior en el interior de la práctica teórica matemática-, no ya en cuanto al contenido o plano interior, en el cual se convierte en otra 'disciplina' más de dicho hacer, prácticamente independiente de las restantes, aunque en su origen se haya centrado en los mismos motivos y métodos que los demás marcos que aparecen tras la ruptura de los entornos de 1827: invertir y hallar la razón. [de Lorenzo, J.: La matemática y el problema de su historia, p. 55]

21.4 El "Programa de Erlanger"

El matemático alemán Felix Klein (1849 - 1925) llamó hiperbólica a la geometría de Gauss, Lobachevsky y Bolyai. Klein hizo ver que la geometría hiperbólica y la doble elíptica podían englobarse dentro de la geometría proyectiva. En ese tiempo se demostró además que la euclidiana era un caso de la proyectiva.



Akenaton.

Klein demostraría que la métrica proyectiva de Cayley coincidía con la métrica del espacio de curvatura constante negativa. La métrica de Cayley era el logaritmo de la relación anarmónica de dos puntos con la absoluta (proyectiva). Usando esto, Klein logra demostrar que la geometría hiperbólica refiere a la geometría de los subgrupos de las transformaciones proyectivas a través de las cuales la absoluta se transforma en sí misma. Es decir:

"Trece años después de que Cayley redujera las propiedades métricas a las proyectivas por medio de su absoluto, Klein (1871) se dio cuenta de que las definiciones proyectivas de distancia y de ángulo constituían una unificación simple de la geometría euclidiana y de las geometrías clásicas no euclidianas. Klein demostró que esas geometrías no se diferencian en esencia más que en sus respectivas funciones distancia. En la definición de Cayley se pueden elegir la constante k y la

cónica fijada como absoluto, de tal manera que las respectivas geometrías clásicas de Lobachewsky y Bolyai, Riemann y Euclides están completamente determinadas según que el absoluto sea real, imaginario, o degenerado." [Bell, E.T.: Historia de las matemáticas, p. 365]

Este tipo de reducción era parte de la clasificación general que realizó Klein: el "Programa de Erlanger". La idea básica refiere a la utilización de la teoría de grupos. La geometría se puede ver como el estudio de movimientos en el espacio. Un movimiento es una transformación. En ese sentido se puede hablar de operaciones entre movimientos, inversa de movimientos, movimiento neutro, etc.

Para Bell se trataba de lo siguiente:

"El segundo gran dominio que se aprovechó más o menos indirectamente de la obra de los algebristas, fue la geometría. Apenas cabe lugar a dudas de que la rehabilitación de la geometría proyectiva analítica que hicieron Cayley, Möbius, Plücker, Clebsch, Hesse (alemán, 1811 - 1874) y otros muchos como resultado parcial de la obra que se hizo sobre los invariantes algebraicos, fue el factor que determinó la síntesis de Klein de 1872. Los algebristas y los que se dedicaban a la geometría proyectiva no percibieron el núcleo del asunto. Klein [Nota de Bell: aquí hay una posible disputa de prioridad; Lie tiene muchos derechos] lo vio al reconocer que ciertas manifestaciones de la invariancia van acompañadas por un grupo adecuado: las operaciones del grupo en cuestión no cambian los invariantes correspondientes; recíprocamente todas las operaciones que no hacen cambiar a ciertos objetos forman un grupo. (Lo anterior no es más que una descripción muy a grandes rasgos, sujeta a limitaciones y a excepciones). [Nota de Bell: necesitado históricamente por nociones imprecisas, en los primeros tiempos de 'grupo', tal como se suele definir ahora técnicamente. La obra, que se hizo en los primeros tiempos, necesita por este motivo ser refundida en parte]. Aquí tenemos, por fin, una perspectiva amplia sobre la masa de teorías especiales que hacia 1870 integraban la geometría cuando los grupos de transformación de Lie proporcionaron los medios para unificarla toda según el programa de Klein." [Bell, E.T.: Historia de las matemáticas, p. 445]

Klein notó, en efecto, que los movimientos considerados en la geometría forman grupos, aunque los movimientos son diferentes si se trata de una geometría hiperbólica o de una euclidiana. Y aquí entra toda la potencia del álgebra.

Ahora bien, hay propiedades de los objetos espaciales que son invariantes respecto a algunos movimientos o transformaciones. Se puede considerar un grupo de transformaciones y analizar cuáles son los objetos que permanecen invariantes ante ellas. Resulta entonces, por ejemplo, que al estudiar los invariantes de la traslación se encuentra la geometría euclidiana. Aquí las longitudes y áreas son invariantes.

Se obtiene la geometría afín cuando consideramos los invariantes de las transformaciones afines:

$$x_1 = a_1x + b_1y + c_1$$

$$y_1 = a_2x + b_2y + c_2$$

siempre que el determinante $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ sea distinto de 0.

Note que basta con que se pida que ese determinante sea igual a 1, para obtener la geometría euclidiana. Es decir, la euclidiana es un caso particular de la afín.

En el caso de la geometría afín las longitudes y las áreas no son invariantes, aunque las cónicas sí se transforman en cónicas. El nombre de afín viene de que a cada punto finito toda transformación afín le hace corresponder otro punto finito.

La geometría proyectiva sale de considerar los invariantes de las transformaciones lineales fraccionarias del tipo

$$x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{dx + ey + f} \text{ y } y' = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{dx + ey + f}$$

La geometría afín y por lo tanto la euclidiana también son casos particulares de la proyectiva. Pero hay mucho más: la geometría hiperbólica cae dentro de una parte de la proyectiva, la que estudia los invariantes de las transformaciones proyectivas que transforman en sí mismos los puntos de cierta circunferencia. Aquí también se clasifican las transformaciones continuas, asunto que refiere a la topología.

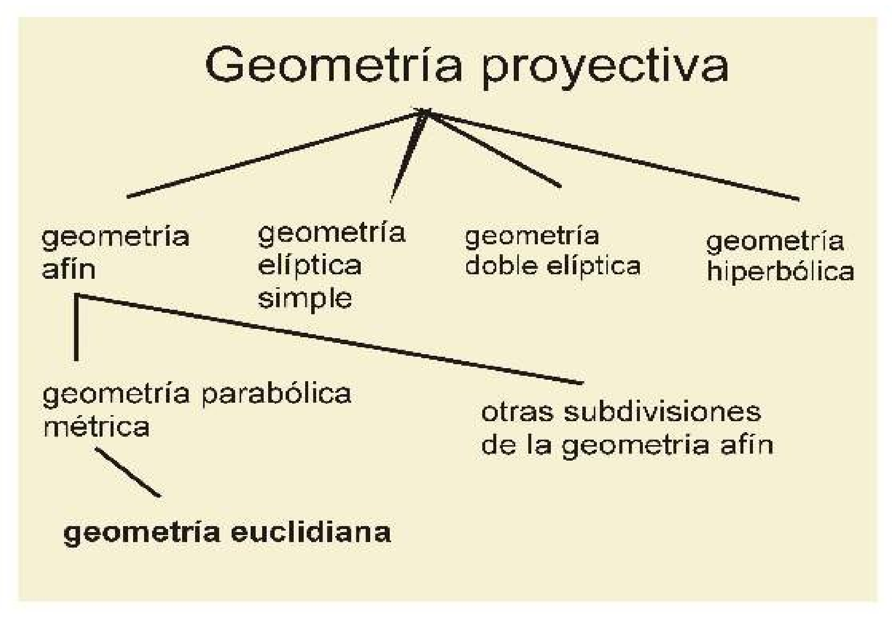
De Lorenzo, resume estos trabajos:

"Es una inversión radical, que hace variar la perspectiva, el enfoque del objeto geométrico. Desde esta ruptura se pueden tomar los grupos de transformaciones en toda su generalidad; cada uno de ellos determinará su geometría correspondiente. Las geometrías quedan así clasificadas y estructuradas precisamente por el grupo que las caracteriza. Esto conlleva la posibilidad de construir las geometrías que cada matemático prefiera, siempre que consiga dar un grupo adecuado. La libertad creadora de geometrías -problema nuevo- dependerá, entonces, de la existencia de los distintos grupos de transformación que puedan establecerse y, posteriormente, cabe 'adaptarle convenientemente nuestras concepciones geométricas'. Libertad no sólo de geometrías, sino de espacios en los cuales tengan sentido las mismas.

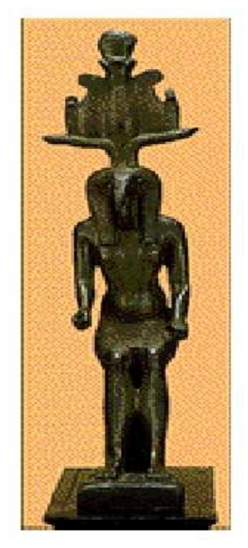
Los trabajos de Sophus Lie, de Klein, se orientan en esta línea. A partir de los grupos de transformación pueden estudiarse no sólo los elementos geométricos, que ahora se muestran como desligados totalmente de la propia representación sensible, figurativa, no siendo más que 'puntos' en una multiplicidad abstracta, sino otros elementos como los puramente algebraicos o del análisis, como pone de relieve Lie en las transformaciones infinitesimales y en las ecuaciones diferenciales, Klein en las funciones modulares elípticas o Poincaré creando a partir de 1875 el grupo de las funciones meromorfas y automorfas con apoyatura intuitiva en la geometría hiperbólica de Lobatchevski. El grupo constituye la estructura base que, convenientemente traducido, permitirá enunciar propiedades geométricas, o analíticas... Ha desaparecido, con ello, la noción de geometría como estudio de los objetos de el espacio. Ahora, el objeto de estudio es este mismo espacio, esa

multiplicidad abstracta de objetos no previamente dados o determinados, con sus transformaciones correspondientes.

Lo que interesa destacar en la ruptura de Klein, básicamente, es el hecho de haber marcado la limitación de las geometrías tanto en el sentido querido por Poncelet, como en el de coordenadas; haber invertido la noción de espacio pasando a manejar las multiplicidades cualesquiera en lugar del espacio sensible que había sido elevado a categoría de espacio geométrico absoluto y, fundamentalmente, haber puesto de relieve que el matemático maneja multiplicidades abstractas y transformaciones de las mismas. [de Lorenzo, J.: La matemática y el problema de su historia, p. 67, 68]



Clasificación de Klein.



Thoth , diosa de la Luna en Egipto.

Con una influencia directa de los alemanes Klein o Clebsch, o el inglés Cayley, los matemáticos italianos se interesaron en la teoría de invariantes algebraicos (Francesco Brioschi), en la estática gráfica (Luigi Cremona), y en la geometría (Eugenio Beltrami, discípulo de Brioschi).

En 1918, Veblen resume el concepto de geometría así:

"Se define una geometría como un sistema de definiciones y de teoremas invariantes bajo un grupo dado de transformaciones... A propósito de toda relación geométrica hay que tener en cuenta dos grupos de transformaciones: un grupo por medio del cual poder definir la relación; un grupo bajo el cual la relación es invariante. Cuanto más restringido sea el grupo habrá más figuras distintas con respecto a él y más teoremas aparecerán en la geometría. El caso extremo es el grupo correspondiente a la identidad (la transformación que deja todo invariante), cuya geometría es demasiado extensa para que tenga importancia alguna". [O. Veblen, en Veblen y J. W. Young, Projective geometry, Boston, 1918, Tomo 2, cap. 3]. Citado en [Bell, E.T.: Historia de las matemáticas, p. 457-458].

Y en 1928 el mismo Veblen concluye:

"El punto de vista de Klein fue el dominante durante el primer medio siglo después de que fuera enunciado... Fue una orientación muy útil para el estudio y la investigación. Los geómetras opinaban que era una formulación general correcta de lo que trataban de hacer, ya que todos tenían del espacio la idea de que es un lugar en el que las figuras se mueven y pueden ser comparadas unas con otras (como ya se indicó implícitamente con anterioridad a propósito de la revisión de Lie de la geometría cinemática de Helmholtz). La naturaleza de esa movilidad era lo que distinguía unas geometrías de otras.

Con el advenimiento de la Relatividad nos dimos cuenta de que no se necesitaba considerar el espacio tan solo como 'un lugar en el cual', sino que puede tener una estructura, una teoría de los campos propia. Esto atrajo la atención precisamente sobre las geometrías riemannianas, de las que el Erlanger Programm no decía nada, es decir, aquellas cuyo grupo es la identidad. En esos espacios en esencia no hay más que una figura que es la estructura del espacio como un todo. Quedó perfectamente claro que en algunos aspectos el punto de vista de Riemann (1854) era más fundamental que el de Klein." [O. Veblen y J. H. C. Whitehead, Foundations of differential geometry, Cambridge, 1932, O. Veblen, Atti del congresso internat dei matematici, Bolonia, 1928, 1981]. Citado en [Bell, E.T.: Historia de las matemáticas, p. 457-458].

Todo este proceso se inscribía en una potenciación del carácter abstracto de las matemáticas. Como Bell añade:

"Hilbert convenció a los geómetras, valiéndose de un mínimo de simbolismo, y con más éxito que el alcanzado por Pasch y Peano, del carácter abstracto y puramente formal de la geometría, y con su gran autoridad estableció firmemente el método postulacional, no solo en la geometría del siglo XX, sino también en casi todas las matemáticas posteriores a 1900. Subrayamos una vez más que la manera abstracta de abordar las matemáticas no desterró por completo la intuición. Tampoco se puede decir que las aplicaciones del análisis postulacional sean sino una pequeña fracción de las matemáticas del siglo XX. Pero fueron un potente catalizador para las matemáticas, y atrajeron centenares de prolíficos trabajadores." [Bell, E.T.: Historia de las matemáticas, p. 347]

21.5 La topología

Se trata de una disciplina que integra geometría, álgebra y análisis de una manera especial, aunque sistemáticamente se considera una parte de la geometría. Sus orígenes están asociados a la obra de Euler, Cantor y Möbius. La palabra topología había sido utilizada en 1847 por J. B. Listings en un libro titulado Vorstudien zur Topologie. Este había sido un alumno de Gauss en el año 1834. Usaba el término topología para lo que prefería llamar "geometría de posición", sin embargo von Staudt usaba este último para la geometría proyectiva.

En la topología suele reconocerse dos ramas: la conjuntista y la algebraico combinatoria. La primera asociada a la teoría de conjuntos y la segunda que considera las figuras geométricas como agregados de bloques más pequeños.

Para algunos historiadores de las matemáticas, el punto decisivo fue dado por la publicación de Analisis Situs de Poincaré en 1895. Poincaré realizó importantes contribuciones en la topología combinatoria o algebraica. Podemos decir que ésta refiere a propiedades de los invariantes de transformaciones o funciones uno a uno (biunívocas o inyectivas) y además bicontinuas (la función y su inversa son continuas): los homeomorfimos. Courant y Robbins lo ponen así:

"Recordemos que la geometría elemental maneja las magnitudes (longitud, ángulo y área) que son invariantes por movimientos rígidos, mientras que la geometría proyectiva trata los conceptos (punto, línea, incidencia, razón simple) que son invariantes por el grupo, todavía más extenso, de las transformaciones proyectivas. Pero los movimientos rígidos y las proyecciones son casos muy particulares de las transformaciones topológicas: una transformación topológica de una figura A en otra figura A' está dada por cualquier correspondencia

$$P \leftrightarrow P'$$

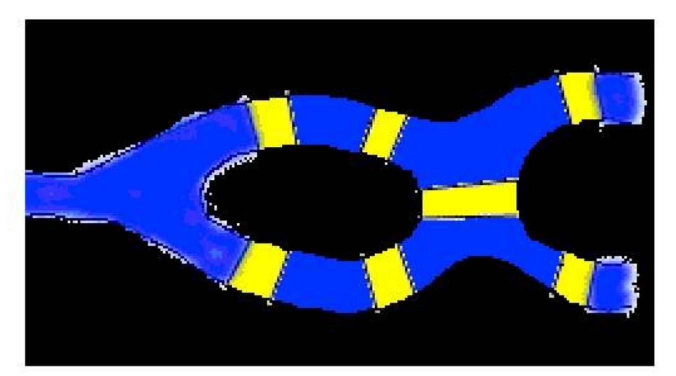
entre los puntos p de A y los puntos p' de A', que cumpla las dos propiedades siguientes:

1. La correspondencia es biunívoca. Esto significa que a cada punto p de A corresponde exactamente un punto p' de A', y recíprocamente.

2. La correspondencia es bicontinua. Esto significa que si tomamos dos puntos p y q cualesquiera de A, y movemos p de manera que su distancia a q tienda a cero, entonces la distancia entre los correspondientes puntos p' y q' de A' también tiende a cero, y recíprocamente.

Cualquier propiedad de una figura geométrica A, que se mantenga para todas las figuras en que se transforma A mediante una transformación topológica, se llama una propiedad topológica de A. Y la topología es la rama de la geometría que sólo estudia las propiedades topológicas de las figuras. Imaginen una figura copiada a 'mano alzada' por un dibujante consciente pero inexperto, que curvara las líneas rectas y alterara los ángulos, las distancias y las áreas; entonces aunque se habrían perdido las propiedades métricas y proyectivas de la figura primitiva, las propiedades topológicas quedarían iguales". [Courant, R. y Robbins, H.: "Topología" p. 177]

La topología trabaja esencialmente con los aspectos cualitativos. Sin embargo, el asunto sobre los inicios de la topología debe colocarse en una perspectiva histórica más amplia.



Puentes de Konigsberg.

Se puede rastrear el asunto hasta Leibniz que estudió la operación o transformación de algunas propiedades de figuras geométricas, asunto que llamó precisamente analisis situs o geometria situs.

Otra referencia tiene que ver con la relación que existe entre el número de vértices, bordes y caras de poliedros convexos cerrados. En un cubo, la relación es $V - B + C = 2$, lo que había sido publicado y demostrado por Euler en los años 1750 - 1751 (se supone sin embargo que esto era conocido por Leibniz y Descartes).

Un asunto de carácter topológico fue el problema del puente de Koenigsberg, para el que Euler encontró una solución en el año de 1735.

Listing trató de generalizar la relación $V - B + C = 2$.

Möbius, quien fuera asistente de Gauss, clasificó las propiedades geométricas de similaridad, afinidad y congruencia y propuso el estudio de las relaciones entre figuras con puntos que poseían relaciones biunívocas y donde existiera correspondencia también con los puntos cercanos. Fue en este contexto que Möbius descubrió las superficies con un solo lado, entre las cuales la más famosa es precisamente la llamada "cinta de Möbius". Debe decirse, no obstante, que Listing también las había concebido.

El problema de los 4 colores también debe mencionarse. Se trataba de mostrar que 4 colores son suficientes para colorear todos los mapas de los países siempre y cuando los países que tuvieran un arco como frontera común fueran coloreados con un color diferente. Se trataba de una problema-conjetura formulada por un profesor casi desconocido de matemáticas: Francis Guthrie. El primer intento de probar la conjetura, aunque fallido, se dice que fue dado por Cayley. Courant y Robbins lo consignan:

"Al colorear un mapa geográfico, se suele dar colores distintos a dos países que tengan parte de sus límites en común. Se ha encontrado empíricamente que cualquier mapa, independientemente de cuántos países tenga y de cómo estén situados, puede colorearse usando solamente cuatro colores distintos. Es fácil ver que un número menor de colores no bastaría para todos los casos. La figura 11 muestra una isla en el mar, que ciertamente no puede ser coloreada de manera apropiada con menos de cuatro colores, ya que contiene cuatro países, cada uno de los cuales limita con los otros

tres.

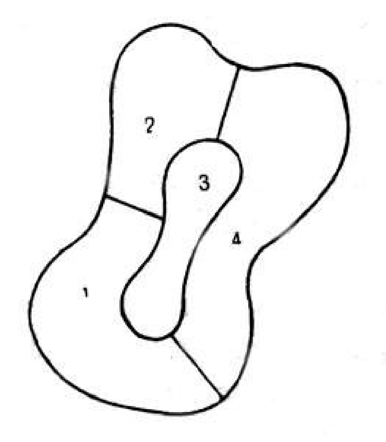


FIGURA 11. — Sistema de coloración de un mapa.

El hecho de que todavía no se haya encontrado ningún mapa que requiera más de cuatro colores para colorearlo, sugiere el siguiente teorema matemático: Para cualquier división del plano en regiones no superpuestas, siempre es posible marcar las regiones con uno de los números 1, 2, 3, 4, de tal manera que las regiones adyacentes no reciban el mismo número. Por regiones 'adyacentes' entendemos aquellas que tienen un segmento de límite en común; dos regiones que se encuentren en un solo punto o en un número finito de puntos (como los estados de Colorado y Arizona) no se llamarán adyacentes, ya que no se presenta ninguna confusión si se colorean del mismo color". [Courant, R. y Robbins, H.: "Topología" p. 183]

Con Riemann la investigación en topología adquiere una nueva fisonomía, pues sin duda la geometría diferencial posee un gran sentido topológico. En el año 1851, el mismo Riemann subrayó la necesidad de resultados topológicos para el estudio de las funciones de variable compleja. De hecho, introdujo el concepto de conectividad de una "superficie de Riemann", una noción que le sirvió para clasificar superficies, y que era una propiedad topológica.

Klein también estudió superficies topológicas, y, precisamente, se le debe la creación de la famosa "botella de Klein": una superficie que no posee borde, ni tampoco interior o exterior, y posee un solo lado.

Una generalización del concepto de conectividad fue aportado por el italiano Enrico Betti, de la Universidad de Pisa, que redefinió lo que se llama números de conectividad para cada dimensión.

La teoría más general de la topología combinatoria fue desarrollada por Poincaré, quien también había ofrecido una teoría de ecuaciones diferenciales cualitativas, que trata precisamente de la forma de integrales curvas y el carácter de los puntos singulares. Poincaré realizó una generalización de las superficies de Riemann por medio de las variedades diferenciales para así estudiar la geometría de las figuras n-dimensionales. El teorema de la dualidad, los números de Betti, coeficientes de torsión, "grupo de Poincaré", grupo de homotopía, son todos asuntos que se incluyen en estos trabajos.

En "Analysis situs" hizo primeramente un listado de todos los diferentes tipos de variedades diferenciales y las ecuaciones algebraicas que las describen (algunas ya conocidas, otras nuevas).

Posteriormente, en otros artículos acude a un procedimiento geométrico, donde se concentra en sólidos como el cubo y el tetraedro, y ofrece un método más simple para contar el número de características topológicas de cada sólido. Poincaré trató de extender la famosa formula de Euler a n dimensiones. Las variedades se convierten en la topología algebraica y combinatoria: el estudio de fórmulas algebraicas o diferenciales que describen la estructura de superficies no usuales. En lugar de clasificar todos los espacios topológicos posibles, se trata de limitarse a estructuras que se encuentran en el álgebra abstracta.

La topología conjuntista fue desarrollada en sus inicios por Maurice Fréchet (1878 - 1973), 1906, quien empujó hacia el estudio de espacios más abstractos. Un espacio se considera un conjunto de puntos vinculados por una propiedad común. Estas nociones fueron motivadas por el progreso de la teoría de conjuntos de Cantor y del análisis funcional (en particular dentro del cálculo de variaciones). Este último analiza las funciones como puntos de un espacio. Fréchet estableció diferentes conceptos que podían servir como el nexo para establecer un espacio. Por ejemplo, ofreció una generalización del concepto de distancia en el espacio euclidiano para definir los espacios métricos. En un espacio métrico se considera el vecindario de un punto x_0 como todos aquellos puntos que están a una distancia establecida del punto x_0. En tres dimensiones se trataría de bolas o esferas con un radio determinado.

Otro de los grandes topólogos fue el holandés L. E. J. Brouwer, a quien vamos a estudiar con mayor detalle dentro de la filosofía de las matemáticas, que realizó contribuciones en la topología conjuntista y la algebraica. Partió de una perspectiva diferente: enfatizó las transformaciones biunívocas más que la invariancia de la dimensión. Completó y generalizó los trabajos de Poincaré. Estableció la topología de los conjuntos de puntos, que refiere a propiedades de los números reales, y también hizo contribuciones a la teoría de la dimensión (que estudia el número de coordenadas que se requiere para describir un objeto matemático básico).

Tiempo después, Felix Hausdorff creó una teoría de espacios abstractos usando la noción de vecindario (Grundzüge der Mengenlehre, 1914). Un espacio topológico se define como un conjunto de puntos junto con una familia de vecindarios asociados a ellos. Aquí hay varias nociones que se establecen: espacio compacto, conexo, separable. También es aquí donde entra la idea de homeomorfismo. Una vez establecido esto, se formula la topología conjuntista como aquélla que estudia las propiedades de invariantes bajo homeomorfismos. Hausdorff también dio la noción de completitud, que el mismo Fréchet había usado en 1 906. Usó la noción de conectividad, planteada antes por otros matemáticos (aunque él no lo sabía), para considerar conjuntos conexos como ideas topológicas.

Hausdorff formalizó la topología conjuntista mediante una nueva concepción de geometría en la cual un espacio tiene una estructura que consiste en relaciones que pueden definirse en términos de un grupo de transformaciones. Con el trabajo de Hausdorff se afirmó la topología conjuntista como una disciplina propia dentro de las matemáticas.

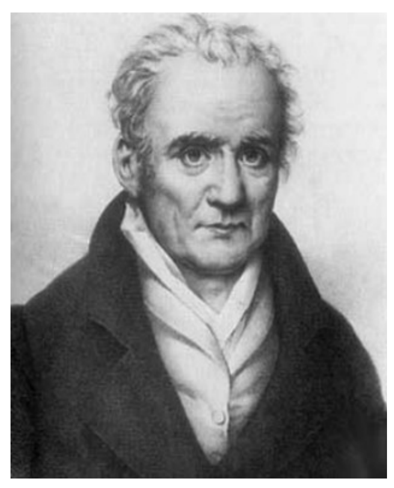
Volvemos a la topología algebraica. Se suele afirmar que fue Oswald Veblen quien, como Hausdorff con la conjuntista, hizo de la topología combinatoria un campo independiente de las matemáticas. En el año 1905 Veblen probó el teorema de la curva de Jordan, que afirma que una curva cerrada simple en un plano (un círculo, por ejemplo), divide ese plano en 2 regiones: una adentro y otra afuera de la curva. Veblen también usó la fórmula de Euler, el problema de los cuatro colores y otros asuntos topológicos clásicos para obtener importantes resultados en topología. A lo largo de su obra Veblen quería hacer que la geometría sirviera como un modelo para el mundo real.

Alumno y colega de Veblen en la Universidad de Princeton, James W. Alexander ampliaría muchos trabajos en la topología combinatoria, como las pruebas de Brouwer en la topología algebraica y combinatoria; además, mostró que la invariancia de las propiedades combinatorias podía aplicarse a objetos topológicos especiales, los números de Betti, y a los coeficientes de torsión. En 1928 encontró un método directo para encontrar una fórmula para describir los "nudos".

Alexander fue importante en la búsqueda de convergencias entre los dos tipos de topologías. Por ejemplo, observó las relaciones entre la topología combinatoria y el analysis situs rectilíneo (es decir, geometría de figuras de un número finito de pedazos planos).

En el siglo XX, la topología se afirmó como una nueva disciplina con toda propiedad dentro de las matemáticas, al igual que la geometría, el álgebra, o el análisis, y participó de un espíritu de convergencia que ha caracterizado buena parte de las matemáticas modernas; se trata de la utilización de métodos de una disciplina en las otras, potenciando constantemente nuevas ramas de un árbol cada vez más complejo y diversificado.

21.6 Biografías



Gaspard Monge

Gaspard Monge nació el 9 de mayo de 1 746 en Beaune, Bourgogne, Francia. Es conocido también como el Conde de Péluse. Sus padres fueron Jacques Monge y Jeanne Rousseaux. Asistió al Colegio Oratarian en Beaune que era dirigido por sacerdotes. En 1 762, se trasladó a Lyón donde estudió en el College de la Trinité y tan sólo un año más tarde inició a impartir lecciones de física.

En 1 764, regresó a Beaune. En 1 765, comenzó a trabajar en el École Royale du Génie como dibujante y cinco años después, recibió un puesto adicional en el École como profesor en físicas experimentales. Quería recibir consejos de los principales matemáticos, así que en 1 771, se acercó a d'Alembert y Condorcet.

En 1 777, se casó con Catherine Huart quien tenía una forja, entonces, se interesó en la metalurgia. A partir de 1 780, pasa largos periodos en París impartiendo cursos de hidrodinámicos y participando en varios proyectos en matemática, física y química.

Durante la Revolución Francesa, Monge fue asignado como el Ministro de la Marina en el Gobierno, pero sólo duró ocho meses en el puesto porque renunció en 1 793. Así que, volvió a su trabajo en la Academia de Ciencias, pero en agosto del mismo año, la academia fue abolida por la Convención Nacional. En 1 797, se convirtió en el nuevo director del École Polythechnique. Entabló amistad con Napoleón Bonaparte y lo acompañó en su expedición a Egipto en 1 798; regresó un año más tarde a reincorporarse al École Polythechnique. En 1 809, dejó la enseñanza porque su salud se quebrantó.

Murió el 28 de julio de 1 818 en Paris, Francia.



Nikolai Ivanovich Lobachevsky

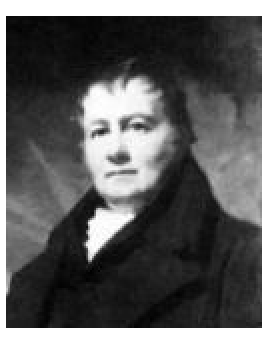
Nikolai Lobachevsky nació el 1° de diciembre de 1 792 en Nizhny Novgorod, Rusia. Su padre murió cuando él tenía siete años y, en 1 800, su madre se llevó a sus tres hijos a vivir a la ciudad de Kazan, cerca de Siberia. Eran muy pobres y gozaban de becas gubernamentales. Asistió al Gymnasium de Kazan y cuando Nikolai se graduó, entró a la Universidad de Kazan a estudiar matemáticas y física. Recibió una maestría en 1 811, tres años después obtuvo una cátedra y para 1 822 se convirtió en profesor. Nikolai fue el deán de los departamentos d e matemáticas y física entre 1 820 y 1 825. También, se encargó de la biblioteca y del observatorio. En 1 827, lo nombraron rector de la Universidad de Kazan por diecinueve años, y durante este largo periodo la universidad creció positivamente, se construyeron nuevas instalaciones y laboratorios. Además, impulsó la investigación científica y mejoró las normas de educación.

En 1 832, se casó con Varvara Alexivna Moisieva, una joven que procedía de una familia adinerada y tuvieron siete hijos.

En 1 846, fue despedido de la Universidad de Kazan, y pronto, a raíz de la muerte de su hijo mayor,

su salud se deterioraría y lo llevaría hasta la ceguera.

Murió el 24 de febrero de 1 856 en Kazan, Rusia, sin tener la mínima idea de lo importante que era su trabajo para el mundo matemático.



John Playfair

John Playfair nació el 10 de marzo de 1 748 en Benvie, Escocia. Su padre fue James Playfair, ministro de Benvie, quien lo educó en la casa hasta la edad de catorce años, cuando ingresó a la Universidad Saint Andrews con el propósito de estudiar teología. Su aprendizaje iba a tal velocidad, que su profesor de filosofía natural, Wilkie lo escogió para que continuara sus clases.

En 1 765, se graduó con una maestría. En 1 769, terminó sus estudios en teología y se trasladó en 1 773 a Edinburg, en donde siguió su vocación de ministro y fue autorizado a predicar en 1 770. Después de la muerte de su padre, lo eligieron como el ministro de la Parroquia de Liff, y se mudó allí para supervisar la educación de sus hermanos y hermanas.

En 1 779, se publicó su primer estudio presentado a la Sociedad Real de Londres. En 1 783, en Edinburg, participó en el establecimiento de la Sociedad Real y fue uno de los primeros miembros de ella. En 1 785, fue elegido como profesor de la Universidad de Edinburg y desempeñó este puesto durante veinte años.

En 1 793, su hermano murió repentinamente y un año después adoptó a su sobrino William Henri Playfair de seis años de edad.

Murió el 20 de julio de 1 819 en Burntisland, Fife, Escocia.



Magnus Gösta Mittag-Leffler

Magnus Mittag-Leffler nació el 16 de marzo de 1 846 en Estocolmo, Suecia. Ingresó al Gymnasium de Estocolmo, y pronto sus profesores descubrieron su habilidad para las matemáticas.

En 1 865, estudió en la Universidad Uppsala y en 1 872 empezó a impartir lecciones ahí.

En 1 873, partió a París en donde conoció a Bouquet, Briot, Chasles, Hermite, Darboux y Liouville. En 1 875, se dirigió a Berlín en donde asistió a conferencias de Weierstrass, las cuales influyeron su trabajo.

En 1 876, obtuvo un puesto en la Universidad de Helsinki y cinco años después volvió a Suecia, obtuvo el mismo puesto en la Universidad de Estocolmo e inició la publicación del periódico Acta Matemática, en donde sirvió como jefe de redacción por cuarenta y cinco años.

En 1 882, se casó con Signe af Lindfors, que provenía de una familia adinerada y que ayudó a financiar el periódico. Juntos vivieron en Finlandia. En 1 890 construyó una casa para su familia en Djursholm, en donde tuvo la biblioteca matemática más fina del mundo.

En 1 916, el matrimonio donó su casa en Estocolmo a la Academia de Ciencias. Fundó un instituto matemático que hoy en día es un gran centro de investigación matemática. Recibió muchos honores y fue miembro de la Sociedad Real de Londres en 1 896.

Murió el 7 de julio de 1 927 en Estocolmo, Suecia.



Benoit Mandelbrot

Benoit Mandelbrot nació el 20 de noviembre de 1 924 en Varsovia, Polonia. Su familia seguía ya una tradición académica. De niño, sus dos tíos lo introdujeron a las matemáticas. Su familia se mudó a Francia en 1 936; su tío Szolem Mandelbroit, profesor de matemáticas en el Colegio de Francia, se hizo cargó allí de su educación.

Estudió en el Liceo Rolin en París hasta el inicio de la Segunda Guerra Mundial. Recibir una educación no convencional durante la guerra, tuvo un gran efecto en él, lo que le permitió pensar de maneras que habrían sido difíciles de experimentar en un sistema de educación convencional. También, pudo estudiar las matemáticas desde una perspectiva geométrica, lo que le desarrolló una intuición y visión admirables que le permitieron enfocar los problemas matemáticos de una forma distinta.

En 1 944, fue admitido en la École Polytechnique, en donde estudió bajo la tutela de Paul Lévy, otra gran influencia para Mandelbrot. Al terminar sus estudios, se trasladó a los Estados Unidos donde visitó el Instituto de Tecnología de California y luego el Instituto para Estudios Avanzados en Princeton, ahí fue patrocinado por John von Neumann.

En 1 955, se casó con Ailette Kagan en Francia. Al regresar a los Estados Unidos, comenzó a trabajar para la compañía IBM, en donde obtuvo la libertad necesaria para emprender sus propios proyectos.

Mandelbrot ha sido en parte responsable por el interés actual en la geometría fractal. Fue capaz de desarrollar algunos de los primeros programas capaces de imprimir gráficos. Ha trabajado en distintos campos de la ciencia, como lo son las matemáticas, la ingeniería, la economía y la fisiología. Además, ha recibido varios reconocimientos por sus trabajos: en 1 985, la Medalla Barnard por Benemérito Servicio a la Ciencia; en 1 988, la Medalla Franklin; en 1987, el Premio Alexander von Humboldt, y en 1 988, la Medalla Steinmetz, entre algunos otros.



Marius Sophus Lie

Sophus Lie nació el 17 de diciembre de 1 842 en Nordfjordeide, Noruega. Su padre, Johann Herman Lie fue un ministro luterano. Asistió a la Escuela Moss, luego en 1 857, entró a la Escuela Privada Latina Nissen y finalmente se graduó en la Universidad de Christiania en 1 865. Aún no mostraba algún interés en las matemáticas a pesar de haber tenido profesores de calidad como Sylow, Broch y Bjerknes. Lie estaba confundido acerca de lo que deseaba estudiar.

En 1 866, empezó a leer varios trabajos matemáticos en la biblioteca de la universidad que lo hicieron decidirse a estudiar matemáticas. Fue hasta el año 1 868 en que Lie se inclinará hacia la geometría, después de leer los estudios de Plücker y Poncelet en esta rama.

En 1 869, escribió su primer estudio matemático y lo publicó él mismo, pero éste no fue bien aceptado debido a sus nociones revolucionarias. Durante ese mismo año, el Periódico de Crelle publicó su estudio y con él ganó una beca para viajar y reunirse con los principales matemáticos. Fue a Prusia, visitó Göttingen y después Berlín, donde conoció a Kronecker, Kummer, Weierstrass y Klein. En 1 870, Lie y Klein estuvieron juntos una vez más en Paris y conocieron a Darboux, Chasles y Jordan. La situación política entre Francia y Prusia se deterioraba, Lie partió a Fontainebleau pero fue arrestado al considerarlo un espía alemán. Darboux intervino y Lie fue liberado.

En 1 872, la Universidad de Christiania le ofreció un puesto que lo convirtió en un reconocido matemático. En 1 874, se casó con Anna Birch y tuvieron tres hijos.

Murió de anemia el 18 de febrero de 1 899 en Christiania, Noruega.



Maurice René Fréchet

Maurice René Fréchet nació el 2 de septiembre de 1 878 en Maligny, Yonne, Bourgogne, Francia. Fue un estudiante de Hadamard, y bajo su tutela escribió una disertación en 1 906 en donde introdujo el concepto de espacio métrico y formuló la noción abstracta de tamaño reducido.

La mayor parte de su vida la dedicó a la enseñanza. Fue profesor de mecánicas en la Universidad de Poitiers de 1 910 a 1 919 y profesor de cálculo en la Universidad de Strasbourg de 1 920 a 1 927. Después de esto sostuvo varias posiciones matemáticas en la Universidad de París de 1 928 a 1 948; su papel ahí fue impartiendo clases de diferencial, cálculo íntegro y cálculo de probabilidades.

Murió el 4 de junio de 1 973 en París, Francia.

Cesare Burali-Forti

Cesare Burali-Forti nació el 13 de agosto de 1 861 en Arezzo, Italia. Asistió a la Universidad de Pisa y se graduó en 1 884 a la edad de veintitrés años. Después de graduarse comenzó a dar clases en una escuela pero al poco tiempo se mudó a Turín en 1 887 donde se presentó en la Academia Militar. Ahí comenzó a dar clases de geometría analítica proyectiva y pasó el resto de su vida enseñando en la academia. Nunca pudo enseñar en una universidad debido a que era un fiel creyente de los métodos del vector y, en los tiempos en que vivió, estos métodos no eran bien vistos, así que nunca pudo obtener un doctorado.

Entre 1 893 y 1 894 dio una serie de conferencias de lógica en la Universidad de Turín, y a raíz de estas conferencias presentó un libro a la Academia de Ciencias de Turín en junio de 1 894. Al finalizar ese año, Burali-Forti obtuvo el puesto de asistente de Giuseppe Peano en la Universidad de Turín hasta 1 896.

En 1 897 se celebró el primer Congreso Internacional de Matemáticas en Zurich; Burali-Forti asistió y presentó Los Postulados de Geometría de Euclides y Lobachevsky a la sección de Geometría del Congreso.

Cesare Burali-Forti y Roberto Marcolongo, eran llamados por sus amigos el "binomio vectorial", pero este nombre acabó cuando difirieron en sus puntos de vista sobre la relatividad.

Murió el 21 de enero de 1 931 en Turín, Italia.



María Gaëtana Agnesi

María Gaëtana Agnesi nació el 16 de mayo de 1 718 en Milán, Imperio de Habsburgo, Italia. Su padre fue Pietro Agnesi, un hombre que perteneció a una familia adinerada. Su padre se casó tres veces y tuvo veintiún hijos, siendo María la mayor de todos sus hermanos. Desde muy joven, María mostró un increíble talento y una facilidad hacia los idiomas como el Latín, Griego y Hebreo. A la edad de nueve años publicó un discurso en Latín en defensa a la educación superior para las mujeres.

En 1 738, publicó sus primeros ensayos de filosofía y ciencias naturales; a pesar de que su deseo más ferviente era convertirse en una monja. Estudió numerosos libros religiosos e inició lecciones de matemáticas con el profesor Ramiro Rampinelli quien le influyó a escribir un libro acerca de cálculo diferencial que luego fue publicado en dos partes.

El Papa Benedicto XIV le escribió a María diciéndole que su trabajo iba a ser de gran importancia para Italia y la Academia de Bolonia, poco después le ofrecieron un puesto honorario en la Universidad de Bolonia. Después de la muerte de su padre en 1 752, María dedicó el resto de su vida a obras de caridad, invirtió todo su dinero en estos proyectos y murió en total pobreza el 9 de enero de 1 799 en Milán.



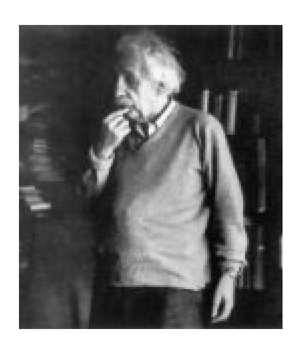
János Bolyai

János Bolyai nació el 15 de diciembre de 1 802 en Kolozsvár, Imperio Austriaco, ahora Cluj, Rumania. Su padre fue el matemático Farkas Bolilla, quien le enseñó a János a la edad de trece años sobre cálculo y otras formas de mecánica analítica. János fue un experto violinista e interpretó su música en Viena. Estudió en la Universidad de Ingeniería Real en Viena de 1 818 a 1 822. Después de sus estudios se unió al Cuerpo de Armada de Ingeniería y permaneció ahí durante once años.

Fue el mejor espadachín y bailarín en la Armada del Imperio Austriaco. Fue un experto lingüístico y habló nueve idiomas entre ellos Chino y Tibetano. En 1 833, se retiró de la armada debido a una

fiebre que lo incapacitaba de sus labores. A pesar de que sólo publicó un trabajo en matemáticas después de su muerte se encontraron más de veinte mil páginas de manuscritos que se encuentran en la biblioteca Bolyai-Teleki en Tirgu-Mures. En 1 945, se nombró en Cluj una universidad con su nombre que corresponde ahora a la Universidad Babes-Bolyai.

Murió el 27 de enero de 1 860 en Marosvásárhely, Imperio Austriaco, ahora Tirgu-Mures, Rumania.



Albert Einstein

Albert Einstein nació el 14 de marzo de 1 879 en Ulm, Württemberg, Alemania. En su juventud mostró un gran interés por la naturaleza y una increíble habilidad para entender difíciles conceptos matemáticos. A la edad de siete años inició sus estudios en Munich así como lecciones de violín, las cuales siguió hasta los trece años. Recibió una educación religiosa basada en el judaísmo. A partir de 1 891 inició sus estudios matemáticos inclinándose por el cálculo.

En 1 894 su familia se muda a Milán, pero Einstein decide quedarse en Munich. En 1 896 renunció a la ciudadanía alemana para pedir la suiza en 1 899. Einstein logró graduarse de profesor de matemáticas y física en 1 900. Luego trabajó en varias escuelas y en una oficina en Berna, Suiza, como técnico experto, entre 1 902 y 1 909. Durante este periodo completó una serie de asombrosas publicaciones sobre física teórica.

En 1 903 se casó con Mileva Mariç, quien había sido compañera de clase; tuvieron dos hijos; se divorciaron y él volvió a casarse tiempo después.

En 1 905, Albert Einstein aprobó su doctorado de física en la Universidad de Zurich. Recibió el Premio Nobel de Física en 1 921.

Einstein aceptó un puesto en Princeton, Estados Unidos, y decidió mudarse, debido a que los nazis ganaron el poder en Alemania.

Obtuvo la ciudadanía norteamericana en 1 940.

Murió el 18 de abril de 1 955 en Princeton, Nueva Jersey, Estados Unidos.

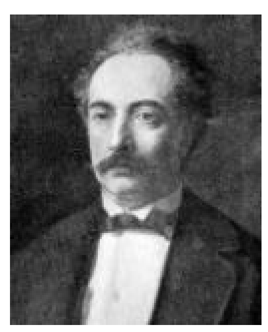


Abraham de Moivre

Abraham de Moivre nació el 26 de mayo de 1 667 en Vitry, Francia. Estudió por cinco años en la Academia Protestante en Sedan, y luego se trasladó a Saumur a estudiar lógica entre 1 682 y 1 684. Después, estudió en París, en el Colegio de Hancourt donde tuvo como profesor a Ozanam.

Por razones religiosas se vio forzado a emigrar a Inglaterra, en donde fue elegido Miembro de la Sociedad Real en 1 697. En 1 710, se le encargó revisar los alegatos de Newton y Leibniz al ser los descubridores del cálculo. Por ser amigo personal de Newton, tomó su lado.

Moivre fue pionero en el desarrollo de la geometría analítica y la teoría de probabilidad. Es conocido además, por haber predicho su propia muerte, pues notó que estaba durmiendo 15 minutos más cada noche y con esto, a través de la progresión aritmética, calculó que moriría el día que durmiera por 24 horas. Y así fue como murió el 27 de noviembre de 1 754 en Londres, Inglaterra.



Eugenio Beltrami

Eugenio Beltrami nació el 16 de noviembre de 1 835 en Cremona, Lombardía, Italia. Su padre llamado también Eugenio Beltrami, fue un artista, y descendía de una familia de tradición artística. Beltrami, hijo, heredó su talento y sería la música la que se volvería importante en su vida, junto a las matemáticas que aprendería después.

De 1 835 a 1 856, estudió en la Universidad de Pavía instruido por Brioschi. A pesar de su deseo de continuar con sus estudios, en 1 856, debido a problemas económicos dejó la universidad y consiguió un trabajo de secretario de un ingeniero de vía férrea; su trabajo lo llevaría a Verona y después a Milán. En 1 861, el Reino de Italia se había establecido, un año más tarde siguiendo sus estudios matemáticos en Milán, publicó su primer trabajo. Ese mismo año, fue asignado profesor de álgebra y geometría analítica en la Universidad de Bolonia.

En 1 864, le fue asignado el puesto de presidencia de la parte de geodesia en la Universidad de Pisa, estuvo en este puesto por dos años. En 1 866, regresó a Bolonia y trabajó como profesor de mecánica racional. En 1 873, formó parte de la nueva Universidad de Roma, en mecánica racional. Tres años después, regresó a Pavía a asumir el puesto en física. En 1 891, en Roma, se mantuvo enseñando sus últimos años. En 1 898, se convirtió en Presidente de la Academia de Lincei y un año después, fue senador del Reino de Italia. Sus trabajos fueron fuertemente influenciados por Cremona, Lobachevsky, Gauss y Riemman.

Murió el 18 de febrero de 1 900 en Roma, Italia.

Giovanni Girolamo Saccheri

Giovanni Saccheri nació el 5 de setiembre de 1 667 en San Remo, Génova, Italia.

En 1 685, ingresó a la Orden Jesuita en Génova y cinco años más tarde se trasladó a Milán, donde estudió filosofía, teología y matemáticas en la Universidad Jesuita. En 1 694, se ordenó como sacerdote en Como y a partir de ese momento impartió lecciones alrededor de las Universidades Jesuitas en Italia: en Turín, enseñó filosofía de 1 694 a 1 697; en Pavía enseñó filosofía y teología a partir de 1 697. Dos años más tarde, ocupó el puesto de presidencia de la sección de matemáticas en esa ciudad.

En 1 693, publicó su primer trabajo acerca de geometría. Entre sus trabajos más importantes está el que hizo intentando demostrar el postulado paralelo de Euclides. Además trabajó en lógica matemática y escribió destacables trabajos sobre geometría no-euclidiana.

Saccheri murió el 25 de octubre de 1 733 en Milán, Italia.

21.7 Síntesis, análisis, investigación

1. ¿Cuál era el objetivo de Poncelet con relación a la geometría sintética?
2. Estudie el siguiente texto con cuidado.

   "La geometría proyectiva ha tenido una posición importante en la investigación matemática ordinaria de otros campos. La afinidad de la geometría proyectiva con la geometría euclídea y la no euclídea, que fue primeramente presentida y comprobada durante la última mitad del siglo XIX, sugirió una nueva aproximación total a la geometría. La proyección y sección son lo que se llama una transformación; es decir, se empieza con una figura dada se forma una proyección desde algún punto central y se obtiene una sección de esta proyección. El proceso entero que traslada una de las figuras originales a la sección, es la transformación. La pregunta se planteó entonces por sí misma: ¿Hay otras transformaciones más generales que la proyección y sección, cuyas propiedades invariables pueden ser estudiadas? Recientemente se ha desarrollado una nueva geometría, siguiendo esta línea de pensamiento, a saber, la topología. Nos llevaría demasiado lejos considerar las transformaciones topológicas y aprender las propiedades invariables que han sido descubiertas en esta rama de la geometría. Debe bastarnos aquí exponer que la topología considera transformaciones más generales que la proyección y sección, y que resulta evidente que la topología es lógicamente anterior a la geometría proyectiva. Cayley se precipitó demasiado al afirmar que la geometría proyectiva era toda la geometría.

   El trabajo de los geómetras proyectivos ha tenido una gran influencia en las ciencias físicas modernas. Cuando los físicos matemáticos, que trabajaban en la teoría de la relatividad, reconocieron que las leyes del universo pueden variar de un observador a otro, de una forma mucho más sorprendente de lo que se había sospechado antes del experimento de Michelson-Morley, fueron inducidos a recalcar el concepto de invariancia de las leyes científicas respecto cualquier transformación del sistema de coordenadas de un observador a otro. Este énfasis sobre la invariancia de las leyes científicas llegó a ser natural en los físicos matemáticos, porque el concepto de invariancia había desempeñado ya un papel sobresaliente en el trabajo de los geómetras proyectivos.

   Más tarde, cuando los físicos buscaron una forma matemática de expresar las leyes científicas, que mostrara su independencia del sistema de coordenadas, descubrieron que los geómetras proyectivos ya la habían encontrado. Durante la última mitad del siglo XIX, los geómetras proyectivos emplearon métodos algebraicos para facilitar la investigación de propiedades invariables, igual como Descartes usó el álgebra para adelantar el estudio de curvas de la geometría euclídea. En términos algebraicos, las propiedades de las figuras geométricas son expresiones algebraicas, y la transformación proyectiva de sección a sección es un cambio de un sistema de coordenadas a otro. En tales transformaciones de coordenadas, la invariancia proyectiva conserva su forma algebraica. De ahí que los geómetras proyectivos y otros matemáticos estudiaran la teoría de la invariancia de las formas algebraicas, al cambiar de sistemas de coordenadas. El desarrollo más importante en este sentido, que resultó muy útil a los físicos, es la teoría de tensores, o, como se le llama a menudo, el cálculo tensorial. Este cálculo demostraba ser el medio más conveniente de expresar las leyes científicas de manera que se satisfaciera el requisito de que no deben

variar al cambiar de sistema de coordenadas.

Así los geómetras proyectivos iniciaron el estudio de los conceptos y técnicas empleados en la moderna teoría de la relatividad, contribución totalmente imprevista, incluso para los geómetras proyectivos del siglo XIX, dejando aparte a Desargues y a Pascal. Sin embargo, de esta manera lo más esencial de la investigación matemática es lo que precisamente hace avanzar a la ciencia.

Es cierto, desde luego, que otras ramas de la matemática, especialmente las ecuaciones diferenciales, han contribuido más al adelanto de la ciencia que la geometría proyectiva. Pero ninguna rivaliza con ella en originalidad de ideas, coordinación de intuición en el descubrimiento y rigor en la prueba, pureza de pensamiento, acabamiento lógico, elegancia de pruebas y alcance de conceptos. La ciencia nacida del arte demostró ser un arte". [Kline, Morris: "Geometría proyectiva" p. 235, 236]

Describa el desarrollo de la geometría proyectiva según el autor en esta cita.

3. Explique cuál era el punto de vista revolucionario que introdujo Plücker.
4. Enuncie el postulado euclidiano de las paralelas. Haga una representación gráfica. Brevemente, explique cuál fue la posición que asumieron tanto Gauss, como Lobachevsky y Bolyai con relación al postulado de las paralelas.
5. ¿Cuál fue la influencia de las geometrías no euclidianas en el momento de su creación por Gauss, Lobachevsky y Bolyai? Explique.
6. Investigue: ¿cuál era la hipótesis del ángulo obtuso de Saccheri?
7. Analice el siguiente texto:

"La hipótesis que hizo Lobatchewsky fue admitir sólo uno de los tres primeros postulados de Euclides incluidos en éste, a saber, que dos líneas rectas no pueden limitar un espacio, o que dos líneas que divergen en un momento dado divergen siempre. Pero mantuvo el postulado referente al paralelismo, que puede enunciarse de esta forma. Si por un punto exterior a una línea recta dibujamos otra, prolongándolas indefinidamente en ambos sentidos y, manteniendo fija la segunda, vamos girando la primera, el punto de intersección se desplaza hacia un extremo; entonces, en el mismo instante en que este punto desaparece por un extremo, vuelve a aparecer por el otro, y sólo existe una posición en la cual las líneas no se cortan. En lugar de esto, Lobatchewsky supuso que existía un ángulo finito, dentro del cual podía girar la línea después de que el punto hubiera desaparecido por un extremo y antes de que volviera a aparecer por el otro. Entonces, no había intersección para todas las posiciones de la segunda línea incluidas dentro de este ángulo. En las dos posiciones límites, cuando la línea ha alcanzado exactamente un extremo, y cuando está alcanzando exactamente el otro, la línea se llama paralela; de manera que desde un punto fijo pueden dibujarse dos paralelas a una recta dada. El ángulo entre estas dos depende, en cierto modo, de la distancia del punto a la línea. La suma de los ángulos de un triángulo es menor que dos ángulos rectos en una cantidad proporcional al área del triángulo. El conjunto de esta geometría se resuelve al estilo de Euclides, y se llega a conclusiones en extremo interesantes; en particular, en la teoría del espacio sólido, en la que aparece una superficie que no es plana respecto a este espacio, pero que, a efectos de dibujar figuras sobre ella, es

idéntica al plano euclídeo.

Sin embargo, fue Riemann quien primeramente realizó la tarea de analizar todas las hipótesis de la geometría y mostrar cuáles eran independientes. Esta misma clasificación y separación es suficiente para privarlas de necesidad y exactitud para el geómetra; ya que el proceso por el cual se efectúa consiste en demostrar la posibilidad de concebir como falsas una por una, estas hipótesis; por lo tanto, se descubre claramente cuanto se supone. Pero puede valer la pena establecer el pro y el contra de ello". [Clifford, William Kingdon : "Postulados de la ciencia del espacio", p. 156, 157]

Explique la visión de las ideas de Lobachevsky que consigna Clifford. ¿Qué valoración hace del trabajo geométrico de Riemann?

8. Exlique el aporte de Riemann a la geometría no euclidiana.
9. ¿Qué es la geometría diferencial de Riemann?
10. Explique la noción de espacio que proponía Riemann.
11. Enumere las características del espacio según Clifford y comente su relación con la correspondencia de la geometría euclidiana con el espacio.
12. Estudie el siguiente texto

"Debemos darnos cuenta al principio que en matemáticas se trata con muy diversas clases de espacios. Aquí, sin embargo, estamos interesados solamente en los llamados espacios Riemann, y en particular en los espacios Riemann tridimensionales. Su definición exacta sale de nuestros límites; es suficiente señalar que este espacio Riemann es un conjunto de elementos o puntos, en los cuales ciertos subconjuntos llamados líneas serán objeto de nuestra atención. Por un proceso de cálculo puede asignarse a cada línea un número positivo, llamado longitud de la línea, y entre estas líneas hay unas tales que cada arco suficientemente pequeño AB es más corto que cualquier otro arco de otra línea que una los puntos A , B. Estas líneas se llaman geodésicas, o líneas rectas del espacio en cuestión. Ahora puede ser que en cualquier espacio particular Riemann haya líneas rectas de longitud tan grande como se quiera; en este caso diremos que este espacio es de extensión infinita. Por otra parte, puede ser que en este espacio particular Riemann las longitudes de todas las líneas rectas son menores que un número fijo; entonces decimos que el espacio es de extensión finita. Hasta el final del siglo XVIII sólo era conocido un sencillo espacio matemático, de aquí que se llamara sencillamente 'espacio'. Este es el espacio de la geometría que se enseña en las escuelas y que llamaremos espacio euclídeo, por ser el matemático griego Euclides el primero que desarrolló la geometría de este espacio sistemáticamente. Y de nuestra definición anterior, este espacio euclídeo es de extensión infinita.

Hay también sin embargo espacios Riemann de tres dimensiones de extensión finita; los más conocidos son los llamados espacios esféricos (y muy relacionados con ellos los elípticos), que son tridimensionales análogos a una superficie esférica. La superficie de una esfera puede considerarse como un espacio Riemann bidimensional, cuyas geodésicas, o líneas 'rectas', son arcos de círculo máximo. (Un círculo máximo es la sección circular de la

superficie esférica obtenida por un plano que pasa por el centro de la misma, por ejemplo, el ecuador y los meridianosdelaTierra). Si r es el radio de la esfera, entonces la longitud de la circunferencia del círculo máximo es $2pr$; esto quiere decir que ninguna circunferencia puede tener una longitud mayor que $2pr$. De aquí que la esfera, considerada como un espacio Riemann bidimensional, es un espacio de extensión finita. Respecto a espacios esféricos tridimensionales la situación es totalmente análoga; esto es, son también espacios de extensión finita. Sin embargo, no tienen límites; como la superficie de la esfera es ilimitada; se puede andar a lo largo de sus líneas rectas sin tenerse que parar debido a un límite del espacio. Después de un tiempo finito uno regresa simplemente al punto de partida, exactamente como si nos moviéramos a lo largo de un círculo máximo de una superficie esférica. En otras palabras, podemos hacer un paseo circular sobre el espacio esférico, tan fácilmente como damos la vuelta al mundo.

Así vemos que en sentido matemático hay espacios de extensión infinita (por ejemplo, el espacio euclídeo) y espacios de extensión finita (por ejemplo, espacios esféricos y elípticos). Esto no es todo lo que la mayoría de personas piensan cuando se les pregunta '¿el espacio es infinito?' Preguntan más bien: '¿el espacio, en el cual tienen lugar nuestras experiencias y los fenómenos físicos, es un espacio finito o infinito?'

Antes de que ningún otro espacio, salvo el euclídeo, fuera conocido todos creían que el espacio del mundo físico era el espacio euclídeo; infinitamente extenso; Kant, que formuló explícitamente este punto de vista, sostuvo que la ordenación de nuestras observaciones en el espacio euclídeo era necesariamente intuitiva; los postulados básicos de la geometría euclídea son juicios sintéticos a priori.

Pero cuando se descubrió que en un sentido puramente matemático 'existían' también otros espacios además del euclídeo (esto es, no conducía a ninguna contradicción lógica su existencia), llegó a ser posible la pregunta de que si el espacio del mundo físico debía ser un espacio euclídeo. La idea desarrollada fue que era una cuestión de experiencia, es decir, una pregunta que tenía que ser respondida por la experiencia. Gauss hizo estos experimentos. Pero después de la obra de Henri Poincaré, el gran matemático de finales del siglo XIX, sabemos que la pregunta formulada en estos términos no tiene sentido. En un amplio margen tenemos libertad de elección de la clase de espacios matemáticos en que realizamos nuestras observaciones. La pregunta no adquiere significado hasta que se decide la forma en que se llevan a cabo estas observaciones. Pues lo más importante para un espacio Riemann es la forma como a cada una de sus líneas se le asigna una longitud, es decir, cómo se miden en él las longitudes. Si decidimos que las medidas de longitud en el espacio de los fenómenos físicos, se hará del mismo modo como se hizo en tiempos antiguos, es decir, por la medición con una varilla 'rígida', entonces la pregunta expresa si el espacio considerado de los fenómenos físicos es un espacio Riemann euclídeo o no euclídeo. Y al mismo tiempo la pregunta implica si su extensión es finita o infinita". [Hahn, Hans: "El infinito" p. 396, 397]

Explique la noción de espacio que se introduce en este texto.

13. Comente la relación entre geometrías pura y aplicada durante el siglo XIX.

14.Explique con cierto detalle qué era el Programa de Erlanger desarrollado por Felix Klein.

15.Comente por qué el Programa de Erlanger potenciaba la abstracción en las matemáticas.

16.Lea con cuidado esta cita de Euler:

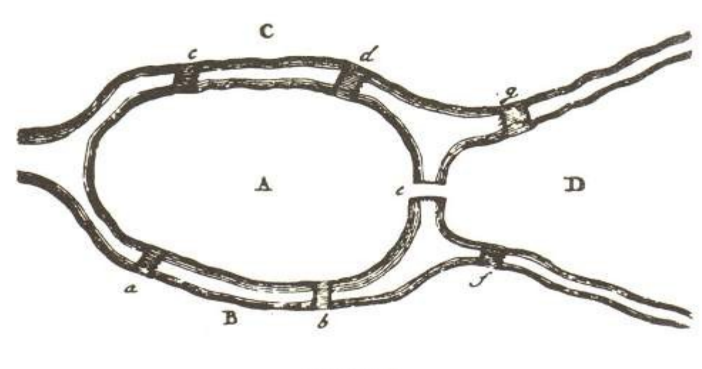


FIGURA 1

"1. Además de aquella parte de la Geometría que trata sobre cantidades, y que se ha estudiado en todo tiempo con gran dedicación, el primero que mencionó la otra parte, hasta entonces totalmente desconocida, fue Leibniz, el cual la llamó geometría de la posición. Leibniz determinó que esta parte se tenía que ocupar de la sola determinación de la posición, y de las propiedades provenientes de la posición, en todo lo cual no se han de tener en cuenta las cantidades, ni su cálculo. No está suficientemente definido de qué manera conciernen los problemas a esta geometría de la posición, y qué método conviene emplear en su resolución. Por ello, cuando recientemente se mencionó cierto problema, que parecía realmente pertenecer a la geometría, pero estaba dispuesto de tal manera que ni precisaba la determinación de cantidades ni admitía solución mediante el cálculo de ellas, no dudé en referirlo a la geometría de la posición. Sobre todo, porque para resolverlo sólo había que considerar la posición, y no se hacía ningún uso del cálculo. He decidido, pues, exponer aquí el método que he hallado para la solución de este tipo de problema, a modo de ejemplo para la geometría de la posición.

2. El problema, bastante conocido, según me dijeron, era el siguiente: Hay una isla A en Königsberg (Regiomons), Prusia, llamada der Kneiphof, y el río que la rodea está dividido en dos brazos, tal como puede verse en la figura; los brazos de este río están cruzados por siete puentes; a, b, c, d, e, f y g. Se propuso, acerca de estos puentes, la siguiente cuestión: quién podía trazar un recorrido tal que pasara por cada puente una sola vez y no más. Me dijeron que unos negaban que esto fuera posible, y otros lo dudaban; ninguno, sin embargo, lo afirmaba. Yo, a partir de esto, formulé según mi idea, el problema muy general de averiguar, sea cual fuere la forma del río y su distribución en brazos, y sea cual fuere el número de puentes, si se podía pasar o no por cada puente una sola vez.

3. En lo referente al problema de los siete puentes de Königsberg, podía resolverse haciendo una relación total de todos los recorridos posibles. A partir de esto, se vería qué recorrido satisfacía la condición, o si no lo cumplía ninguno. Esta manera de proceder, sin embargo, a causa del número de combinaciones, sería demasiado difícil y trabajosa, y no podría aplicarse a otras cuestiones con muchos más puentes. Además, si se lleva a término la

operación de este modo, se encontrarán muchas cosas que no entraban en el problema; de lo cual procede, sin duda, la causa de tanta dificultad. Por este motivo, dejé aparte este método, y busqué otro que no diera más de lo que ofreciera: es decir, si es posible o no trazar un recorrido de este tipo. Comprendí, pues, que este método sería mucho más simple.

4. Todo mi método se basa en designar de un modo idóneo los pasos únicos de los puentes, para lo cual uso letras mayúsculas A, B, C, D, adscritas a las regiones que están separadas por el río. De este modo, si alguien va de la región A a la región B a través del puente a ó b, denoto este paso con las letras AB, la primera de las cuales da la región de la cual sale el transeúnte, y la otra la región a la cual llega pasando por el puente. Si después el transeúnte va de la región B a la región D por el puente f, este paso está representado por las letras BD; caso de realizarse sucesivamente estos dos pasos AB y BD, los denoto solamente con las tres letras ABD, porque la letra media B designa tanto la región a la cual llegó en el primer paso, como la región de que salió con el segundo paso.

5. De manera parecida, si el transeúnte va de la región D a la C a través del puente g, estos tres pasos sucesivos los denotaré con las cuatro letras ABDC. A partir de estas cuatro letras ABDC, se ha de entender, pues, que el transeúnte ha pasado primeramente de la región A a la región B, de allí a D, y, por último, de allí a C: como estas regiones están separadas entre sí por los ríos, es necesario que el transeúnte haya pasado por los tres puentes. Así pues, los pasos sucesivos realizados por cuatro puentes se denotan con cinco letras; y si el transeúnte pasara por un número cualquiera de puentes, su recorrido quedaría notado por un número de letras mayor en una unidad que el número de puentes. Por lo que el paso por siete puentes requiere ocho letras para designarlo.

6. En una designación de este tipo, no tengo en cuenta por qué puentes se ha hecho el paso; si puede hacerse el mismo paso de una región a otra a través de muchos puentes, es indiferente el puente utilizado, con tal que llegue a la región designada. De lo que se deduce que si puede realizarse un recorrido por los siete puentes de la figura de modo que pase una sola vez por cada uno de ellos, de la misma manera no pasará dos veces por ninguno. Este recorrido puede representarse por ocho letras, y estas letras han de estar dispuestas de tal manera que aparezca dos veces la sucesión inmediata de las letras A y B, ya que son dos puentes a y b los que unen estas regiones A y B; de igual modo, también debe aparecer dos veces la sucesión de letras A y C en la serie de ocho letras. Además, la sucesión de las letras A y D aparecerá una sola vez, e, igualmente, la sucesión de las letras B y D y C y D es necesario que aparezca una sola vez.

7. La cuestión queda reducida, pues, a formar con las cuatro letras A, B, C y D una serie de ocho letras, en la cual aparezcan todas aquellas sucesiones las veces establecidas. Antes de empezar a trabajar en una disposición de este tipo, conviene ver si estas letras pueden disponerse o no de tal modo. En efecto, si pudiera demostrarse que es totalmente imposible hacer una tal disposición, sería inútil todo el trabajo destinado a lograrlo. Por este motivo, busqué una regla mediante la cual, tanto en ésta como en todas las cuestiones similares, pueda discernirse fácilmente si puede tener lugar una tal disposición de las letras". [Euler, Leonhard: "Los siete puentes de Königsberg", pp. 164, 165, 166]

Describa en sus palabras qué era el problema de los puentes de Koenigsberg. Use más bibliografía.

17. Investigue sobre el problema de los cuatro colores. Explique qué es y cuál ha sido su evolución histórica. Utilice otra bibliografía o referencias adicionales.

18. Lea el siguiente texto con cuidado.

"Möbius hizo el sorprendente descubrimiento de que existen superficies con una sola cara. La más simple de estas superficies es la llamada banda de Möbius, formada tomando una larga tira rectangular de papel y uniendo sus extremos después de darle media vuelta, como en la figura 17. Un bicho que se arrastrara sobre esta superficie, andando siempre por la parte media de la tira, llegaría a su posición original en el lado inferior (figura 18). Cualquiera que se comprometiera a pintar una cara de la banda de Möbius podría hacerlo introduciendo toda la tira en un bote de pintura.

Otra propiedad curiosa de la banda de Möbius es que sólo tiene una arista, ya que su contorno está formado por una curva simple cerrada. La superficie ordinaria de dos lados, formada uniendo los extremos de un rectángulo sin retorcerlo, tiene dos contornos curvos distintos. Si esta última tira se corta a lo largo de la línea central, se rompe en dos tiras distintas de la misma clase. Pero si se corta la banda de Möbius a lo largo de esta línea (como muestra la figura 17), encontramos que queda de una pieza. Resulta difícil, para cualquiera que no esté familiarizado con la banda de Möbius, predecir este comportamiento, tan contrario a la intuición de lo que 'debería' suceder. Si la superficie que resulta de cortar la banda de Möbius a lo largo de su línea media se corta otra vez a lo largo de dicha línea media, se forman dos tiras, separadas pero entrelazadas." [Courant, R. y Robbins, H.: "Topología" p. 188]

Dibuje la cinta de Möbius. Haga una representación en papel.

19. Investigue las diferencias entre la topología conjuntista y la algebraica. Mencione sus diferencias básicas.

20. Resuma algunos aspectos del trabajo de Poincaré en la topología.

21. Mencione algunos de los aportes de Fréchet y Hausdorff a la topología.

22. Utilice software matemático para obtener la representación gráfica de la botella de Klein y la cinta de Möbius.

23. Lea cuidadosamente el siguiente texto.

"Gauss hizo, en 1827, el primer estudio sistemático de las formas diferenciales cuadráticas en sus Disquisitiones generales circa superficies curvas, en el que le tema principal es el de la curvatura de las superficies. Las formas investigadas son únicamente de dos variables. La teoría de Gauss es un antecedente directo de la cartografía, la que se ocupa de la formación de superficies y de la posibilidad de aplicar una superficie sobre otra. Sin embargo, este aspecto no fue el que sugirió a Riemann la generalización de gran alcance de la geometría diferencial. La geodesia también fue una de las cosas que más interesaron a Gauss de todas las matemáticas aplicadas (1843 - 1847); y también en parte se refiere a las formas cuadráticas diferenciales, ya que el elemento lineal de un esferoide es la raíz cuadrada de una forma diferencial cuadrática con dos variables y con coeficientes variables. Riemann dio el paso final en esta dirección, con una de las aportaciones más prolíficas que jamás se

hicieron a la geometría, al pasar inmediatamente a la forma cuadrática diferencial general en n variables con coeficientes variables, en su vital obra clásica sobre los fundamentos de la geometría Uber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen, 1854." [Bell, E.T.: Historia de las matemáticas, p. 371]

Dé una definición de lo que es la geodesia. Averigüe qué es la curvatura de las superficies en términos matemáticos, y ofrezca una explicación verbal de ésta. ¿Qué es una forma cuadrática diferenciable?

24. Estudie el siguiente texto.

"Ahora bien, la geometría euclidiana es y seguirá siendo la más cómoda:

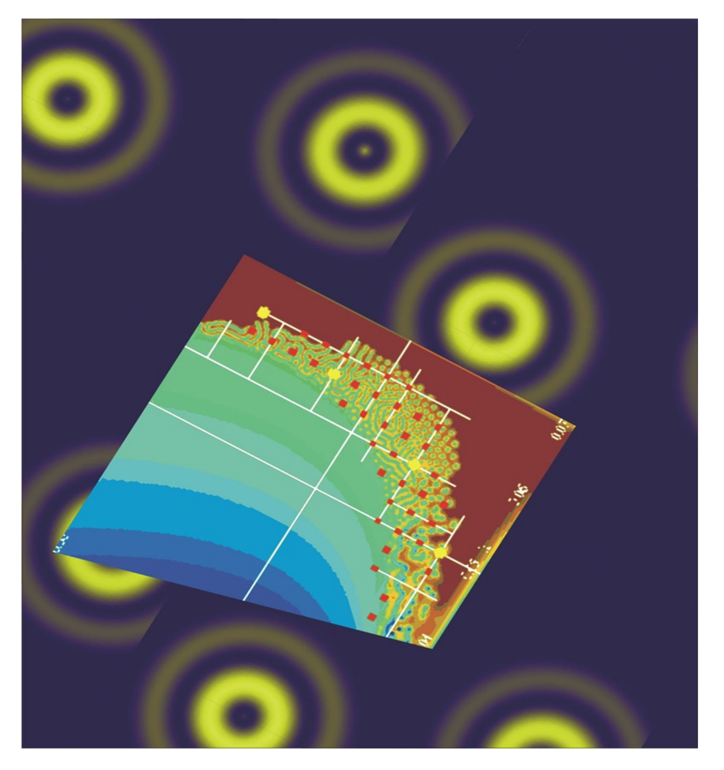
1. Porque es la más simple y no solamente como consecuencia de nuestros hábitos o de no sé qué intuición directa que tuviéramos del espacio euclidiano; es en sí la más simple, de la misma manera que un polinomio de primer grado es más simple que otro de segundo grado; que las fórmulas de la trigonometría esférica son más complicadas que las de la rectilínea, y ellas parecerían así incluso para un analista que ignorase la significación geométrica.

2. Porque concuerda bastante bien con las propiedades de los sólidos naturales; esos cuerpos a los cuales se aproximan nuestros miembros y nuestros ojos, y con los que fabricamos nuestros instrumentos de medida." [Poincaré, Henri: Filosofía de la ciencia, p. 186]

Explique las ideas de este autor expresadas en este texto.

CAPITULO XXII

EL RIGOR EN LAS MATEMÁTICAS



Durante el siglo XIX, se dio un proceso de rigorización que buscaba esclarecer algunos conceptos y definirlos de una mejor manera. Por ejemplo, las nociones de función, derivada, continuidad, integral. También se buscaba dar un tratamiento más consistente a las series, puesto que durante el siglo XVIII no se ponía mucho cuidado de si estas eran convergentes o divergentes; de hecho, se llegaba a contradicciones importantes. Uno de los ejemplos son las representaciones de las funciones por medio de series trigonométricas, que habían incurrido en algunas confusiones.

Este proceso de establecer un mayor rigor en los conceptos y métodos del Cálculo va a introducirse en la historia de las matemáticas del siglo XIX dentro de un período en el que se desarrollaron nuevas geometrías y se potenció la abstracción en el álgebra. Puede decirse que sería un período en el que iban a perder su asidero propiedades tan importantes de los sistemas numéricos conocidos como la conmutatividad, o una geometría que daba cuenta de manera natural de representar nuestras percepciones de la realidad exterior, la euclidiana, y también se iba a expandir un nuevo carácter de las matemáticas.

No se puede decir, sin embargo, que existió una relación directa entre la creación de geometrías no euclidianas o las nuevas álgebras y la aritmetización que se dio en ese siglo. Más bien, algunos historiadores de las matemáticas consideran que sobre todo

pesó el desencanto que generó la dificultad de fundamentar el análisis en la geometría euclidiana, fue lo que volcó los ojos hacia a la aritmética.

Fue un punto relevante para la afirmación de la deducción y el rigor lógicos como fundamento de las matemáticas o criterio de validación dentro de estas comunidades científicas. Ya en la Grecia Antigua el criterio de la demostración había alcanzado el sentido de prescripción que posteriormente buscaría la mayor parte de matemáticos. Sin embargo, muchas veces la lógica que se desarrollaba dejaba espacios a la intuición y a una visión sensibles del mundo externo. En el nuevo escenario vamos a encontrar la búsqueda por nuevos criterios basados en la aritmética, el álgebra, la lógica abstracta de manera dominante. Esta será una realidad para las matemáticas a partir de ese momento.

Uno de lo asuntos que debió ser revisado fue el concepto de función, debido a la emersión de una gran cantidad y variedad de funciones en la actividad de las matemáticos de la época. Para Gauss, por ejemplo, una función era una expresión cerrada analítica y finita, aunque habló de las series hipergeométricas como funciones, pero sin total convicción que se trataba de funciones. Lagrange había usado las series de potencias como funciones y con ello ofreció un concepto más amplio. Lo mismo sucedía con Lacroix, quien afirmaba: "Toda cantidad cuyo valor depende de una o varias otras es llamada una función de estas últimas, ya sea que uno conozca o no por medio de qué operaciones es necesario de las últimas a la primera cantidad". Fourier amplió el debate, afirmando que no se requería una representación analítica para una función.

En todo esto pesó el hecho de que aparecían cada vez más y más funciones que no se comportaban como las algebraicas. Y emergían las preguntas acerca de cómo se debían reconsiderar las nociones de variable, continuidad, derivabilidad, etc. en ese nuevo escenario.

22.1 Bolzano y Cauchy

Varios matemáticos, de maneras diferentes, enfrentaron esta tarea de fundamentar los puntos vulnerables que se encontraban en el desarrollo del cálculo e integrar las nuevas realidades matemáticas que habían emergido. Entre los más notables: Bolzano, Cauchy, Abel y Dirichlet. Weierstrass fue más lejos en la definición del nuevo paradigma del rigor; puede, incluso, decirse que el cálculo junto con los procesos de rigor y fundamento que este matemático le daría, constituyen el corazón del análisis matemático.

Bolzano

Bernhard Bolzano (1781 - 1848), matemático, filósofo y cura de Bohemia, estableció con claridad su opinión de que los infinitesimales no existían, al igual que tampoco los números infinitamente grandes. Debe recordarse, que tanto los infinitesimales como los números infinitamente grandes fueron usados por Euler y muchos otros matemáticos durante el siglo XVIII.



Bolzano, estampilla.

Bolzano en 1834 había inventado una función continua en un intervalo que no tenía derivada en ningún punto de ese intervalo. Ese resultado no fue conocido en su época. De hecho, se le atribuye a Weierstrass el primer ejemplo de ese tipo. Y esto sucedió con otros resultados. Por ejemplo, el criterio de convergencia de una serie que señala: si para cada p la diferencia $S_n - S_{n+p}$ tiende a 0, cuando n tiende a ∞, la serie converge. Bolzano lo conocía pero se le atribuye a Cauchy.

En el año 1817, Bolzano ofreció una definición de continuidad muy rigurosa:

$f(x)$ es continua en un intervalo si para toda x en el intervalo, la diferencia $f(x+w)-f(x)$ puede hacerse tan pequeña como uno quiera tomando w suficientemente pequeña.

Se trata de una definición casi semejante a la que nosotros usamos normalmente. Esta obra, sin embargo, no fue muy conocida durante la vida de Bolzano. De hecho, este trabajo fue redescubierto por Hermann Hankel (1839 - 1873).

Cauchy

Ahora bien, el trabajo realmente relevante para la comunidad matemática de la época fue dado por el matemático francés Augustin Cauchy (1789 - 1857), quien se suele comparar a Euler en su prolífica producción matemática. Su obra en torno a esta fundamentación se sintetizó en tres trabajos: Cours d'analyse de l'École Polytechnique (1821), Résumé des leçons sur le calcul infinitesimal (1 823), y Leçons sur le calcul différentiel (1829).

El objetivo de este matemático era establecer una separación de la idea de límite y con relación a su origen geométrico, físico o intuitivo. En esa dirección, se concentró en tres nociones: variable, función y límite. Por ejemplo, en su trabajo trató de dar cuenta de la naturaleza de los números irracionales, ofreciendo la idea de que un número irracional era simplemente el límite de varias fracciones racionales que se le acercaban. Se dio cuenta, sin embargo, tiempo después, que la definición debía ser más precisa desde un punto de vista lógico puesto que, en esa definición, asumía la existencia de los irracionales previamente a su construcción por medio de límites.

Cauchy no estaba de acuerdo con el enfoque que desarrolló Lagrange por medio de series de potencias. Su planteamiento estaba más cercano al de d'Alembert, que partía del concepto de límite.

El asunto de los infinitesimales, lo sancionó usando el concepto de variable:

"Una cantidad variable se vuelve infinitamente pequeña cuando su valor numérico decrece indefinidamente de tal manera que converge al límite cero".

No obstante, hay discusión acerca de hasta dónde usó los infinitesimales y hasta dónde adoptó el rigor que luego se le atribuiría a Weierstrass.

Con base en la noción de variable, Cauchy definió el límite:

"Cuando los sucesivos valores que tome una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo de manera que terminan por diferir de él en tan poco como queramos, este último valor se llama el límite de todos los demás".

Por otro lado, la derivada de la función $f(x)$ con respecto a x la define más o menos de la siguiente manera:

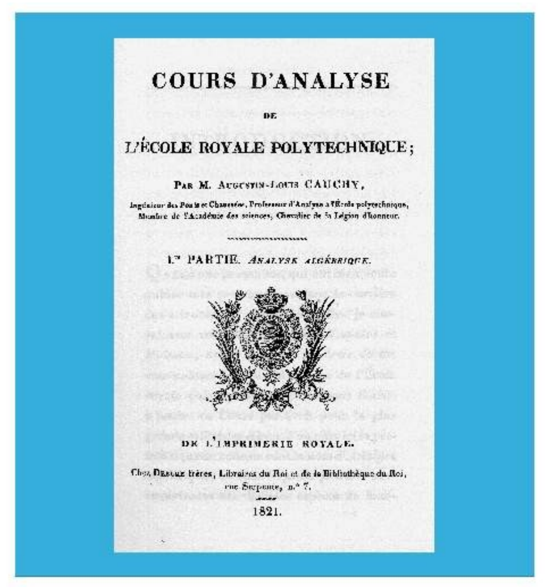
"si $\Delta x = i$ un incremento de x

, se considera la razón

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

y define la derivada $f'(x)$ al límite de esta razón cuando i tiende a cero".

En este tratamiento, la diferencial, que habían usado primordialmente Leibniz y muchos otros matemáticos, posee aquí un carácter secundario. La diferencial la define como $dy = f'(x)dx$.


COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE;

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École polytechnique, Membre de l'Académie des sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.

I.re PARTIE. ANALYSE ALGÉBRIQUE.

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Chez Debure frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi, rue Serpente, n.° 7.

1821.

Portada del libro Cours d'analyse de l'École Polytechnique (1 821).

¿Cómo define la continuidad? Para Cauchy, una función $f(x)$ es continua entre ciertos límites dados de x, si entre estos límites al darse un incremento infinitamente pequeño i de x, siempre se obtiene un incremento infinitamente pequeño

$$f(x+i)-f(x)$$

de la función. En esencia ésta es la misma aproximación que había seguido Bolzano, y la misma que utilizamos hoy en día. Puede afirmarse, sin lugar a dudas, que ni Newton ni Leibniz habían sido tan precisos y claros en la concepción de los procesos infinitesimales, que son el corazón del cálculo.

Pero, hay que subrayar, hubo que esperar a que pasaran decenas y decenas de años para que se diera esta precisión. En ese período, no se puede olvidar, se dio un extraordinario desarrollo de las matemáticas, del cálculo específicamente. Es decir, los procesos en busca de un mayor rigor y precisión son importantes en las matemáticas, pero de la misma manera no se pueden sobrevalorar.

A pesar de los mayores niveles de precisión así como de un tratamiento del infinitesimal, por medio de las nociones de variable y de límite, no puede negarse, con plena certeza, la creencia tanto en este matemático como en otros más en los números infinitamente pequeños y también en los infinitamente grandes. De hecho, la noción de "variable" que usaba Cauchy no era la que hoy usamos, que es más bien un resultado de Weierstrass.

En ocasiones, los infinitesimales fueron concebidos con un halo cuasi mágico, a veces, incluso, como realidades físicas. Con base en la formulación del límite, los conceptos de derivada, continuidad e integral serían transformados.

El "rigor" que encontramos en Cauchy no era, a pesar de todo, el que encontramos en los textos actuales de matemáticas. Por ejemplo, su referencia al infinitesimal utilizaba frases como "se vuelve infinitamente pequeño" o "decrece indefinidamente" que, a pesar de que las podamos usar coloquial e introductoriamente en el estudio del Cálculo, no reúnen los requisitos de precisión y claridad lógicas establecidos por las comunidades matemáticas.

Por otra parte, Cauchy retomó la noción de integral como límite de sumas, con un contenido digamos geométrico, algo que se había perdido al haberse subrayado durante todo el siglo XVIII la integral por medio de la antidiferenciación. Es decir:

Sea

$$S_n = (x_1 - a)f(a) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \ldots + (b - x_{n-1})f(x_{n-1}),$$

para una partición en el intervalo [a,b]. El límite de las sumas cuando las $(x_i - x_{i-1})$ decrecen indefinidamente es la integral definida en el intervalo dado. O sea, más o menos:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Producto de esta tarea se han dado importantes generalizaciones y aplicaciones del concepto de integral.

Vayamos a la derivada. D'Alembert afirmaba que la derivada se debía basar en el límite de la razón de las diferencias de variables dependientes e independientes: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Este es un primer punto.

Sin embargo, fue Bolzano (1817) quien definió la derivada por primera vez como un límite: la cantidad $f'(x)$

a la que la razón

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

se aproxima indefinidamente cuando Δx se acerca a 0 a través de valores positivos y negativos.

Bolzano sabía que $f'(x)$ no era un cociente de ceros o una razón de cantidades que se "evanecen", sino un número al que se aproxima la razón que señalamos arriba. Ahora bien, el mismo Euler había descrito $\frac{dy}{dx}$ como un cociente de ceros, y otros matemáticos, como Lacroix, siguieron sus pasos. La precisión que hizo Bolzano era significativa.

¿Qué hizo Cauchy? En esencia, definió la derivada como Bolzano. Los siguientes matemáticos sustituyeron estas expresiones en las definiciones por formulaciones más precisas. A pesar de estos trabajos de Bolzano y Cauchy, tanto Cauchy como la mayoría de los matemáticos de esa época pensaron que una función continua (salvo en puntos aislados como $x = 0$ para $y = \frac{1}{x}$) tenía que ser derivable (lo que es falso). No obstante, Bolzano sí se percató de la diferencia entre continuidad y derivabilidad; más aun, como ya lo dijimos: dio un ejemplo famoso de función continua no derivable en ningún punto. Luego, en los años que siguieron, se ofrecieron muchos ejemplos de funciones continuas no derivables.

De esta manera, se fue precisando el concepto de función y ofreciendo a la comunidad matemática múltiples posibilidades en su construcción y sus aplicaciones.

22.2 Weierstrass

En la búsqueda por dar un fundamento al cálculo a través de la aritmetización, en particular desprenderse de la influencia geométrica e intuitiva, fue el matemático Weierstrass quien recorrió más camino. Por ejemplo, no compartía las frases que hemos consignado de Cauchy ni tampoco la expresión "una variable se acerca a un límite", porque sugieren tiempo y movimiento (algo intuitivo). Para Weierstrass, una variable era simplemente una letra que servía para designar a cualquiera de un conjunto de valores que se le puede dar a la letra. Entonces, una variable continua es una tal que si x_0 es cualquier valor del conjunto de valores de la variable y δ es cualquier número positivo, existen otros valores de la variable en el intervalo

$(x_0 - \delta, x_0 + \delta).$

A diferencia de los términos que Cauchy y Bolzano usaban en sus definiciones de continuidad y límite de una función, ofreció las definiciones hoy aceptadas. El límite de una función $f(x)$ en x_0 lo definió, según consignó H. E. Heine (1821 - 1881), su discípulo, como:

"Si, dado cualquier ε, existe un η_0 tal que para $0 < \eta < \eta_0$, la diferencia $f(x_0 \pm \eta) - L$ es menor en valor absoluto que ε, entonces se dice que L es el límite de una función $f(x)$ para $x = x_0$."

Aquí no hay referencia a puntos que se mueven en curvas o infinitesimales, solamente números reales, operaciones de suma y resta y la relación de orden " $<$".

La continuidad, en lenguaje moderno, se puede poner así:

$f(x)$ es continua en $x = x_o$ si dado $\varepsilon > 0$, existe un δ tal que para todo x en el intervalo

$$| x - x_0 | < \delta, \quad \Rightarrow | f(x) - f(x_0) | < \varepsilon.$$

La función

$f(x)$ tiene límite L en $x = x_0$, si dado $\epsilon > 0$, existe un δ tal que para todo x en el intervalo

$$| x - x_0 | < \delta, \quad \Rightarrow | f(x) - L | < \varepsilon.$$

Entonces términos o las frases "infinitesimal", "variable que se acerca", o "tan pequeña como uno quiera", que aparecían en Cauchy, desaparecen en una formulación más precisa que no refiere a la geometría o a la intuición empírica. Precisamente, aquí es donde nacen los "famosos" ε y δ que encontramos en buena parte de los libros de cálculo en nuestras universidades.

Heine fue quien definió la continuidad uniforme para funciones de una o varias variables; de hecho, también demostró que si una función es continua en un intervalo real cerrado y acotado es uniformemente continua.

Estos trabajos en los fundamentos lógicos del cálculo diferencial e integral, empujaron también hacia nuevos criterios en la construcción matemática. Es decir, criterios para la validación de las construcciones matemáticas realizadas por los científicos dedicados a esta disciplina. Esa dirección, sin embargo, enfatizó una separación de las nociones de la geometría intuitiva ligadas al movimiento físico, y un énfasis en los conceptos de función, variable, límite, con un carácter esencialmente aritmético y lógico.

22.3 Aritmetización del análisis

Uno de los temas fundamentales en el proceso de fundamentación del cálculo fue la construcción o la validación de los números reales. Para ello, varios matemáticos se orientaron a ofrecer diferentes definiciones y construcciones de estos números, donde por supuesto lo decisivo giraba alrededor de los irracionales. En esa dirección, hicieron importantes aportes Weierstrass, Richard Dedekind (1831 - 1916), Georg Cantor (1845 - 1918), Charles Méray (1835 - 1911) y tiempo después el filósofo británico Bertrand Russell (1872 - 1970).

Méray y Weierstrass

Méray y Weierstrass propusieron definiciones que utilizaban la noción de convergencia y pretendían evitar el "error lógico" de Cauchy. Recordemos que este matemático había definido los reales como el límite de sucesiones convergentes de números racionales, pero el concepto de límite había sido construido asumiendo la existencia de los números reales, lo que lógicamente era incorrecto.

Méray en su libro Nouveau preçis d'analyse infinitésimale, 1872, decía que el límite de una sucesión convergente determinaba ya fuera un número racional o un número que llamó "ficticio", y los "ficticios" pueden ordenarse: son los irracionales. Ahora bien, Méray no era claro en cuanto a si la sucesión era el número.

Expliquemos mejor este asunto. Empezamos por el concepto de sucesión.

Una sucesión de numeros racionales (a_n) es un conjunto ordenado de números

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$$

También se puede ver como una función

$$g : N \rightarrow Q$$

$$n \mapsto a_n$$

$$o \quad g(n) = a_n.$$

[N el conjunto de números naturales, y Q el de los racionales.]

Por ejemplo, $g(n) = \frac{1}{n^2}$ nos ofrece una sucesión.

Ahora bien, una sucesión es convergente si existe un A tal que

$$\lim_{n \to \infty} a_n = A.$$

Usando lenguaje de límites, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

es decir, $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge a 0.

Precisamente, un criterio para determinar la convergencia de una sucesión es el "de Cauchy" (o "Bolzano-Cauchy"). ¿Cuál es? En esencia: si la diferencia entre los términos se va haciendo cada vez más pequeña, entonces la sucesión converge. Con precisión:

"Si la distancia entre a_{n+p} y a_n se hace tan pequeña como uno quiera para un n suficientemente grande, entonces la sucesión converge".

Puesto de otra manera, y volvemos con los ε:

dado un $\epsilon > 0$ arbitrario, se obtiene que, a partir de cierto n suficientemente grande: $| a_{n+p} - a_n | < \varepsilon$.

Para Méray y Weierstrass, las sucesiones que cumplían con el criterio de Cauchy (sin hacer referencia previa a los números que convergían) eran los números reales. Este es un método de construcción. Un ejemplo, como $a_n = \frac{1}{n^2}$ define una sucesión (a_n) que cumple el criterio de Cauchy, entonces la sucesión es el número real. Así tenemos $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

Es un medio para definir el 0.

Pero hay asuntos complejos aquí. Uno de ellos: puede haber diferentes sucesiones que convergen a 0. Eso no es relevante.

La teoría de Weierstrass es, por supuesto, más compleja. Más que sucesiones ordenadas de números racionales, lo que se usa son conjuntos de racionales. Pero, por ahí van los "tiros".

Debe decirse que Weierstrass no publicó sus resultados sobre la aritmetización, y se conocen, más bien, por medio de sus discípulos Ferdinand Lindemann y Eduard Heine.

Dedekind

Richard Dedekind ofreció otra construcción de los números reales: el método de las "cortaduras". En esencia, hacía lo siguiente para definir "con lógica" los números reales.

Divídase el conjunto de los números racionales en clases disjuntas A y B, tales que todos los números de A sean menores que todos los números de B.

Dedekind consideró entonces los números en los que se hacía el corte: "la cortadura", y estableció que solo existía un número real que producía esa "cortadura".

Si, además, A contiene a su máximo, o B a su mínimo, la cortadura define un número racional.

Pero si ni A contiene a su máximo ni B un mínimo, entonces se define un número irracional. Un ejemplo:

Consideremos esta "cortadura":

$A = \{a \in Q,$ racionales $/ a^2 < 5\}$ y $B = \{b \in Q,$ racionales $/ b^2 > 5\}$.

Esta ``cortadura" define un número que no está en A como máximo ni en B como mínimo. Podemos concluir sin problema que esta cortadura define el número $\sqrt{5}$.

Resulta interesante mencionar que la definición de número irracional dada por Dedekind posee una gran similitud con la teoría de Eudoxo que aparece en el Libro V de los Elementos de Euclides. De hecho, esto lo consigna Ferreirós:

"La teoría de las proporciones de Eudoxo guarda una profunda relación con la teoría de los números irracionales de Dedekind, como indicará Rudolf Lipschitz y como se ha venido repitiendo desde entonces." [Ferreirós, José: "Introducción" a Dedekind, Richard: ¿Qué son y para qué sirven los números?, p. 7]

La construcción dada por Dedekind se inscribía, por supuesto, también en los planes de fundamentación; bien lo recoge Ferreirós:

"El hecho de que todos los temas anteriores se anuden en la obra de Dedekind muestra ya suficientemente que nos encontramos frente a un enorme esfuerzo de sistematización, un gran intento de reducir la matemática a bases rigurosas y unitarias. En efecto, la teoría expuesta en Continuidad y números irracionales puede verse como colofón de una serie de esfuerzos encaminados a fundamentar el análisis sobre la noción de límite, y esta noción directamente sobre la aritmética; además, de las teorías del número irracional publicadas en los años 1 870 es la más consciente conjuntista. Pero Dedekind se preocupó también por hacer posible un desarrollo riguroso de todo el sistema numérico, como acreditan sus afirmaciones publicadas y diversos manuscritos. Con ello pretendía obtener un nuevo fundamento para la aritmética y el álgebra, coherente con sus investigaciones más sofisticadas en el campo de la teoría de números algebraicos y del álgebra en general." [Ferreirós, José: " Introducción" a Dedekind, Richard: ¿Qué son y para qué sirven los números?, p. 13]

Bertrand Russell, tiempo después, propuso que se identificase como número real no aquel que corta los conjuntos, sino un conjunto de racionales. Por ejemplo, definir $\sqrt{5}$ como el conjunto A, antes construido.

Cantor

Georg Cantor continuó la obra de Weierstrass en los fundamentos de las matemáticas. Para Cantor, por ejemplo, "toda sucesión regular define un número; la clase de todos los números así definidos es el sistema de los números reales". De hecho, con algunas simplificaciones por Heine se dio una aproximación distinta a la construcción de los reales: que se conoce como Heine-Cantor, y que fue publicado en " Die Elemente der Funktionenlehre" del Journal de Crelle, 1872.

Para Dedekind y también para Weierstrass está presente una referencia al continuo y, entonces, al infinito.

Podemos decir que la noción de continuo real implica un proceso matemático (mental si se quiere) cualitativamente diferente al que se manifiesta en la aritmética.

22.4 Rigor: una perspectiva histórica

En buena medida, el corazón de los procesos de aritmetización y rigorización de las matemáticas durante el siglo XIX se encontraba en la búsqueda por eliminar la referencia geométrica e intuitiva que había predominado, y subrayar el papel de la aritmética y la lógica en la construcción y validación de las matemáticas. Era importante ofrecer fundamentos lógicos y nociones más precisas en el edificio de las matemáticas, a potenciar sus fundamentos, sin embargo a veces se aprecia un distanciamiento de estos mecanismos de fundamentación de aquellos conceptos e ideas que dieron origen al cálculo.

Para algunos, el corazón de la construcción matemática se encuentra exactamente en esas dimensiones lógicas y formales, en un divorcio muy drástico con las nociones derivadas de la intuición, la geometría visual, la apelación al mundo empírico, que "contaminaron" los orígenes de las matemáticas. No está claro, sin embargo, que la construcción matemática pueda restringirse a esas dimensiones lógicas y que se pueda desprender de la intuición.

La aritmetización del análisis y la fundamentación del cálculo deben sumergirse dentro de un escenario que ofreció la evolución específica de nuevas matemáticas durante el siglo XIX. Es el mismo contexto del álgebra abstracta, de la emersión de las geometrías no euclidianas, y de un nuevo carácter en estas disciplinas. En esa dirección avanzó un proceso de formalización y axiomatización de las matemáticas en la que participarían varios importantes matemáticos. En particular, debe consignarse la obra de Peano que jugó un papel importante en la potenciación de las carateristicas de algunos de los métodos abstractos en las matemáticas modernas, como señala Bell:

"Los orígenes del método abstracto y de la manera crítica de abordar las matemáticas parece que están situados concretamente pocos años después de 1880. No atrajeron mucho la atención hasta que en 1889 Hilbert publicó su obra sobre los fundamentos de la geometría y hasta que, por aquella misma época, señaló la importancia básica que tenía para todas las matemáticas el demostrar la consecuencia de la aritmética común. Pero parece atribuirse el impulso inicial a Peano (italiano, 1858 - 1932) con sus postulados de la aritmética (1889). Siguiendo el programa euclidiano, Peano emprendió la tarea de reducir la aritmética común de un conjunto explícitamente enunciado de postulados tan libres de hipótesis implícitas como pudo hacerlos. El método postulacional es el origen del moderno movimiento crítico y de la tendencia hacia la abstracción." [Bell, E.T.: Historia de las matemáticas, p. 278]

Con los propósitos de desgeometrizar el cálculo, potenciar la deducción lógica en los fundamentos, se planteó un reduccionismo de conceptos. Por ejemplo, la reducción de los números irracionales a nociones aritméticas. Se quiera o no, este proceso implicó nuevos niveles de abstracción y, lo que a veces no suele reconocerse, la introducción de supuestos teóricos sobre la existencia y la naturaleza

de las entidades matemáticas. Estos supuestos a veces expresados de una manera explícita y a veces presentes de una manera implícita. Debe decirse, que esta actitud reduccionista, que buscaba la unidad en la diversidad matemática, obligaba a un replanteamiento sobre la naturaleza de las matemáticas e incluso sobre todo el conocimiento. Es por eso mismo que a finales del siglo XIX y en la primera mitad del siglo XX se dio un proceso de discusión filosófica y matemática sobre los fundamentos últimos de estas disciplinas.

Durante el XIX se dio un énfasis en la aritmética y el álgebra, por encima de la geometría. Esto fue así tanto por las inconsistencias del cálculo (en la definiciones, en las series, etc.) y también como una respuesta al impacto producido por las geometrías no euclidianas. Para la mayoría de los matemáticos, la geometría euclidiana se aceptó "acríticamente" por haber asumido la intuición como punto de referencia. La emersión de geometrías no euclidianas se leyó como el reclamo por eliminar la intuición.

El énfasis en procesos demostrativos algebraicos y aritméticos respondió tanto a las necesidades conceptuales propiamente de las matemáticas como a las necesidades de la comunidad matemática (incluso psicológicas). Hasta cierto punto, cierto temor, incertidumbre e inseguridad en los matemáticos, los de carne y hueso, fue factor central de esta evolución. Como siempre, en la ciencia y las matemáticas en particular, los criterios que se aceptan responden, también, a las percepciones (incluso temores y rivalidades) de la comunidad practicantes.

Ya volveremos sobre esta temática, que plantea una reflexión más bien filosófica.

22.5 Biografías



Karl Theodor Wilhelm Weierstrass

Karl Weierstrass nació el 31 de octubre de 1 815 en Osternfelde, Westphalia, Alemania. Sus padres fueron Wilhelm Weierstrass, alcalde de Osternfelde, un hombre con un gran conocimiento de las ciencias y el arte; y Theodora Vonderforst. Karl fue el mayor de cuatro hijos. En 1 827, su madre murió y un año más tarde su padre se volvió a casar. En 1 829, ingresó al Gymnasium Católico de Paderborn. Además, trabajó medio tiempo como tenedor de libros para ayudar en la economía de su casa.

En 1 834, se graduó del Gymnasium e ingresó, por deseo de su padre, a la Universidad de Bonn a

estudiar leyes, finanzas y economía. Fue un conflicto para él querer estudiar matemáticas y no lo que su padre le indicaba; en consecuencia, dejó de asistir a los cursos. Comenzó a estudiar matemáticas por sí mismo, leyendo los estudios de Laplace, Jacobi y Gudermann.

En 1 839, ingresó a la Academia de Münster, donde asistió a conferencias de Christoph Gudermann acerca de funciones elípticas. También Gudermann alentó a Karl a continuar en el estudio matemático.

En 1 841, fue maestro del Gymnasium de Münster, un año más tarde, impartió lecciones en el Pro-Gymnasium en Deutsche Krone. En 1 848, trabajó en el Colegio Hoseanum en Braunsberg.

En 1 850, empezó a sufrir ataques de vértigo, los cuales le hicieron difícil su labor en los siguientes años. En 1 854, la Universidad de Königsberg le brindó el grado de doctor honorario.

En 1 870, Sofia Kovalevskaya fue a Berlín y como no se le permitió ingresar a la universidad, Karl le dio clases privadas. Posteriormente, Sofia recibió un doctorado honorario de Göttingen y Karl la ayudó a obtener un puesto en Estocolmo en 1 883.

Murió de pulmonía el 19 de febrero de 1 897 en Berlín, Alemania.



Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano

Bernaud Placidus Bolzano nació el 5 de octubre de 1 781 en Praga, Bohemia, República Checa. Fue un filósofo, matemático y teólogo, que hizo importantes contribuciones a la matemática y a la teoría del conocimiento. En 1 796, ingresó a la Facultad de Filosofía de la Universidad de Praga. En 1 800, inició sus estudios de teología, los cuales los mantuvo por tres años. Mientras tanto, preparaba su tesis de doctorado en geometría, el cual recibió un año más tarde. Dos días después de recibir su título, fue ordenado Sacerdote.

En 1 804, obtuvo el puesto de presidencia de filosofía y religión en la Universidad de Praga; puesto que tuvo que abandonar en 1 819 presionado por el gobierno Austriaco debido a su pensamiento liberal. Luego, acusado de herejía se le prohibió salir de su casa o publicar trabajos. A pesar de esto, sus trabajos fueron publicados más tarde fuera de Austria.

Murió el 18 de diciembre de 1 848 en Praga, Bohemia, República Checa.

Hugo Carlos Roberto Méray

Carlos Méray nació el 12 de noviembre de 1 835 en Chalon-sur-Saône, Francia. Inició sus estudios en la Escuela Normal Superior en París en 1 854, a la edad de dieciocho años y se graduó en 1 857. Luego de su graduación, comenzó a

enseñar en el Liceo de St Quentin, durante dos años, después de los cuales dejó la enseñanza durante siete.

Posteriormente, regresa a dar lecciones en 1 856, en la Universidad de Lyon, para ser más tarde nombrado, en 1867, Profesor de Matemáticas en la Universidad de Dijon, en donde trabajó por el resto de su vida. Méray pudo haber sido un reconocido matemático alrededor del mundo por sus ideas, pero la suerte no estuvo de su lado.

En 1 869, publicó el primer estudio de teoría aritmética acerca de los números irracionales; su base fue el trabajo de Lagrange. Esta fue la primera teoría coherente y rigurosa sobre números irracionales que se vio impresa.

Murió el 2 de febrero de 1 911 en Dijon, Francia.



Abraham Robinson

Abraham Robinson nació el 6 de octubre de 1 918 en Waldenburg, Polonia. Sus padres eran judíos y tuvieron otro hijo además de Abraham. Su madre era profesora, llevó a sus dos hijos a Alemania a estudiar, pero con la llegada de Hitler al poder en 1 933 se vieron obligados a partir de Alemania. Entonces, se mudaron a Palestina, donde Abraham completó sus estudios. En 1 935, ingresó a la Universidad Hebrea de Jerusalén, donde estudió matemáticas bajo la tutela de Fraenkel y Levitzki. En 1 939, se graduó y se le otorgó una beca para estudiar en la Sorbone, Paris. Nuevamente tuvo que huir cuando los alemanes invadieron Francia. Cuando llegó a Inglaterra, se unió a la Fuerza Aérea Francesa donde fue enviado a Farnborough en 1 941, para convertirse en un funcionario científico.

En 1 945, regresó a Alemania y un año más tarde fue asignado como profesor en la Universidad de Aeronáutica en Cranfield. Ese mismo año obtuvo una maestría de la Universidad Hebrea y empezó con sus investigaciones en Londres, donde en 1 949, recibió un doctorado de la Universidad de Londres.

En 1 951, ingresó a la Universidad de Toronto como presidente de la sección de matemáticas, pero en 1 957 regresó a Jerusalén a la Universidad a ocupar el mismo puesto hasta 1 962. Luego parte una vez más, esta vez con rumbo hacia Estados Unidos a enseñar en la Universidad de California y por último se trasladó en 1 967 a la Universidad de Yale.

En 1 973, se le pronosticó un cáncer de páncreas y el 11 de abril del siguiente año murió en New Haven, Connecticut, Estados Unidos.

22.6 Síntesis, análisis, investigación

1. Diga cuáles fueron las nociones en las que se concentró Cauchy para desarrollar su programa de rigorización en el análisis.
2. ¿Cuál era el objetivo fundamental de Cauchy al formular su noción de límite?
3. ¿Cuál enfoque prefirió Cauchy: el de d'Alembert o el de Lagrange? ¿Por qué?
4. Diga si es falsa o verdadera la siguiente afirmación: Cauchy pensaba que toda función continua era derivable.
5. Explique las semejanzas y diferencias entre las nociones de "variable" y de "convergencia de una sucesión" que tenían Cauchy y Weierstrass.
6. Defina $\sqrt{3}$ usando el método de las cortaduras de Dedekind.
7. Describa brevemente lo que significa la "aritmetización del análisis".
8. Estudie el siguiente texto de Morris Kline.

   "La rigorización de las matemáticas pudo haber llenado una necesidad del siglo XIX, pero también nos enseña algo del desarrollo de la materia. La estructura lógica fundada recientemente garantizó de manera presumible la solidez de las matemáticas; pero la geometría era algo decorativo. Ningún teorema de la aritmética, el álgebra, o la geometría euclidiana fue cambiado como consecuencia, y los teoremas del análisis solamente tuvieron que ser formulados más cuidadosamente. De hecho, todo lo que hicieron las estructuras axiomáticas y el rigor fue verificar lo que los matemáticos ya sabían. Así, los axiomas tuvieron que ceder ante los teoremas existentes más que determinarlos. Todo esto significa que la matemática descansa no sobre la lógica sino sobre las sólidas intuiciones. El rigor, como ha señalado Jacques Hadamard, sanciona meramente las conquistas de la intuición; o, como ha dicho Hermann Weyl: la lógica es la higiene que usan los matemáticos para mantener sus ideas fuertes y saludables." [Morris Kline: Mathematics: The Loss of Certainty, 1982]

   Explique y comente las ideas que expresa el autor.

CAPITULO XXIII

FILOSOFÍA Y MATEMÁTICAS EN LA GRECIA ANTIGUA



Aunque debe reconocerse el valor de las contribuciones a la ciencia y la cultura de varias civilizaciones del planeta, lo que, a veces, se pierde de vista debido a los prejuicios eurocentristas, debe señalarse que con los griegos se da una nueva etapa en la evolución del conocimiento.

23.1 Perspectiva general

Hay que mencionar no solo la explicación naturalista de los jónicos (siglo VI a.C.), o la metodología hipotético-experimental de la escuela de Hipócrates de Cos (siglo IV a.C.), sino, también, el lugar que se ofreció a las matemáticas, con un enfoque particular, que hemos estudiado a fondo en este libro, en la historia de esta disciplina. Es decir: las matemáticas adquirieron un sentido especial en la Antigüedad Griega, con sus virtudes y defectos.

Se aprecia en el mundo griego antiguo un salto en la evolución de las matemáticas. Es relevante que no se enfatizan tanto los conjuntos de procedimientos empíricos y aplicados, como entre los egipcios y babilonios, sino las abstracciones y demostraciones teóricas. Ciertos aspectos deductivos van a predominar desde entonces en los procesos de producción intelectual del mundo griego.

En la perspectiva más general, puede decirse que los griegos desarrollaron las matemáticas porque interpretaban que ellas eran la esencia del diseño del universo. Es decir, existía una búsqueda por explicar el mundo de una manera racional, y para dar curso a esta intención, las matemáticas se reconocen como un instrumento. La evidencia más fuerte de esto tal vez sea el hecho de que estos

grandes intelectuales no solo dedicaban su mente a las matemáticas sino, también, a otras esferas del conocimiento. Puesto de otra manera, las matemáticas no eran realmente una disciplina aislada de las otras construcciones cognoscitivas. No solo Arquímedes, Herón o Nicomaco son ejemplos de esto, sino también el mismo Eudoxo, que era esencialmente un astrónomo, o Euclides cuyas obras aparte de los Elementos no son despreciables.

La conclusión en todo esto es que los objetivos de interpretar la realidad, en la astronomía, la mecánica, la música, generaron problemas matemáticos, resultados y métodos, que fueron dando origen a una disciplina científica con fisonomía propia.



Esfinge griega 540 a.C.

Es probable que el primer impulso que deba considerarse como decisivo sea la visión naturalista jónica, una ruptura con el tipo de visiones ideológicas, cargadas de misticismo, de las civilizaciones de la Edad del Bronce. En Thales y sus discípulos, y en los otros filósofos jónicos, se afirma una búsqueda por una explicación racional del mundo. Incluso, cuando se estudian las ideas de Parménides, Zenón, Empédocles o los atomistas Leucipo y Demócrito, en donde el énfasis es cualitativo, hay una búsqueda por hacer el mundo inteligible, es decir, capaz de ser explicado por la mente. Actitudes partícipes de una voluntad que también incluye a los pitagóricos. Los atomistas, vale la pena señalar, opinaban que la diversidad del mundo físico podía expresarse a través de las matemáticas, más aun que las leyes matemáticas eran determinantes para lo que pasaba en el mundo.

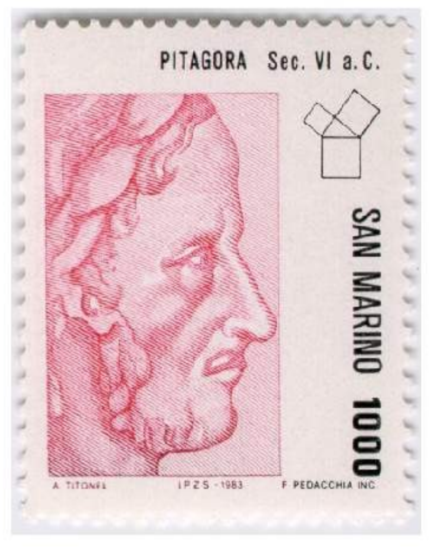
A pesar del misticismo y la religiosidad que caracterizó a los pitagóricos, y que no buscaban fundamentar el mundo en una sustancia única o explicarlo con recurrencia a la experiencia sensorial, no hay duda: su postulación de los números como constituyentes y fundamento de la realidad debe colocarse dentro de la misma perspectiva racional. Solo que por razones ideológicas o filosóficas potenciaron las matemáticas, aunque con un sesgo que causaba problemas en las ciencias físicas. La influencia de los pitagóricos duró muchos años y tocó directamente con los intelectuales más decisivos de la Grecia ateniense. Esa asunción de las matemáticas que se expandería en la escuela de Platón, apuntaló su lugar intelectual pero, también, las mismas características de las construcciones matemáticas en Grecia. La existencia de resultados

matemáticos, como los de Eudoxo y de Euclides, solidificaron ese espacio intelectual y cognoscitivo, y la ideología y la filosofía que subyacían.



Esfinge griega del 460 a.C.

Ahora bien, filosofía más o filosofía menos, los griegos intentaron explicar la realidad, ofrecer un modelo del mundo. Y para eso las matemáticas servían inevitablemente. No pusieron su atención en las aplicaciones materiales y sociales de las matemáticas, porque eso estaba fuera de su marco ideológico, lo que era una debilidad, pero sí sobre los asuntos del mundo que tenían gran trascendencia para su cosmovisión, como la astronomía, el comportamiento de los astros que, incluso, pensaban, definía el curso y la vida de los individuos.



Pitágoras, estampilla.

Pero volvamos a los pitagóricos. Debe señalarse que los pitagóricos redujeron la astronomía y la música a los números, con lo que éstas establecen un vínculo con la geometría y la aritmética, integración de disciplinas que se preservó incluso en la Edad Media: el Quadrivium. La idea de las leyes matemáticas como verdades acerca de la realidad ha dominado persistentemente la reflexión sobre las matemáticas y las ciencias. Las proposiciones de la matemática no van a ser, entonces, implicaciones lógicas solamente, sino que, precisamente la verdad, la perfección y la única forma de proporcionar certeza. Repetimos: no se trata de afirmaciones válidas siempre contrastables empíricamente, sino verdaderas. Los procesos deductivos matemáticos conducen a un conocimiento verdadero de la realidad. Esta visión es decisiva en la comprensión de lo que hemos llamado en este libro un paradigma racionalista.

Russell lo pone así:

"La mayor parte de la ciencia ha estado unida, al principio, a ciertas creencias falsas que le dieron un valor ficticio. La astronomía estaba asociada con la astrología, la química con la alquimia. Las matemáticas estaban ligadas a un tipo de error más refinado. El conocimiento matemático pareció seguro, exacto y aplicable a la realidad; además, se adquiría solamente por el pensamiento, sin necesidad de la observación. Por consiguiente, se creía que proporcionaba un ideal, del que el conocimiento empírico corriente distaba mucho. Se suponía, basándose en las matemáticas, que el pensamiento era superior a los sentidos, y la intuición a la observación. Si el mundo de los sentidos no es apto para las matemáticas, tanto peor para él. Se buscaban de distintas maneras métodos para acercarse al ideal del matemático, y las sugerencias que de allí resultaban fueron la fuente de muchos errores en la metafísica y en la teoría del conocimiento. Esa forma de filosofía empieza con Pitágoras." [Russell, B.: Historia de la filosofía Occidental, Tomo I, p. 54]

Esta apreciación sobre la relación entre razón y sentidos es un fundamento para las principales ideas de Platón.

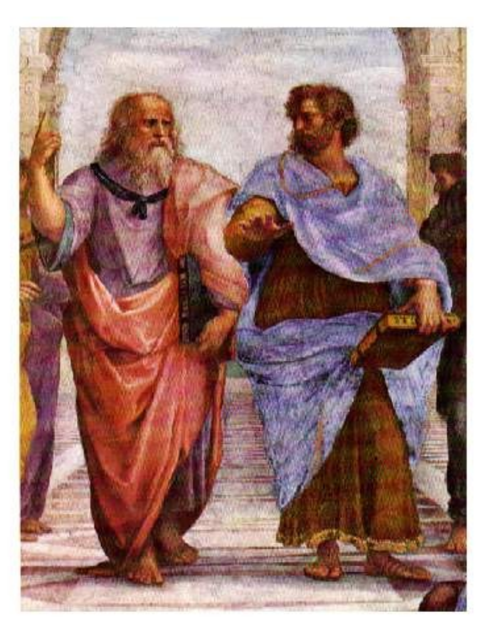
23.2 Platón y las Formas

Una forma de contextualizar la filosofía de Platón es como respuesta a la idea de cambio, lo contrario a la permanencia y el estatismo. Esto, entonces, podría decirse que es la búsqueda de una respuesta filosófica a las ideas de Heráclito:

"Durante largo tiempo se dejó sentir la influencia del descubrimiento de Heráclito sobre el desarrollo de la filosofía griega. Los sistemas de los filosóficos de Parménides, Demócrito, Platón y Aristóteles pueden describirse todos adecuadamente como otras tantas tentativas de resolver los problemas planteados por este universo en perpetua transformación, descubierto por Heráclito." [Popper, K.R.: La sociedad abierta y sus enemigos, p. 27]

¿Cuál era el corazón de la filosofía de Platón? Para Platón, el mundo de los objetos físicos se diferencia del de las ideas; la realidad e inteligibilidad del primero sólo son posibles a partir de las matemáticas del segundo. La verdad de las proposiciones de la matemática, es decir: el problema epistemológico, viene dado, o mejor dicho, está resuelto, por la ontología. Los objetos y las leyes de las matemáticas eran eternas, inmutables, y constituían la esencia de la realidad.

Para Platón, el mundo físico, percibido por los sentidos, era imperfecto, confuso, temporal, se trataba de una copia imperfecta del mundo de las ideas y las formas, al que pertenecían los objetos o conceptos de las matemáticas.



Platón y Aristóteles, detalle de una pintura de Rafael.

Karl Popper lo consigna de la siguiente manera:

"No debe creerse que las Formas o Ideas se encuentran situadas, al igual que los objetos perecederos, en el espacio y el tiempo; por el contrario, se hallan fuera del espacio y también del tiempo (porque son eternas). No obstante, guardan contacto con el espacio y el tiempo, pues dado que son los progenitores o modelos de los objetos corrientes que se desarrollan y declinan en el espacio y el tiempo, tienen que haber mantenido algún contacto con el espacio en el principio de los tiempos. Puesto que no se las encuentra en nuestro espacio y nuestro tiempo, no pueden ser percibidas por nuestros sentidos, a diferencia de los objetos ordinarios y mudables que actúan sobre nuestros sentidos y son denominados, por lo tanto, objetos sensibles. Esos objetos sensibles, que son copias o vástagos de un mismo modelo u original, no sólo se parecen al patrón común, es decir, la Forma o Idea, sino que también se asemejan entre sí, al igual que los hijos de una misma familia; y así como los niños toman el nombre de su padre, también los objetos sensibles toman el de las Formas o Ideas que les dieron origen; para decirlo con las palabras de Aristóteles, 'Reciben su nombre'". [Popper, K.R.: La sociedad abierta y sus enemigos, p. 40]

Se puede decir que para Platón el mundo tiene que adaptarse a las matemáticas, y no al revés. Es la astronomía la que tiene que adaptarse a las construcciones matemáticas, el movimiento de los astros a los círculos y esferas.

Tal como sucede con las Formas e Ideas, a diferencia de los objetos materiales y sensibles, las matemáticas son la realidad. Entre ellos se establecen relaciones que son totalmente independientes de la conciencia de los hombres. Los hombres sólo pueden aspirar a describir las características y relaciones de esos objetos reales, independientes entre sí. Como no son sensibles ni materiales, los

objetos matemáticos sólo pueden ser aprehendidos por la razón. Pero no se trata de una razón, digamos "práctica", como irá a plantearse con el filósofo alemán Kant, que exige instancias constructivas mentales, que requiere esquemas y diagramas como parte inherente de la práctica matemática. En Platón, sólo basta la descripción armónica mental; se trata de una aprehensión directa del objeto matemático. Las leyes de la matemática, repetimos, son entonces eternas. Esta visión que afirma la existencia de objetos matemáticos como seres vivientes en un mundo racional, es lo que, formulado de varias maneras, se ha llamado platonismo en la filosofía de las matemáticas.

Para Platón las situaciones y objetos matemáticos no son idealizaciones o abstracciones de objetos materiales físicos; al revés: éstos son puntos ideales de realidad a los que los objetos físicos aparentes tienden.

En Platón, repetimos, el problema de la epistemología en el fondo desa-parece en sus consideraciones ontológicas. No se trata de establecer las conexiones entre el sujeto y el objeto por la vía de alguna práctica. Basta la razón para captar esa realidad.



Tres gracias, un siglo a.C.

Nuestra capacidad para conocer en la actualidad las leyes de la matemática resulta, según Platón, de nuestra existencia en un estado metafísico anterior.

Ahora bien, hay un legado que Popper atribuye a Platón cuyo significado es relevante para la naturaleza de las matemáticas: constructor del método axiomático. ¿Cómo? Leamos sus palabras:

"Se puede reformular como sigue: 1) el descubrimiento de la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos, que condujo al hundimiento al programa pitagórico de reducir la geometría y la cosmología (y presumiblemente todo conocimiento) a la aritmética, produjo una crisis en la matemática griega; 2) los Elementos de Euclides no son un texto de geometría, sino más bien el último intento de la escuela platónica de resolver dicha crisis reconstruyendo el conjunto de las matemáticas y la cosmología sobre fundamentos geométricos, a fin de tratar sistemáticamente el problema de la irracionalidad en lugar de hacerlo de manera ad hoc, invirtiendo así el programa pitagórico de la aritmetización; 3) Platón fue el primero en concebir el programa que luego llevaría a cabo Euclides.

Fue Platón el primero que se dio cuenta de la necesidad de una reconstrucción; fue él quien eligió la geometría como nuevo fundamento y el método geométrico de las proporciones como el nuevo método; fue él quien definió el programa de geometrización de las matemáticas, incluyendo la aritmética, la astronomía y la cosmología; y también fue él quien fundó la imagen geométrica del mundo y con ello fue también el fundador de la nueva ciencia, la ciencia de Copérnico, Galileo, Kepler y Newton". [Popper, Karl R.: El mundo de Parménides. Ensayos sobre la ilustración presocrática, p. 333]

Además, Popper, refiriéndose a un artículo escrito por otro especialista refuerza esa visión:

"Me gustaría decir de entrada cuánto disfruté yo también con el maravilloso artículo del profesor Szabó. Su tesis, según la cual el método axiomático de la geometría euclídea se tomó de los métodos de argumentación utilizados por los filósofos eléatas, es extraordinariamente interesante y original. Por supuesto, su tesis es enormemente conjetural, como es de esperar de una tesis de este estilo, debido a la escasa información que nos ha llegado acerca de los orígenes de la ciencia griega. (...)

Es la siguiente: la geometría euclídea no es un tratado de matemática axiomática abstracta, sino más bien un tratado de cosmología; se propuso para resolver un problema que había surgido en la cosmología, el problema planteado por el descubrimiento de los irracionales. Aristóteles señaló repetidamente que la geometría era la teoría que trata de los irracionales (frente a la aritmética, que trata de 'lo impar y lo par').

El descubrimiento de los números irracionales destruyó el programa pitagórico consistente en derivar la cosmología (y la geometría) de la aritmética de los números naturales. Platón se dio cuenta de ello y trató de sustituir la teoría aritmética del mundo por una teoría geométrica del mundo. La famosa inscripción que había sobre las puertas de la Academia quería decir exactamente lo que decía: que la aritmética no bastaba y que la geometría era la ciencia fundamental. Su Timeo contiene, frente al atomismo aritmético anterior, una teoría atómica geométrica en la que las partículas fundamentales están todas construidas a partir de dos triángulos que tienen como lados las raíces cuadradas (irracionales) de dos y tres. Platón pasó este problema a sus sucesores, quienes lo resolvieron. Los Elementos de Euclides cumplieron el programa de Platón, ya que en ellos la geometría se desarrolla de forma autónoma, esto es, sin la suposición 'aritmética' de la conmensurabilidad o la racionalidad. Euclides resolvió tan eficazmente los problemas en gran medida cosmológicos de Platón que pronto se olvidaron. Así los Elementos se tienen por el primer texto de matemática deductiva pura en vez de considerarse como un tratado cosmológico que es lo que creo que fueron. [Popper, Karl R.: El mundo de Parménides. Ensayos sobre la ilustración presocrática, p. 342]

Sin duda, es una visión interesante que subrayaría el papel de asuntos ideológicos en la construcción de dimensiones claves de la naturaleza de las matemáticas.

23.3 Matemáticas y universales en Aristóteles

Aristóteles se separó de la visión de su maestro Platón; más que matemáticas creía en las cosas materiales como la fuente de la realidad. El conocimiento se generaba a través de la abstracción y la intuición. La materia estaba compuesta de cuatro elementos: piedra, agua, fuego y aire. Sin embargo, Aristóteles también ponía énfasis en la existencia de primeros principios y la organización deductiva.

Los objetos matemáticos, para Aristóteles, no eran independientes o ajenos a la experiencia como en Platón. Eran abstracciones, idealizaciones, de objetos y realidades materiales independientes a la conciencia subjetiva del mundo físico y no podían tener realidad aparte de las cosas empíricas. Estos objetos no pueden existir per se, sino en los objetos individuales. Los objetos matemáticos de Aristóteles se pueden apreciar como universales.



Vaso griego, 520 a. C.

Para Aristóteles, las cosas materiales son la primera substancia de la realidad. El conocimiento se obtiene de la experiencia sensorial por intuición y abstracción. Sin embargo, las ciencias deductivas abstractas son más importantes:

"La ciencia que no tiene un objeto sensible está por encima de la que lo tiene, como, por ejemplo, la aritmética, que es superior a la música. La ciencia que procede de un número menor de elementos es superior a la que necesita adjunciones, y en este concepto la aritmética vale más que la geometría." [Aristóteles: Tratados de lógica, p. 188]

La aplicabilidad de la matemática, la conexión de correspondencia entre las proposiciones matemáticas y la naturaleza, es posible precisamente por ser abstracciones.



Trinidad femenina, 100 a.C.

Existe un sentido de realidad diferente en las proposiciones matemáticas en Platón y Aristóteles; sin embargo, en ambos las matemáticas se refieren al ser, a una realidad; por tanto, sus proposiciones son verdaderas o falsas. Y, además, Aristóteles seguía afirmando la existencia de entes independientes aunque ejemplificados en las cosas materiales. Como señala Russell:

"La idea de que las formas son sustancias que existen independientemente de la materia en la que son ejemplificadas, parece poner al descubierto a Aristóteles contra sus propios argumentos, contra las ideas platónicas. Él cree que una forma es algo muy distinto de un universal, pero tiene muchas de las mismas características. La forma es más real que la materia; esto es una reminiscencia de la única realidad de las ideas. El cambio que Aristóteles hace en la metafísica de Platón es menor de lo que él cree." [Russell, Bertrand: Historia de la filosofía occidental, Tomo I, p. 187]

Aristóteles señala también la necesidad lógica que existe entre los objetos de la matemática. Este señalamiento que incide en cierta "estructura" de la matemática va a ser retomado y ampliado por Leibniz. Señala Aristóteles:

"Todo conocimiento racional, ya sea enseñado, ya sea adquirido, se deriva siempre de nociones anteriores. La observación demuestra que esto es cierto respecto de todas las ciencias; porque es el procedimiento de las matemáticas y de todas las demás artes, sin excepción." [Aristóteles: Tratados de lógica, p. 155]

Aristóteles establece un modelo para las ciencias demostrativas o deductivas, que parte de tres postulados: deductividad, evidencia y realidad. El primero es el que establece la axiomática; el segundo, la claridad y evidencia de los axiomas y conceptos primitivos; el tercero, que la ciencia demostrativa en cuestión tiene objetos reales. Este esquema codifica las principales características de la aproximación que fue asimilada por Occidente; sin embargo, el énfasis que se ha establecido en unos u otros postulados no es posible de interpretar simplemente como herencia griega. Volveremos sobre esto.

Lo axiomático y formal aparecía como un elemento de las visiones filosóficas clásicas racionalistas griegas.

En el racionalismo moderno el axiomatismo va a ser un modelo de organización cognoscitiva, pero, además, la forma de la estructura del conocimiento.



Thalía.

En la configuración del axiomatismo y el racionalismo en el mundo moderno, ejerció su influencia que la introducción del modelo griego de la ciencia y la matemática haya estado bajo el control de los escolásticos. Como veremos, a la sobrestimación de las matemáticas como recurso de explicación de la realidad se sumaría su asociación con el concurso divino.

En Platón y Aristóteles, aunque no de la misma forma, el acento en lo deductivo y lo verdadero, son partes de su interpretación de la ciencia y la matemática. El esquema axiomático que establece Aristóteles va a sintetizar una aproximación metodológica que manifiestan las obras de los principales matemáticos y científicos griegos. Y va ser aceptado como un requisito teórico. Incluso el mismo Arquímedes a pesar de los procedimientos heurísticos y de prueba y error que usó (El método), tuvo que asumir ese requisito en la formulación de sus trabajos en la mecánica.



Aristóteles, estampilla.

El énfasis en lo deductivo y axiomático en la definición de las matemáticas, tuvo que ver con premisas ideológicas, filosóficas, sobre la naturaleza de las matemáticas y del conocimiento. Ideología y geometría sintética, limitada, sin aritmética ni álgebra, tienen una relación estrecha en este escenario intelectual. La influencia platónica se siente en el mundo alejandrino, pero no era la única. El influjo del álgebra y aritmética de otras culturas, el recurso a la heurística (a las palancas como en Arquímedes), a la inducción, la prueba y el error, también pesaron. Fue una situación híbrida y compleja. Aun así, es necesario recordar que fueron hechas muy pocas incursiones en el álgebra y en la resolución de los problemas del continuo (Eudoxo, Arquímedes).

Filósofos que resultaron arquetipos, intelectuales muy influyentes de muchas maneras en la historia del conocimiento, Platón y Aristóteles, no tuvieron contacto con los que serían los mejores desarrollos de la matemática antigua, la alejandrina. Sin duda, la reflexión sobre la naturaleza de las matemáticas después de los resultados y la perspectiva híbrida y ecléctica de los alejandrinos, habría tenido un punto de referencia diferente. Desdichadamente la civilización alejandrina no logró resistir la acometida de los romanos, portadores de la decadencia del mundo antiguo.

23.4 Síntesis, análisis, investigación

1. Comente el sentido de la valoración de las matemáticas en la visión de los pitagóricos y sus implicaciones en la evolución de la ciencia y las matemáticas.
2. Explique por qué en Platón el mundo físico debe adaptarse a las matemáticas.
3. Investigue los conceptos de epistemología y ontología. Use bibliografía adicional. Diga por qué decimos que la epistemología de Platón se resuelve a partir de su ontología.
4. Explique las diferencias en las epistemologías de Platón y Aristóteles.
5. ¿Por qué se afirma que Platón pudo ser el constructor del método axiomático en las matemáticas? Explique.
6. Comente la relación entre ideología, filosofía y naturaleza de las matemáticas en la Grecia Antigua.
7. Ahora vamos a volver a considerar la noción de paradigma que usamos en este libro. Se trata de analizar un texto en el que Kuhn reconsidera el concepto de paradigma. Póngale cuidado.

   "Teniendo una comunidad particular de especialistas, aislada, con técnicas como las que se discutieron, uno puede preguntarse provechosamente ¿qué es lo que comparten sus miembros que explica la relativa saturación de su comunicación profesional y la relativa unanimidad de sus juicios profesionales? Para esta pregunta mi texto original autoriza la respuesta: un paradigma o un conjunto de paradigmas. Pero para este uso, el término, a diferencia del que es discutido más abajo, es inapropiado. Los científicos mismos dirían que ellos comparten una teoría o un conjunto de teorías, y me dará mucho gusto si el término puede ser finalmente recuperado para este uso. Sin embargo, 'teoría', tal como se aplica usualmente en la filosofía de la ciencia, connota una estructura mucho más limitada en naturaleza y alcance que la requerida aquí. Para evitar la confusión se adoptará otro hasta

que el término pueda ser liberado de sus implicaciones usuales. Para los propósitos presentes, sugiero 'matriz disciplinal': 'disciplinal' porque se refiere a la posesión común de los practicantes de una disciplina particular; 'matriz' porque está compuesta de elementos ordenados de varios tipos, cada uno de los cuales requiere de una especificación posterior. Todos, o la mayor parte de los objetos de los acuerdos de grupo que en mi texto original forman paradigmas, partes de paradigmas o paradigmáticos son componentes de la matriz disciplinal, y como tal, forman una función total y reunida. Sin embargo, ellos no están más puestos a discusión aun la de que todos ellos fueran de una pieza. No intentaré aquí una lista exhaustiva, pero adviértase que las principales clases de componentes de una matriz disciplinal podrán ambas esclarecer la naturaleza de mi presente aproximación y, simultáneamente, preparar, a renglón seguido, mi principal enfoque." [Kuhn, Thomas S.: La estructura de las revoluciones científicas, págs. 279-280]

¿Cuáles son las diferencias en el tratamiento que realiza Kuhn de la noción de paradigma?

8. Lea con cuidado el siguiente texto:

"Las influencias de índole filosófica que experimentó Platón contribuyeron a predisponerle a favor de Esparta. Estas influencias, hablando en general, fueron: Pitágoras, Parménides, Heráclito y Sócrates.

Platón extrajo los elementos órficos de su filosofía, de Pitágoras (por medio de Sócrates, o sin él): la tendencia religiosa, la creencia en una inmortalidad, el otro mundo, el tono sacerdotal y todo lo que encierra la metáfora de la cueva; también su respeto a las matemáticas y la manera de mezclar el intelecto con el misticismo.

De Parménides derivó la creencia de que la realidad es eterna e intemporal, y que lógicamente todo cambio tiene que ser ilusorio.

Extrajo de Heráclito la doctrina negativa de que no hay nada permanente en el mundo sensible. Esto, junto con la doctrina de Parménides, le condujo a la conclusión de que el conocimiento no puede deducir de los sentidos, sino que solamente se lleva a cabo por el intelecto. Y ésta manera de pensar se conformaba bien, a su vez, con el pitagorismo.

De Sócrates aprendió, probablemente, a meditar sobre problemas éticos y a buscar más bien explicaciones teleológicas que mecánicas del mundo. Lo bueno dominaba en sus ideas más que en los presocráticos, y es difícil no atribuirlo a la influencia de Sócrates." [Russell, Bertrand: Historia de la filosofía occidental, Tomo I, p. 127]

Explique con mayor detalle las influencias filosóficas que recibió Platón de sus predecesores. Consulte una enciclopedia o una historia de la filosofía.

9. Lea cuidadosamente el siguiente texto.

"Tomados en conjunto los tres grandes filósofos de la decadencia de Atenas señalan decididamente una interrupción del movimiento científico iniciado con los filósofos jónicos. Debido a que el orden social ya no podía avanzar, se repudió la idea de que la naturaleza misma cambiara y se desarrollara. La filosofía dejó de ser progresista y, como parte de la misma reacción, dejó de ser materialista. En su lugar floreció el idealismo, en la forma mística de Sócrates y Platón o en el esquema conformista de Aristóteles. La filosofía enseñó

entonces la aceptación de la vida tal como era, sin ofrecer, a quienes la encontraban intolerable, otra cosa que la resignación a la idea de que sus sufrimientos eran inevitables y formaban parte del gran orden de la naturaleza. Tal filosofía se encontraba en camino de convertirse en religión, sólo que en una religión para beneficio exclusivo de las clases dominantes." [Bernal, John D.: La Ciencia en la Historia, p. 224]

Explique el escenario histórico al que se refiere Bernal. Comente el debate entre materialismo e idealismo al que se refiere el autor.

10. El siguiente pasaje es de la novela de Alfredo Marcos que ya hemos utilizado. Lea el texto con cuidado.

"La indagación sobre el tiempo y el lugar me acercó a la comprensión del movimiento y de las clases del mismo. Para establecerlas hay que saber que existen cinco elementos: dos leves, el aire y el fuego que tienden a escapar hacia la periferia del mundo sublunar, en trayectoria rectilínea: dos graves, la tierra y el agua, cuyo movimiento natural también es rectilíneo, pero dirigido hacia el centro del Universo, que coincide con el centro de la Tierra, nuestra esférica morada; y una quinta esencia que compone el mundo supralunar, el éter, que por naturaleza se mueve según trayectorias circulares, eternamente circulares. Así se explica que la lluvia caiga, que las nubes y las exhalaciones se eleven, que las piedras se hundan en el agua o que los astros giren. Sólo restan los movimientos violentos, de cuya explicación jamás me he sentido satisfecho. Es difícil en efecto, saber por qué la piedra sigue avanzando una vez separada de la honda o de la mano que la impulsa, ¿quizá por algún extraño reflujo del aire?, quién sabe. Otros tendrán que partir de este enigma que yo tan sólo puedo dejar apuntado." [Marcos, Alfredo: El testamento de Aristóteles, memorias desde el exilio, pág. 204]

Obtenga algunos de los elementos de la cosmología de Aristóteles que se reflejan en este pasaje.

11. Estudie el siguiente texto.

"Aristóteles describió el proceso por el cual se descubría la forma inductivamente como un proceso de abstracción a partir de los datos proporcionados por los sentidos y defendió que había tres grados de abstracción que revelaban tres aspectos diferentes de la realidad. Los correspondientes a las ciencias físicas (o ciencia natural), a las matemáticas y a la Metafísica. El objeto que estudiaba a la física era el cambio y el movimiento de las cosas materiales; el objeto estudiado por las matemáticas era abstraído del cambio y de la materia, pero podía solamente existir como atributo de las cosas materiales; la Metafísica estudiaba las sustancias inmateriales con existencia independiente. Esta clasificación suscitaba la importante cuestión del papel de las matemáticas en la explicación de los fenómenos físicos. Los objetos estudiados por las matemáticas, decía Aristóteles, eran abstractos, aspectos cuantitativos de las cosas materiales. Por tanto, diferentes ciencias matemáticas tenían subordinadas a ellas ciertas ciencias físicas, en el sentido que una ciencia matemática podía a menudo proporcionar la razón de hechos observados por la ciencia física. Así, la Geometría podía razonar o explicar hechos de la Optica y de la Astronomía, y el estudio de las proporciones aritméticas podía explicar los hechos de la armonía musical. Las matemáticas, al hacer abstracción del cambio, no podían dar ningún conocimiento de la

causa de los fenómenos observados. Solamente podía describir sus aspectos matemáticos. Con otras palabras, las matemáticas por sí solas nunca podían dar una definición adecuada de sustancias o, como se la llamaba en la Edad Media, de la 'forma sustancial', que era causa del cambio, porque trataba solamente con atributos matemáticos; una definición adecuada de la sustancia causal podía ser solamente alcanzada considerando todos los atributos, tanto los no matemáticos como los matemáticos. Y de las diferencias cualitativas como las que hay entre la carne y el hueso, entre un color y otro, entre el movimiento hacia arriba, hacia abajo y circular, Aristóteles decía que no podían ser reducidas a meras diferencias geométricas. Este era un punto en que Aristóteles se apartaba de Platón y los atomistas griegos." [Crombie, A.C.: Historia de la ciencia. De San Agustín a Galileo siglos V-XIII, p. 71]

Explique las convergencias y diferencias entre Aristóteles y Platón y los atomistas, según Crombie.

12. Estudie el siguiente texto de Aristóteles.

"Llamo universal lo que es atribuido a la vez a todo el objeto, que le es esencial, y que se da en el objeto en tanto que el objeto es lo que es. Resulta de aquí evidentemente que lo que es universal en las cosas, es igualmente necesario. Esencial y en tanto que el objeto es lo que es, son expresiones equivalentes. Por ejemplo: el punto y lo recto son atribuidos esencialmente a la línea; porque se dan en ella en tanto que es línea. Dos ángulos rectos constituyen el valor del triángulo en tanto que triángulo; porque esencialmente el triángulo tiene sus ángulos iguales a dos rectos. El universal sólo existe a condición de ser demostrado de un objeto cualquiera en el género de que se trate, y de ser primitivo en este género; y así, valer dos ángulos rectos no es universal respecto de toda figura, por más que pueda de-mostrarse que una figura vale dos ángulos rectos, pero nunca puede recaer sobre una figura cualquiera; y además, cuando se demuestra, no se aplica a una figura cualquiera; mediante a que el cuadrilátero, por ejemplo, que también es una figura, no tiene la suma de sus ángulos igual a dos rectos. Por el contrario, un isósceles cualquiera tiene sus ángulos iguales a dos rectos; pero el isósceles no es un primitivo, porque el triángulo es anterior a él. Luego aquello que sin excepción y primitivamente se demuestra que tiene sus ángulos iguales a dos rectos o cualquiera otra propiedad, de este primitivo se dice el universal, y cabe demostración esencial de este universal. Para todo lo demás, por el contrario, la demostración tiene ciertamente lugar hasta cierto punto, pero no es esencial. Y así, respecto del isósceles, la demostración no es universal, en cuanto ella es más amplia que él." [Aristóteles: Tratados de lógica, págs. 160-161]

Explique qué es un universal. ¿Cuál es la diferencia entre universal y esencial según Aristóteles?

CAPITULO XXIV

RACIONALISMO Y MATEMÁTICAS EN LA MODERNIDAD



En Europa, después de la caída definitiva de Roma y después de los siglos de oscurantismo medieval, las ideas van a tener impresas un sesgo teológico: la premisa antigua del mundo explicable a través de la matemática se transformó en la idea de la creación (por Dios) de la naturaleza con un orden interior matemático. Esto sería un telón de fondo relevante para muchas de las reflexiones que se dieron en torno a la naturaleza de las matemáticas. Pero vayamos a la filosofía de las matemáticas, eso sí, desde un punto de vista general.



Burgueses de Calais, Rodin.

24.1 Un panorama general

Ya hemos visto cómo para la ciencia, en especial la física, el siglo XVII fue decisivo en los aspectos metodológicos. Fue un momento clave que afirmó un énfasis en la indagación empírica y, también, en una comprensión cuantitativa y matemática de la realidad, todo en ruptura con premisas ideológicas o filosóficas que habían sido dominantes en la Edad Media. En la filosofía, en el siglo XVII también puede decirse que los asuntos de método fueron dominantes. Hay, claro está, una relación entre los asuntos metodológicos en la ciencia y en la filosofía.

El número de tratados sobre lógica no aumentó con relación al siglo precedente, pero en definitiva el espíritu cambió: para empezar, aparece Descartes con su Discurso del Método, que logró inspirar grandes tratados acerca del pensamiento y de la noción de verdad.

Del siglo XI al XV la historia del pensamiento va a conservar o enfatizar su interés en los problemas teológicos que ya venía discutiendo la Patrística. Es la época de la Escolástica. Aquí hay una relación ente fe y razón, pues la Escolástica va a tratar problemas filosóficos que surgen con ocasión de cuestiones religiosas y teológicas. Puesto de otra manera: los dogmas del cristianismo se buscaron explicar a partir de una explicación racional.

¿Cómo resumir intelectualmente lo que fue la Escolástica? Una específica unidad teológica y filosófica que buscaba integrar la fe cristiana y las concepciones platónicas y aristotélicas de la Antigüedad. Sin embargo, la filosofía medieval o escolástica se construyó en un mundo controlado con mano dura por la Iglesia Católica. Por eso, el pensamiento de esta época estuvo aprisionado por preceptos religiosos, el dogma dominante y por los hombres que lo defendían. Pero, debe subrayarse: usando la hoguera si lo juzgaban necesario para asegurar sus posiciones. Con toda claridad: la Escolástica no fue la expresión de un pensamiento libre. Lo que de creativo pudiera aparecer debe entenderse en un contexto histórico tremendamente oscuro para la evolución de la humanidad y su progreso; un escenario histórico que aparece como resultado de la decadencia del mundo antiguo en Occidente.

En la Edad Media

Los tres problemas capitales de la filosofía de la Edad Media se refirieron a: la creación, los universales y la razón. Para el interés de nuestro libro, tal vez lo más significativo de mencionar es la disputa en torno a los universales, que estuvo presente en toda la época escolástica. Los universales son los géneros y las especies y se oponen a los individuos; la cuestión radicaba en saber qué tipo de realidad corresponde a estos universales. Los objetos que se presentan a nuestros sentidos son individuos: este hombre, ese árbol. Los conceptos con que pensamos esos mismos objetos son universales: el hombre, el árbol. Se plantea, pues, el problema de saber en qué medida nuestros conocimientos se refieren a la realidad. Russell lo interpreta así:

"Hasta cierto punto, la teoría de los universales es muy sencilla. En el lenguaje hay nombres propios y adjetivos. Los nombres propios se aplican a cosas o personas, cada uno de los cuales es la única cosa o persona a la cual se aplica el nombre en cuestión. El Sol, la Luna, España, Napoleón son únicos; no son un número de ejemplos de cosas a los que se aplican estos nombres. Por otro lado, las palabras como gato, perro, hombre se aplican a muchas cosas diferentes. El problema de los universales trata del significado de tales palabras, y también de adjetivos como blanco, duro, redondo, etc." [Russell, Bertrand: Historia de la filosofía occidental, Tomo I, p. 184]

Bajo el influjo de la época renacentista y de la escolástica se constituye el descubrimiento de la "razón matemática", en nuestra opinión uno de los fundamentos del Racionalismo moderno. Durante el siglo XVI y el XVII se construyen los grandes sistemas racionalistas en la física y en la filosofía. En la física con Galileo y Newton. En la filosofía, podemos decir que con Descartes, Spinoza y Leibniz. Pero empecemos con el Empirismo.

El Empirismo

Desde el siglo XVI y hasta el XVIII se desarrolló en Inglaterra una filosofía con caracteres propios, definidos y distintos: el Empirismo. Esta aproximación exhibía una preocupación menor por las cuestiones rigurosamente metafísicas y más por la teoría del conocimiento y, también, por otra parte, por la filosofía del Estado. Metodológicamente, frente al Racionalismo apriorístico y matemático la filosofía inglesa afirmó un empirismo sensualista que subraya la experiencia sensible en la construcción del conocimiento.

El empirismo tuvo un papel relevante en la constitución intelectual del mundo moderno. Sin duda, el rescate y la ampliación de las tradiciones que enfatizaban la experiencia sensorial y la confrontación práctica en el conocimiento fueron esenciales para el devenir de la ciencia y la configuración de una nueva sociedad.

Lo más importante con las ideas empiristas de ese siglo fueron: una crítica de la facultad de conocer (que en algunos casos fue llevada hasta el escepticismo), la tolerancia, los principios liberales y, como reacción práctica contra el escepticismo metafísico, una filosofía del "sentido común." También, la moral utilitaria y el pragmatismo forman parte de este escenario intelectual.

El siglo XVII

El siglo XVII fue un momento decisivo para la historia del pensamiento y de la sociedad. En su justa proporción, además del Empirismo, el mismo pensamiento escolástico, el método cartesiano y la contraposición "continental" al Empirismo inglés, deben interpretarse bien para comprender mejor el pensamiento del siglo XVII.

Podemos decir que la Modernidad de Descartes, en buena parte, consistió en la utilización del modelo matemático en la filosofía: las matemáticas van a constituir la certeza de su método. El modelo matemático con Descartes adquiere un alcance que se puede juzgar como revolucionario: inaugura una racionalidad que trata de colocarse por encima de las limitaciones del Empirismo y de una metodología e ideología dominantes basadas en convenciones verbales y en la autoridad.

Antes de Descartes, por ejemplo en la tradición platónica y aristotélica, las ideas o esencias estaban fuera del ser humano. Con Descartes, la idea verdadera va a ser innata, inmanente al ser humano; es más: procede del interior del hombre mismo, aunque, ya con precisión, de su pensamiento. Si se quiere, hay una humanización de las ideas. De hecho, puesto todo en contexto histórico, ésta es una dimensión muy progresiva del Racionalismo.

La filosofía que elaboró Descartes abandonó el terreno de la teología filosofante de la Edad Media para dar paso a un nuevo concepto del individuo: un ser pensante por naturaleza, pero, también, se enfrentó al empirismo sensualista británico simultáneamente. En el mismo sentido, el pensador "moderno" de esta época no es ya un escolástico, pero le resultará difícil y hasta "peligroso"

abandonar la importancia del concepto de Dios para la justificación y veracidad de su pensamiento.

¿Teología en la Modernidad? Bueno, así fue. La Europa del siglo XVII era aún profundamente religiosa, por lo que era difícil establecer ningún sistema importante que no hiciera de Dios garantía de la verdad, ya fuese por su bondad, como sucede en Descartes, o ya sea por necesidad lógica, como sucede en Spinoza o Leibniz.

Sin embargo, las cosas cambiaron radicalmente, a pesar del ropaje religioso. La idea de Dios fundada en los dogmas y la teología de la Escolástica va a ser suplantada por la idea de la importancia de la razón humana y la naturaleza. Dios pasa a ser, apenas, una condición necesaria para la conquista de la verdad dentro del nuevo método.

Durante el siglo XVII debemos señalar tres elementos relevantes: Descartes y la implantación de su método, con el uso del modelo matemático y la noción de ideas innatas; Spinoza y su sistema metafísico a partir de la definición constructiva de los geómetras; Leibniz y la búsqueda de un método de combinatoria algebraica en el pensamiento para todas las ciencias. Y, con Leibniz también, para las matemáticas, una asociación estrecha entre matemáticas y lógica, que sería retomada a finales del siglo XIX en los planes de fundamentación de las matemáticas.

Es evidente que no sólo en la especulación pura vamos a encontrar substrato para la acción del pensamiento. Como hemos reseñado ya, el siglo XVII fue relevante por la revolución científica y matemática. Estas circunstancias no estuvieron desligadas de filosofía y metafísica. También, no está de más subrayar que tanto Descartes como Leibniz contribuyeron sustancial y directamente a esta revolución que luego incluirá geometría de coordenadas y cálculo infinitesimal. La filosofía de la Modernidad está íntimamente ligada a la revolución matemática y científica de los siglos XVII y XVIII.

El Racionalismo

Nos repetimos: para los grandes pensadores racionalistas del siglo XVII, el método de las matemáticas resultaba el mejor y más seguro camino para buscar y para enseñar la verdad. Es decir, había que introducir en la investigación y la exposición de las ciencias, el método de demostración de las conclusiones por medio de definiciones, postulados, axiomas; todo inmerso en un edificio de rigor racional. Las definiciones, en efecto, son vistas como explicaciones de los términos y nombres que designan las cosas que serán tratadas. Se trata de los postulados y los axiomas o nociones comunes al espíritu: proposiciones tan claras y distintas que nadie que haya comprendido correctamente las palabras puede negarse a darles su verdad.

El método geométrico-axiomático fue tomado por Descartes y Spinoza como fundamento para asentar el conocimiento.

No obstante, como analizaremos después, ese método es el de la geometría clásica griega, que no es más que uno de los componentes de las disciplinas matemáticas, como pudimos apreciar en la parte histórica de este libro.

Más aún, algo decisivo, se coloca la fuente de la verdad en la mente, por eso las matemáticas son vistas como la clave, y no la observación, la experiencia sensorial, la indagación empírica. El mundo aquí sigue siendo geométrico, y se accede a él por la introspección. No se puede negar aquí la influencia de la ideología o filosofía racionalista de los antiguos griegos.

Vamos ahora a considerar con algún detalle las ideas de Descartes y Leibniz y trazaremos apenas unos trazos de Spinoza. Luego, finalmente, iremos a estudiar algunas de las ideas de Kant, ya en el siglo XVIII. El conjunto de las ideas por estudiar nos permitirá describir los rasgos fundamentales de la filosofía de las matemáticas previa al siglo XIX y a la época que más nos interesa entrar, aquella que se suele denominar la de los "fundamentos de las matemáticas", entre el último tercio del siglo XIX y el primero del siglo XX.

Como usted sabe, los dos primeros filósofos los hemos encontrado varias veces a lo largo de este libro, debido a sus importantes contribuciones matemáticas. Sus aportes metodológicos, especialmente en el caso de Descartes, ya los hemos reseñado. Y nadie podría dudar de su trabajo revolucionario tanto en las matemáticas como en la visión mecanicista que aportó. Sin embargo, ahora necesitamos ir a la reflexión más general, la filosófica, para realizar una valoración más profunda, y con un énfasis (o vocación) más bien en ideas que luego serán relevantes.

24.2 Descartes

Nadie se atrevería a dudar del papel jugado por Descartes en las matemáticas: la geometría analítica, cuya paternidad también debe dársele a Fermat, resultó esencial para la constitución del Cálculo y, por ende, de la matemática moderna. Pero Descartes fue, sobre todo, un filósofo que tuvo mucha proyección, y en cuyo pensamiento se nota una profunda influencia de las matemáticas y de las ideas que sobre ésta se tienen en su tiempo. Vayamos ahora a estudiar los aspectos generales de su método.



Descartes, estampilla.

El método en la filosofía

Descartes afirmaba la posibilidad de establecer un método que nos pueda conducir a un conocimiento profundamente nuevo de la verdad de las cosas. Este se basaba en el "método de los matemáticos." ¿Cuál es ese método? Ya veremos. En su Discurso del método dice:

"Encontraba placer sobre todo con las matemáticas, a causa de la certeza y evidencia de sus razones; pero yo no notaba aún su verdadero uso y ... me extrañaba de que, siendo sus cimientos tan firmes y tan sólidos, no se hubiera construido sobre ellos nada más levantado." [Descartes, R.: Discurso del método, p. 18]

Esto es lo central.

Para Descartes, las ideas que surgen de la experiencia sensible no expresan la verdadera naturaleza de las cosas. Los sentidos siempre nos pueden engañar. Por eso propuso ir a las ideas internas, innatas, que no admiten duda. Estas ideas innatas, sin embargo, van a traer consigo el descubrimiento de verdades garantizadas, solo que por medio de Dios. Critica a los empiristas por no salirse de los sentidos. Afirmaba Descartes: "... en el sentido (...) la idea de Dios y del alma no han estado nunca." Esos filósofos a los que critica "...no elevan nunca su espíritu más allá de las cosas sensibles ... y todo lo que no es imaginable les parece no ser inteligible." [Descartes, R.: Discurso del método, p. 50]

Descartes intentará reducir los datos de la experiencia a las ideas claras de la razón, de la mente. Y para eso propuso acudir a lo que cree son las matemáticas. ¿Por qué? Para él, los matemáticos han establecido ya que existen medios para demostrar cómo un movimiento engendra una verdad de otra; es decir, nuestra razón logra justificar la naturaleza, su verdad, puesto que comprendemos sus leyes.

¿Qué es verdadero? ¿Cómo establecer que una idea o proposición o teoría sea verdadera? Se requieren criterios de verdad. Podría ser la recurrencia a la experiencia sensorial, como en el Empirismo. Pero no. ¿Qué planteaba Descartes? Decía que el criterio de verdad se establece a partir de las ideas claras y distintas que están en el espíritu y la aplicación de su método. ¿Cómo se logra el conocimiento de la verdad? La primera regla:

"1) ... no aceptar nunca ninguna cosa como verdadera si yo no la conociera ser tan evidentemente, es decir, evitar cuidadosamente la Precipitación y la Prevención; y no incluir en mis juicios nada más que lo que se presente tan clara y distintamente a mi espíritu que no tuviese ninguna ocasión de ponerlo en duda." [Descartes, R.: Discurso del método, p. 30]

Entonces, para Descartes existen proposiciones cuya verdad se impone al espíritu, como, por ejemplo, el llamado cógito: "Yo pienso, luego existo." Hay una razón que permite determinar lo verdadero de lo falso sin salirse de sí mismo, se logra concebir ideas sin necesidad de recurrir al cuerpo sensorial.

¿Cómo es eso? Descartes dice que esa mirada del espíritu sobre las nociones que le son inmediatamente presentes es la intuición. Pero: ¿cómo afirmar aquí la certeza? Esta no podrá engañarnos siempre que sea clara y distinta. Entonces: la verdad nos es dada y debemos comprobarla en nosotros mismos. Repetimos: la verdadera experiencia es interior y no exterior al espíritu. Aquí está la clave.

En Descartes, al considerarse ideas complejas, se debía partir primero de las ideas simples, para constituir de nuevo las ideas complejas. Este tipo de deducción lleva en sí dos momentos principales: el análisis y la síntesis. Recuérdese cómo en matemáticas a veces se parte de los resultados por demostrar, y por medio de la deducción se trata de llegar a proposiciones más simples que se saben verdaderas. Un método clásico de demostración.

El análisis de Descartes se apoya en la enumeración de todos los objetos conocidos o desconocidos, que se designan mediante símbolos.

Todo lo anterior se expresa precisamente en la segunda regla de su método:

"2) ... dividir cada una de las dificultades que examinaría en tantas parcelas como se pudiera y fuera requerido para resolverlas mejor."

Y la tercera:

"3) ... conducir ordenadamente mis pensamientos comenzando por los objetos más sencillos y más fáciles de conocer, para ascender, poco a poco, como por grados, hasta el conocimiento de los más complejos; e incluso suponiendo un orden entre los que naturalmente no se preceden unos a otros." [Descartes, R.: Discurso del método, p. 30]

¿Qué es el análisis? Su objeto es investigar en una verdad o una realidad particular los principios de los cuales se deriva, los principios de donde se deduciría por síntesis.

Aquí se define la naturaleza de la deducción en Descartes, con toda precisión. La intuición es la única manera de conocer. Es preciso entonces, que la deducción sea una intuición continua, es preciso que pasemos de una intuición a otra nueva por la intuición de su relación.

La cuarta regla de su método es:

"... hacer en todo enumeraciones tan completas y revisiones tan generales que estuviera seguro de no omitir nada." [Descartes, R.: Discurso del método, p. 30]

Sólo la intuición intelectual capta los vínculos necesarios entre los términos para guiar el progreso de la inferencia. Por eso, la enumeración, dentro del análisis, desempeña una segunda función en el proceso deductivo, que consiste en controlar la continuidad en la cadena de los razonamientos. Bajo este método, la totalidad de nuestros conocimientos exige que éstos se sigan unos a otros, de la misma manera en que se siguen los términos conocidos de los desconocidos en una ecuación matemática.

Así, pues, tenemos que la reducción del conocimiento a verdades innatas es similar a una forma axiomática. La teoría del conocimiento de Descartes está basada en principios tan claros y distintos que no necesitan explicación: su veracidad está garantizada por Dios, que crea todas las cosas, las esencias y las existencias, "las verdades eternas" que gobiernan el universo y regulan nuestra razón.

Para Descartes:

"... nuestras ideas o nociones siendo cosas reales y que provienen de Dios en todo aquello en que son claras y distintas, no pueden ser en esto sino verdaderas" [Descartes, R.: Discurso del método, p. 51

Más aún: era preciso, por necesidad,

"que hubiese algún otro más perfecto del cual yo dependiera y del cual yo hubiese adquirido todo lo que yo tenía." [Descartes, R.: Discurso del método , p. 48]

El llamado cógito cartesiano: "pienso, luego existo", es el principio y modelo para establecer una evidencia indudable. Es la coincidencia entre el acto de pensar y el yo. "Veo muy claramente que para pensar hay que ser", concluye Descartes.

El mundo en Descartes

¿Cómo analiza el mundo? Con un método semejante. El mundo está determinado en Descartes por la extensión. Además de la Sustancia Infinita que es Dios, aparecen las dos sustancias finitas: la sustancia pensante (el hombre) y la sustancia externa (el mundo).

Según Descartes, los cuerpos existen en cuanto extensos y la idea clara de la extensión es concebida en nuestro entendimiento, con la misma certeza que en las matemáticas. Además: donde hay extensión hay materia.

De hecho, Descartes recurre a las extensiones geométricas para identificarlas con la materia física. Las cosas materiales (las figuras, los tamaños y los movimientos) se diversifican entre sí en el entendimiento según las reglas y principios de la geometría y la mecánica. Ya retomaremos esto.

Para Descartes su método es un instrumento de aplicación universal. Todos los conocimientos especiales pueden generarse a partir de éste. Bien señala Cassirer:

"Lo mismo que todos los números brotan de una operación exactamente determinada, que es la numeración, todos los conocimientos especiales se obtienen y solo pueden obtenerse por medio del 'método'; y así como aquí el camino conduce a lo limitado, aunque la dirección del progreso aparece trazada de antemano de un modo preciso e inequívoco, así también, sin cerrarnos a la plenitud infinita de la experiencia, debemos aspirar a dominarla por medio de un plan y un bosquejo fijo y predeterminado del pensamiento." [Cassirer, E.: El problema del conocimiento, p. 476]

¿Y la experiencia sensorial? Descartes no niega la intervención de la experiencia, solo que ésta aparece en un plano diferente: la dirección viene establecida por el método. Se contrapone al Empirismo, pero no para eliminar la experiencia, sino para ponerla en otra posición.

Matemáticas y metafísica

Uno de los problemas con el enfoque de Descartes con esta metodología matematizante es que se introducen premisas metafísicas aparte del reduccionismo axiomático. Como un todo, sin embargo, el énfasis en el valor de la matemática resulta muy importante, debido al relevante papel de las matemáticas en la construcción del conocimiento moderno.

¿Juegan las matemáticas y la metafísica papeles importantes en la definición del método cartesiano? Sí, sin duda. Las matemáticas, el álgebra y la geometría, definen un modelo epistemológico que enfatiza la deducción. Una primera característica. Pero, además, la metafísica sirve para justificar la aplicación o introducción de los conceptos matemáticos en la realidad. Descartes usa la metafísica para darle validez a su método y para, dentro de su esquema epistemológico deductivo, justificar la verdad de sus axiomas y primeros principios. Si abstraemos la metafísica, tenemos simplemente el modelo de las matemáticas, tal y como era concebido por él.

Si se le "perdonan" a Descartes sus extrapolaciones y la presencia metafísica, su método, como valoración del espacio y posibilidades de las matemáticas, aporta considerablemente a la definición de la ciencia moderna. Es necesario reconocer -lo que en la tradición empírico-positivista no ha sido el caso normalmente- el valor epistemológico de las ideas cartesianas.

Hay que colocarse en el escenario histórico que vivió este filósofo y matemático. Descartes devuelve a la razón humana un papel que los escolásticos habían reducido a la interpretación del verbo divino. No es éste ya mero receptor, sino que actúa de manera activa, aunque el fundamento sea mental y no esencialmente empírico. Descartes se separa del "apriorismo" escolástico, aunque, ya en análisis profundo, contribuye a edificar un apriorismo de nuevo tipo.

Es nuestra opinión que las tendencias dominantes en la filosofía de las matemáticas han sido heredadas de este tipo de apriorismos que en la Modernidad se vieron apuntaladas por este esquema cartesiano.

Existen en Descartes ideas que encierran contradicción. Bien señala Russell:

"Hay en Descartes un dualismo no resuelto entre lo que lo aprendió de la ciencia contemporánea y el escolasticismo que le enseñaron en La Flèche. Esto le llevó a contradicciones, pero también le hizo más rico en ideas fructíferas de lo que hubiera podido haber sido un filósofo completamente lógico." [Russell, B.: Historia de la filosofía occidental, Vol II, p. 190]

Incluso, a pesar del valor que le daba a las matemáticas, y lo que entendía era su método, Descartes consideraba a las matemáticas como un método más que una ciencia. Mason informa:

"Descartes no se sentía atraído por la antigua idea pitagórica de que las consideraciones matemáticas determinaban la estructura del universo, la idea de que los perfectos cuerpos celestes deben poseer la forma perfecta de la esfera y de que sus movimientos deben ser circulares y uniformes. Para Descartes son consideraciones mecánicas las que determinan la forma y movimiento de los cuerpos celestes y ciertamente, de todas las operaciones de la naturaleza. Consideraba a las matemáticas como un instrumento metodológico, sintiendo muy poca simpatía por la actitud de los matemáticos puros. 'Nada hay más fútil que ocuparse de meros números y figuras imaginarias', escribía. Como Bacon, consideraba que los proyectos utilizados constituían un fin importante de la ciencia." [Mason, Stephen F.: Historia de las ciencias. La Revolución Científica de los siglos XVI y XVII. Madrid, p. 60]

Es necesario, como decíamos arriba, saber extraer las premisas metafísicas e inútiles, de las ideas originales y valiosas que han servido para progresar en la aventura del conocimiento y la ciencia.

Resumiendo: Descartes configuró buena parte de la aproximación racionalista en la epistemología, con base en una traslación de los criterios de verdad de la correspondencia con el ser (Aristóteles y escolásticos) a los de rigor, claridad y distinción de las ideas. Es decir, bastaba el análisis de las ideas en sí mismas (reduciéndolas a nociones más simples) para saber acerca de su verdad y falsedad. El recurso a la experiencia empírica, por otro lado, estaba descartado. Y, finalmente, su filosofía asumió y apuntaló una visión axiomática de las matemáticas.

Todas estas ideas apuntalan, también, la afirmación de que existe un mundo fuera de los sentidos y sus percepciones, que es más importante. Para el Racionalismo las matemáticas son una palanca decisiva. Esto lo consigna, por ejemplo, Russell:

"Creo que la matemática es la fuente principal de la fe en la verdad eterna y exacta y en un mundo suprasensible e inteligible. La geometría trata de círculos exactos, pero ningún objeto sensible es exactamente circular; por muy cuidadosamente que manejemos el compás, siempre habrá imperfecciones e irregularidades. Esto sugiere la idea de que todo el razonamiento exacto comprende objetos ideales, en contraposición a los sensibles; es natural seguir adelante y argüir

después que el pensamiento es más noble que los sentidos y los objetos de la idea más reales que los que percibimos por los sentidos. Las doctrinas místicas respecto a la relación del tiempo con la eternidad también se apoyaron en las matemáticas puras, porque los objetos, como los números, si son reales, son eternos y no colocados en el tiempo. Estos objetos eternos pueden ser concebidos como pensamientos de Dios. De allí se deriva la doctrina de Platón de que Dios es un geómetra, y la de sir James Jeans de que Dios ama la aritmética. La religión racionalista en contraposición a la apocalíptica ha sido completamente dominada desde Pitágoras y, sobre todo, desde Platón, por las matemáticas y sus métodos." [Russell, Bertrand: Historia de la filosofía occidental, Tomo I, p. 56]

Hemos reseñado la influencia de las matemáticas en la filosofía, más bien una visión de éstas sobre la filosofía; ahora vamos a algunas de sus ideas precisas sobre las matemáticas.

Sobre las matemáticas

Para Descartes la matemática era la esencia de la ciencia.

Como ya lo hemos mencionado, Aristóteles afirmaba tres postulados en las ciencias deductivas o demostrativas: el postulado de la deductividad, el de la evidencia, y el de la realidad.

El primero afirma que una ciencia demostrativa se basa en un número de principios; entre ellos hay conceptos primitivos y verdades primitivas. Los conceptos se deben definir por medio de los conceptos primitivos y las verdades deducidas lógicamente de las verdades primitivas.

El de la evidencia señala que los conceptos primitivos deben ser tan claros que no se requiera ninguna definición; igual con los axiomas, son tan evidentes que los aceptamos como verdaderos sin demostración.

El postulado de la realidad exige que tanto los conceptos como las verdades se deben dirigir a entidades de la realidad.

Del modelo aristotélico, Descartes afirmaba la deducción y la axiomática, pero también la intuición.

Para Descartes, los conceptos de la matemática fueron puestos por Dios, son innatos. Es este el puente entre la deducción y la intuición. Los primeros principios fueron puestos por Dios y son absolutamente intuitivos, el resto en matemáticas es deductivo, aunque la deducción requiere de una intuición particular.

A pesar del valor que le otorgaba a las matemáticas, Descartes señalaba que el silogismo lógico no bastaba para producir la ciencia o para asegurar el razonamiento matemático. Dice en su Regla XIV:

"... puesto que las formas del silogismo no sirven para nada en cuanto a percibir la verdad, no será inútil al lector, tras haberlas rechazado completamente, el percatarse de que todo conocimiento que no se adquiere por la intuición pura y simple de un objeto aislado, se adquiere por comparación entre sí de dos o más objetos."

Buscaba un fundamento mayor; si se quiere, una certeza mayor. Esto es interesante. Lo que Descartes añade es ese reclamo de una intuición. Y no solo la divina como en las ideas innatas, sino una intuición aplicada a un objeto intermedio. Por ejemplo, dice en su Quinta meditación:

"Cuando imagino un triángulo, si bien puede ser que no haya en lugar alguno del mundo, salvo en mi pensamiento, semejante figura, y que no la haya habido jamás, no por ello deja de haber cierta naturaleza, forma o esencia determinada de esta figura, la cual es inmutable y eterna, que yo no la he inventado y que no depende de modo alguno de mi espíritu; según aparece del hecho de que se puedan demostrar propiedades diversas de tal triángulo, a saber, que sus tres ángulos son iguales a dos rectos, que el ángulo mayor se apoya en el lado mayor, y otras semejantes, las cuales, quiéralo yo o no, reconozco ahora muy clara y evidentemente que están en él, por más que anteriormente no haya pensado en ellas de modo alguno... "

Descartes, establecía la necesidad de una "contemplación" de un objeto individual a la hora de realizar las conclusiones matemáticas. Es decir, el razonamiento matemático no está desprovisto de un objeto, que en su caso, como señala Beth, es del mismo tipo que emerge al referirse a un triángulo, "la esencia del triángulo". Este objeto individual, es necesario en tanto la intuición necesita objetos particulares para actuar.

Aquí es necesario establecer una conclusión, que nos servirá para distinguir el pensamiento de Descartes. La intervención de la intuición en el razonamiento matemático establece una óptica diferente a la de la simple "deducibilidad" lógica. Lo que conecta el edifico piramidal y axiomático es un conjunto de intuiciones y no la silogística. Se trata de un intuicionismo a priori que luego Kant va a continuar.

El postulado de la experiencia, ya puede usted concluirlo, no se afirma aquí, puesto que Descartes no le reconoció valor.

Una matemática universal

Descartes afirmaba, también, la idea de una matemática universal: un ideal esencial que resulta determinante para la ciencia y el conocimiento. Esta mathesis refiere a una combinación de álgebra, geometría y lógica. Como señala Cassirer:

"La lógica y la teoría de las magnitudes deben combinarse y unirse, para crear el nuevo concepto de la matemática universal. Esta nueva ciencia toma de la lógica el ideal de la construcción rigurosamente deductiva y el postulado de los primeros fundamentos 'evidentes' de la argumentación, al paso que determina el contenido que a estos fundamentos debe darse tomando como modelo la geometría y el álgebra." [Cassirer, E.: El problema del conocimiento, p. 454]

Esta matemática universal tendrá un alcance diferente con relación a que se considere el conjunto de la obra filosófica o cosmológica de Descartes o solo la parte estrictamente matemática. Brunschvicg dice:

"Queda por conocer cuál es exactamente, tomándolo en sí mismo, el alcance de esta matemática universal (...); la respuesta será diferente, según se considere la obra de Descartes en la filosofía general, es decir, la extensión del método matemático a la universalidad de problemas cosmológicos, o que se detenga únicamente a la obra que Descartes realiza en el dominio propio de la matemática por la reducción de los problemas de la geometría a los problemas del álgebra." [Brunschvicg, Leon: Les etapes de la philosophie mathematique, p. 107]

Se puede afirmar que la mathesis universalis cartesiana se reduce a una extensión de los métodos geométricos a los problemas de las ciencias.

La palanca teórica que utiliza es la redefinición del espacio en términos de extensión y proporción, como señala Gerd Buchdahl:

"El tema de que la extensión y comparaciones entre extensiones es la materia propia de la ciencia, ha sido previamente abordado más ampliamente en Regulae XII y XIV." [Buchdahl, Gerd: Metaphysics and the Philosophy of Science, p. 85]

Más aún:

"... es siempre el criterio general de la relación y la proporción el que sirve de punto de partida y de criterio de unidad. Por tanto, una ciencia pura de las 'relaciones' y 'proporciones' -independientemente de la propia peculiaridad de los objetos en que se expresen y tomen cuerpo- y la meta primera a que tiende el método." [Cassirer, E.: El problema del conocimiento, p. 454]

El establecimiento de proporciones es la base de la medición espacial; es esto lo que quiere decir cuando se refiere a la extensión.

Para Descartes, la extensión es un elemento constitutivo de la esencia de la matemática universal, pero también lo es el "orden", y, con relación al espacio, también la "dimensión." La matemática universal de Descartes toma como punto de partida las ideas "claras y distintas" de extensión y orden.

La reducción cartesiana a la extensión, sin embargo, no es una observación empírica. Se trata de una premisa metafísica frente al mundo. A través del cristal de lo "extenso" el mundo va a poder ser desentrañado teóricamente por las reglas de la geometría. Se trata de hacer encajar el esquema a priori de las reglas geométricas. Este es un método clásico escolástico:

"... de sostener que un tratamiento científico exitoso de la naturaleza presupone su ser considerado bajo el aspecto de la extensión, Descartes se introduce en la aserción que la naturaleza (material) es esencialmente equivalente a la extensión, y que esto sólo nos justifica para postular la existencia de la ciencia genuina." [Buchdahl, Gerd: Metaphysics and the Philosophy of Science, p. 89-90.]

La mathesis universalis busca encerrar el conocimiento del mundo en un esquema matematizante. Se trata de englobar la ciencia a partir de lo deductivo matemático.

El mecanicismo cartesiano elevado a cosmología universal es geométrico; es espacial, el movimiento no es fundamental. Esta aproximación va a poseer una gran influencia en el pensamiento occidental.

Su contraposición epistemológica a una metodología empírica de aproximación a lo real influyó extraordinariamente en los siglos pasados. La traslación de los criterios de verdad de la correspondencia con el ser (Aristóteles y escolásticos) a los de rigor, claridad y distinción de las ideas, fue esencial en la construcción del Racionalismo moderno. Y en lo que nos interesa más en este libro, la participación de Descartes en la configuración de la reflexión moderna sobre la matemática no es nada despreciable.

Ahora bien, tanto para las matemáticas como para la ciencia en general, el énfasis racional y axiomático representa una debilidad. Aquí no hay heurística, no hay influjo de la experiencia ni de la práctica sensorial. El modelo de la geometría griega clásica es lo que se ha asumido como paradigma y premisa. Y, si se quiere, se ha asumido buena parte de la herencia de la tradición pitagórico-platónica sobre el papel de las matemáticas como recinto de verdad, certeza, perfección

al margen de lo empírico y sensorial. Hay intuición pero es totalmente a priori. En las matemáticas no sería tan problemático como en las ciencias físicas en las que la heurística y la experiencia sensible son los factores decisivos.

24.3 Spinoza

Baruch Spinoza desarrolló hasta sus extremos el principio en el que se inspiró la filosofía cartesiana. Adoptó en sus escritos la terminología de Descartes y planteó reformar el entendimiento y hacerlo apto para conocer las cosas "como es debido."



Baruch Spinoza.

El encadenamiento de las propiedades derivadas es el encadenamiento causal en lo que tiene de claro y distinto. Como Descartes, afirmaba el papel de las matemáticas: es decir, la geometría. La demostración geométrica tiene valor, por lo tanto, porque representa la verdad deduciéndose y explicándose sin ningún préstamo de las formas específicamente humanas de la conciencia y de la inteligencia; está en que un orden puramente racional, inalterable por el hombre e inviolable por su querer, manifiesta la producción de los seres por el Ser, así como la unión de los espíritus con Dios. Es decir, el método deductivo, su orden, su racionalidad, son el camino que nos asegura la verdad. De nuevo, esto es Racionalismo puro. Aquí no hay heurística, ni experiencia empírica, ni intuición sensorial, etc.

La verdad de una idea está en la manera cómo esta idea es idea y en cómo se dice en su forma, y esto depende únicamente de la naturaleza y de la potencia del intelecto. La cuestión de saber cómo llegamos a formar ideas de cuerpos, nos lleva a considerar las cosas según sus "diferencias, conveniencias y oposiciones."

Será el trabajo de la razón elevarlas a su verdad a partir del método geométrico.

Spinoza trata de plantear una matemática de lo real o de lo concreto. Así, tener una idea verdadera de la elipse es representarse un plano cortando un cono desde cierto ángulo; tener una idea verdadera de un círculo es representarse que una recta de longitud fija gira sobre un plano alrededor de uno de sus extremos, tener una idea verdadera de la palabra es representarse que órganos humanos, dispuestos de cierto modo, imprimen tales movimientos al aire, etc.

Aquí encontramos, entonces, cierto constructivismo geométrico, que posteriormente retomará Kant.

Spinoza no ve otro medio para el hombre de avanzar con certeza en el estudio de las cosas, más que de la manera en que lo hacen los geómetras en el estudio de las figuras y de los sólidos. Intentará que toda certeza se parezca lo más posible a un tratado geométrico, por el orden, el rigor y la claridad de sus demostraciones.

24.4 Leibniz

Leibniz aportó ideas diferentes a Descartes y Spinoza. Le tocó vivir varias décadas después de esos filósofos, y mucha agua había corrido ya bajo el puente. Y, además, las matemáticas y las ciencias de su época ya no eran las mismas de antes.



Leibniz, estampilla.

Leibniz no asumió el típico desdén de la Escolástica que caracterizó a los pensadores del Renacimiento y aún se conservó, al menos externamente, en los primeros racionalistas. Usó las ideas aristotélicas, se dedicó intensamente a la matemática y a la nueva ciencia natural, e hizo progresar las matemáticas de un modo extraordinario. Leibniz fue uno de los fundadores de la nueva matemática, que emerge con el cálculo diferencial e integral. Como usted sabe, su notación resultó más útil que la que Newton desarrolló.

Leibniz partió de la situación filosófica que dejaron Descartes y Spinoza. Leibniz fue tal vez el primer idealista en sentido estricto; en Descartes, el idealismo estaba aún impregnado de realismo y de ideas escolásticas, y Spinoza no era propiamente idealista, aunque sí lo sea el marco teórico de su tiempo.

Para Descartes, como hemos visto, el mundo físico era extensión, y, por eso, algo quieto. La idea de fuerza le era ajena, pues le parecía confusa y oscura e incapaz de traducirse en conceptos geométricos. Descartes creía que la cantidad de movimiento permanece constante. Leibniz afirma

que la constante es la fuerza viva, le parece absurda esa física estática, geométrica. Un movimiento para él, no es un simple cambio de posición, sino algo real, producido por una fuerza. Este concepto de la fuerza es lo fundamental de la física y de la metafísica de Leibniz. La idea de la naturaleza estática e inerte de Descartes se sustituye por una idea dinámica. Frente a la física de la extensión, se establece una física de la energía. Leibniz tiene que llegar a una nueva idea de la sustancia. La sustancia metafísica del mundo es para Leibniz la de las mónadas. Las mónadas son sustancias simples, sin partes, que entran a formar los compuestos. Son los elementos de las cosas. La mónada es fuerza, o mejor, fuerza de representación. Cada mónada representa o refleja el universo entero activamente.

Leibniz afirmaba, como buen racionalista, el pensamiento contra la percepción de "los ingleses" y, frente al ser sensible, lo pensado como la esencia de la verdad.

El sistema monadológico presenta la percepción de las cosas como una categoría ontológica, pues hace referencia a los estados transitorios del proceso de "autodespliegue de la mónada", y no al resultado de recoger y elaborar los datos proporcionados por los sentidos.

Dos principios

Leibniz quería construir un sistema absolutamente racional, es decir, un sistema que lógicamente debe hacer imposible la aparición de las paradojas o contradicciones propias de la filosofía clásica.

En esa dirección, Leibniz distingue dos grandes principios en los que se fundamentan todos nuestros razonamientos: el de "contradicción" y el de "razón suficiente."

El primero es aquel

"... en virtud del cual juzgamos falso lo que encierra contradicción, y verdadero lo que es opuesto a, o contradictorio con, lo falso." [Leibniz, G.: Monadología, p. 31.]

Este primer principio de contradicción, también es llamado de identidad. Señala que toda proposición idéntica, es decir, aquella en la que la noción del predicado está contenida en el sujeto, es verdadera, y su contradictoria falsa. Por ejemplo, la proposición: "A es A" es una proposición necesariamente verdadera; además, es verdadera en todos los mundos posibles, puesto que negarla supone caer en contradicción. No es posible que A sea y no sea a la vez.

El principio de contradicción permite, entonces, juzgar como falso lo que encierra contradicción. Gracias a este principio podemos reconocer si una proposición es falsa o es verdadera; esto es importante: nunca podrá ser las dos cosas al mismo tiempo.

El segundo principio:

"... en virtud del cual consideramos que no puede encontrarse ningún hecho verdadero o existente, ni ninguna enunciación verdadera sin que haya una razón suficiente para que sea así y no de otro modo. A pesar de que esas razones muy a menudo no pueden ser conocidas por nosotros." [Leibniz, G.: Monadología, p. 32]

El principio de razón suficiente es complementario al de contradicción. Se aplica preferentemente a los enunciados de hecho, que se refieren a los entes existentes, sean posibles o actuales.

Este principio de razón suficiente fundamenta toda verdad porque nos permite establecer cual es la condición (razón) de verdad de una proposición. Pero, ya en sentido estricto, el principio de razón se aplica a las proposiciones contingentes, es decir, a las que no excluyen la posibilidad de sus contrarios y enuncian hechos, posibles o actuales (se puede atribuir predicados opuestos al sujeto). La simple atribución de un predicado al sujeto de la proposición contingente no la hace ni verdadera ni falsa; se requiere, entonces de una razón suficiente para que sea de una forma u otra.

Todos nuestros razonamientos, según Leibniz, se basan en estos dos principios: la matemática en el principio de no-contradicción; por el otro, la física en el principio de razón suficiente.

Verdades

Con relación a las proposiciones verdaderas, Leibniz hace una distinción entre verdades: razonamiento y verdades de hecho.

Las verdades de razón (razonamientos) son las necesarias y su verdad se fundamenta en el principio de contradicción.

Las verdades de hecho son las contingentes (empíricas) y su verdad se fundamenta en el principio de razón suficiente.

"Hay dos clases de verdades: las de razonamiento y las de hecho. Las verdades de razonamiento son necesarias y su opuesto es imposible, y las de hecho son contingentes y su opuesto es posible." [Leibniz, G.: Monadología, p. 21]

La verdad de una proposición de razonamiento puede establecerse por análisis (es verdadera si no es contradictoria); es decir, puede establecerse a priori, pero la verdad de una proposición de hecho exige un análisis infinito de causas. Podemos conocer la verdad de una proposición de hecho solamente a posteriori. Las verdades necesarias o son evidentes o pueden reducirse por análisis a otras que lo son. En un sistema deductivo, analizar es demostrar y esto consistiría en verificar una proposición mediante su reducción a otra ya verificada del sistema a que pertenece. ¿Las matemáticas? Por supuesto.

"Cuando una verdad es necesaria, se puede encontrar su razón por medio del análisis, resolviéndola en ideas y verdades más simples hasta que se llega a las primitivas.

Así es como, entre los matemáticos, los teoremas de especulación y los cánones de práctica son reducidos mediante el análisis a las definiciones, axiomas y postulados.

Por último, hay ideas simples de las que no es posible dar definición; también hay axiomas y postulados o, en una palabra, principios primitivos que no podrían ser probados y no tienen necesidad de ello; y estos son las enunciaciones idénticas, cuyo opuesto contiene una contradicción expresa." [Leibniz, G.: Monadología, p. 32]

Las definiciones, los axiomas y los postulados son los principios primitivos de un sistema deductivo. Los principios primitivos serían entonces proposiciones evidentes por sí mismas, y como tales se conocen por simple intuición (son indemostrables). La evidencia de los axiomas se fundamenta en la comprensión de sus términos, solo las proposiciones idénticas pueden ser llamadas propiamente axiomas pues serían intuitivas (indemostrables).

Leibniz distingue entre axiomas universales y axiomas particulares. Los primeros son axiomas de identidad, es decir, se basan en el principio de contradicción y los segundos son los axiomas reducidos a identidad, es decir, deben ser demostrados. Otra vez las matemáticas.

Para Leibniz, el proceso de conocimiento racional parte de las ideas, de las verdades innatas, es decir, de aquellos principios que pueden ser derivados de la mente a partir de ella misma.

Se opone a la idea de la mente como una tábula rasa, en blanco, que se llena solo a partir de la experiencia. Para Leibniz, el espíritu humano contiene ideas innatas necesarias eternas (como las de la Aritmética y la Geometría) principios innatos ontológicos (como, precisamente, los principios de contradicción y razón suficiente). Las verdades innatas son para él, entonces, aquellas que la mente obtiene de sí misma porque las contiene en sí misma (así por ejemplo las proposiciones lógicas o matemáticas).

En Descartes y Leibniz los criterios de verdad descansan en el tratamiento de las ideas de una forma que encuentra origen en el método de las matemáticas, y no en la contrastación empírica. La razón, usada "apropiadamente", es la que da valor a las proposiciones del conocimiento. La reducción axiomática exige darle verdad a principios y a los axiomas, esto es lo que obliga a la intervención de la metafísica y, en mitad de un mundo todavía escolástico, a la acción divina. Filosóficamente, Spinoza y Leibniz apuntalan el Racionalismo, y la sobreestimación del papel de la razón en el conocimiento.

Sobre las matemáticas

Epistemológicamente, las proposiciones de la matemática son verdades porque son "verdades de razón", lo que quiere decir, que su negación es lógicamente imposible. Las verdades de la matemática no se refieren al mundo, en donde se exige una relación práctica "material" con lo real independiente a la conciencia subjetiva, no son "verdades de hecho."

Las leyes de la matemática y la naturaleza poseen una armonía preestablecida por designio divino. Para Leibniz existía también la conexión divina.

Él pensaba que el conocimiento era innato.

Se colocó, también, en el marco del modelo aristotélico pero no sólo no tomó en consideración un objeto real o la experiencia, sino que tampoco la intuición cartesiana. El postulado de la deductibilidad y la axiomática era lo decisivo.

En la matemática, entonces, de lo que se trata es de la reducción a axiomas "primitivos" o "idénticos":

"Por lo demás, hace ya mucho tiempo que he dicho pública y particularmente que tendría importancia demostrar todos nuestros axiomas secundarios, de los que nos valemos ordinariamente, reduciéndolos a axiomas primitivos, o inmediatos e indemostrables, que son aquellos a los que últimamente y en otros lugares he llamado idénticos." [Leibniz, G. citado por Beth. E. W. en el libro: Piaget, Jean y Beth, E.W.: Epistemología matemática y psicología, p. 51.]

Leibniz estableció con gran precisión el plan general de su proyecto. El programa de Leibniz lo reseña Beth así:

"1) La construcción de una teoría (a la que llamaremos lógica pura) que comprende el conjunto de todas las identidades lógicas; en esta construcción se observarían estrictamente los preceptos de la metodología aristotélica.

2) La definición de los conceptos específicamente matemáticos por medio de los conceptos de la lógica pura.

3) La demostración de los axiomas específicamente matemáticos a partir del conjunto de las identidades lógicas y de las definiciones de los distintos conceptos específicamente matemáticos. La necesidad de alcanzar un nivel especialmente elevado de rigor y de lucidez lleva consigo otro paso previo más, también previsto por Leibniz, que es el siguiente:

4) La construcción de un lenguaje formalizado capaz de servir de medio de expresión para la lógica pura." [Beth. E. W. en: Piaget, Jean y Beth, E.W.: Epistemología matemática y psicología, p. 53]

Leibniz funde la lógica con la matemática de un plumazo: las reglas lógicas de la no-contradicción, las leyes de la identidad y del tercero excluido..., son las que dan la base de la epistemología matemática leibniziana.

Leibniz proporciona una teoría de la verdad matemática capaz de ser funcional.

Para Leibniz, es, además, necesario buscar una simbolización de los pensamientos; lenguaje que permita luego a través de un cálculo mecánico resolver las discusiones entre los hombres.

Leibniz, por eso, a diferencia de Descartes y Pascal, va a proporcionar un avance a la lógica formal, ayudándola a salir del estrecho marco en la que la había sumergido la escolástica. La construcción de un "Calculus ratiocinator" fue un proyecto que intentó por lo menos en tres ocasiones, en búsqueda de dar una forma más algebraica a la lógica aristotélica. Señala Bourbaki:

"... unas veces conserva la notación AB

24.5 Kant

Frente a la tradición del Racionalismo continental europeo, la tradición empirista británica tuvo su importancia en la concepción de la reflexión matemática logicista y formalista. Hume cuestionó el valor de las leyes matemáticas de la ciencia, su intemporalidad e inevitabilidad. Negó la deducción como palanca creadora de conocimiento. Para él no había verdad ni en los axiomas ni en los teoremas. Con la navaja de que nada existe aparte de lo que nos es dado inmediatamente en la sensación, Hume fue más allá que Berkeley, desestimando la existencia de un yo permanente aparte de la sucesión de nuestras percepciones internas.



Kant.

El escepticismo de Hume por la vía del empirismo sensualista, puso en cuestión la posibilidad del conocimiento. Para el Racionalismo, el renacimiento del escepticismo obligaba a buscar respuestas. La búsqueda de ellas ha sido una preocupación constante en la historia de la epistemología moderna.

Para Manuel Kant no era posible conocer el mundo en sí, el noúmeno, pero sí conocerlo a través de las categorías subjetivas, y, con toda certeza, era entonces posible conocer lo que es puesto por el sujeto. La matemática, decía, se refiere a la forma de la sensibilidad pura y, por tanto, es posible según Kant dar respuesta al escepticismo de Hume. Existe un conocimiento sintético a priori, del que forma parte la matemática y las partes más generales de la física teórica, la relación causa-efecto, etc.

Si Hume se hubiera dado cuenta de esto, según Kant, no hubiera realizado afirmaciones tan destructivas frente a la "Filosofía pura." La demostración de la verdad de la matemática y la física teórica no se realizaba entonces a través de la experiencia, sino por la vía interior, por intuiciones subjetivas espacio-temporales.

El papel del sujeto

Para Kant, el orden, la racionalidad, que creemos encontrar en lo externo, están dados por lo interno, por el sujeto. La reacción frente al escepticismo no es la afirmación de la realidad exterior y de los mecanismos experimentales del conocimiento, sino la afirmación del sujeto.

Kant, que no deja de sufrir el impacto del empirismo británico, no niega la experiencia. Comienza la Introducción de su Crítica de la Razón Pura así:

"No se puede negar que todos nuestros conocimientos comienzan con la experiencia, porque, en efecto, cómo habría de ejercitarse la facultad de conocer, si no fuera por los objetos que, excitando nuestros sentidos de una parte, producen por sí mismos representaciones, y de otra, impulsan nuestra inteligencia a compararlas entre sí, enlazarlas o separarlas, y de esta suerte componer la materia informe de las impresiones sensibles para formar ese conocimiento de las cosas que se llama experiencia? En el tiempo, pues, ninguno de nuestros conocimientos precede a la experiencia, y todos comienzan en ella." [Kant, M.: Crítica de la Razón Pura, p. 147].

Pero añade que eso no es todo:

"... pues bien, podría suceder que nuestro conocimiento empírico fuera una composición de lo que recibimos por las impresiones y de lo que aplicamos por nuestra propia facultad de conocer (simplemente excitada por la impresión sensible)." [Kant, M.: Crítica de la Razón Pura, p. 147]

El conocimiento a priori es aquel independiente de la experiencia. La experiencia sólo se entiende a través de una estructura interior espacio-temporal. Para Kant las leyes de la matemática no son ni parte de lo real exterior ni están puestas por Dios, están en la base de los mecanismos humanos para racionalizar y organizar las sensaciones. El mundo de la ciencia es el de impresiones sensoriales que son arregladas y controladas por la mente en relación con categorías espacio temporales, de causa-efecto, substancia que trae el sujeto. El mundo de lo a priori es decisivo en Kant, y en éste lo sintético a priori: "La vida o muerte de la Metafísica depende de la respuesta a ¿ cómo son posibles los juicios sintéticos a priori ?." [Kant, M.: Crítica de la Razón Pura, p. 160]

En Kant, a diferencia de Leibniz, la matemática no se coloca prioritariamente en el terreno de la derivación de principios lógicos. No es analítica. La matemática es sintética porque exige la intervención de la intuición (espacio-temporal), y a priori en la medida de que es independiente de la experiencia y no exige una actividad sensible inmediata. Nos dice en Prolegómenos:

"Encontramos que todos los conocimientos matemáticos tienen esa propiedad: que deben presentar sus conceptos de antemano en la intuición y, ciertamente a priori; por lo tanto, en una intuición tal, que no es empírica, sino intuición pura, sin cuyo medio no puede dar ni un solo paso." [Kant, M.: Prolegómenos, pp. 77-78]

Construcción e intuición

Las proposiciones matemáticas describen el espacio-tiempo. Pero, además, la descripción del espacio tiempo requiere en Kant la actividad de la construcción. Es necesario darle un objeto a priori a cada concepto matemático. Esta construcción debe hacerse tomando en cuenta el espacio-tiempo perceptual. Es decir, no es construcción aquella que no es susceptible de ser perceptible, realizable. Una esfera de tres dimensiones puede ser perceptible, una de 20 no. Kant introduce la constructibilidad como la posibilidad teórica a priori de una construcción en el espacio perceptible, de la experiencia.

Esta idea sería importante si replanteada se pudiese conectar con una interpretación de la naturaleza de la matemática no subjetiva, que buscase en la construcción de un modelo teórico de lo perceptible la justificación de las teorías matemáticas, asumiendo siempre la experiencia como instrumento último de sanción. Una tal interpretación tendría que considerar la respuesta de: ¿cómo es el espacio-tiempo "perceptible" para poder construir a priori objetos para los conceptos matemáticos? La solución podría entonces buscarse en el conjunto de resultados y modelos existentes de las ciencias naturales y las posibilidades abiertas por ellos.

La noción de Kant de construcción va unida a la de intuición; hacer matemáticas es construir en la intuición. Kant apunta a la intervención de un objeto en las conexiones deductivas, y llama intuición a la capacidad o condición que hace posible eso. No se trata de correspondencia entre la producción del sujeto y la realidad, sino que es una parte de esa misma producción interior. Kant en esto se adhiere a la corriente que aparece por lo menos con Descartes en el mundo moderno.

Los principales filósofos occidentales abordaron el problema del "objeto matemático." Locke llamaba a la "esencia del triángulo" cartesiana el "triángulo general." Berkeley introdujo la necesidad de una "idea abstracta del triángulo" por la necesidad de conclusiones universales. Incluso Hume se refirió al asunto. Pero es Kant quien lo formuló de una manera precisa en la Crítica de la Razón Pura:

"... sólo las matemáticas contienen demostraciones, pues extraen sus conocimientos no de conceptos, sino de su construcción que cabe presentar a priori como correspondientes a ellos (...) demostraciones que, como indica la expresión, proceden en la intuición del objeto (...). Así pues, para construir un concepto se requiere una intuición no empírica, que es, por consiguiente, en cuanto intuición, un objeto individual, pero que, pese a ello, ha de expresar en la noción, por ser construcción de un concepto (de una noción universal), la validez universal de todas las intuiciones posibles que se incluyan bajo tal concepto." [Kant, M. citado por Beth. E. W. en: Piaget, Jean y Beth, E.W.: Epistemología matemática y psicología, p. 19]

Kant no desestimaba la intuición en la matemática, señalaba que los axiomas son construcciones intuitivas, y que todas las cadenas deductivas están hechas a través de la intuición. No se trata de un cálculo frío y abstracto, en el que todo se saca de los conceptos en sí, sino que la intuición está presente, el sujeto interviene y aporta. No son puramente deducciones, son construcciones. El razonamiento matemático no puede asimilarse a elementos formales, con definiciones arbitrarias, abstractas, de las que se extraen consecuencias. A la manera del geómetra que forma en su mente la imagen de un triángulo y sobre ella construye resultados, verdades, concibe Kant la construcción matemática.

Esa intuición es la que establece los límites de la matemática; la transgresión de la intuición conduce entonces fuera de la verdad: "... el principio supremo de todos los juicios sintéticos es que todo objeto se encuentra sometido a las condiciones necesarias de la unidad sintética de la multiplicidad de la intuición en una experiencia posible." [Beth. E. W. en: Piaget, Jean; Beth, E.W.: Epistemología matemática y psicología, p. 23]

El énfasis en la intuición subjetiva es lo determinante en la visión que Kant posee sobre la naturaleza de la matemática. Esto lo contrapone a la aproximación leibniziana.

Kant y Descartes

Existe una conexión importante entre Kant y Descartes en cuanto ambos se refieren a la necesidad de la intuición. Pero aparte de la diferencia de que para el primero el razonamiento formal es útil y en el segundo no, existe una gran distancia entre ambos. Para Descartes hay una convivencia entre lo deductivo, axiomático, y lo intuitivo; esto último aparece sobre todo en la aprehensión de los primeros principios. Para Kant además de la necesidad de un objeto en el proceso del razonamiento matemático, se establece la necesidad de la construcción susceptible de ser en cierta medida perceptible. Esto lo resume Beth así:

"... Descartes y Kant están de acuerdo en colocar, junto al razonamiento formal o silogístico, un tipo nuevo de razonamiento al que se llamará razonamiento intuitivo a constructivo, y que la descripción que encontramos en Kant, bastante detallada, concuerda en lo esencial con las más sumarias indicaciones que da Descartes. Advirtamos, sin embargo, que sigue existiendo una diferencia entre las concepciones de uno y otro: para Kant, el razonamiento intuitivo no se aplica

más que en las matemáticas, mientras que el formal conserva todo su valor para la filosofía; mas para Descartes, el razonamiento formal está desprovisto de todo valor." [Beth E.W. en Piaget, Jean, y Beth, E. W.: Epistemología matemática y psicología, p. 25.]

Lo central es la intuición; y, más aún, se trata de un replanteo de las nociones de deducción y de verdad. En Descartes la intuición está conectada a nociones innatas puestas por la mano divina; en Kant apunta al sujeto. La intuición en Descartes es de un orden espiritual y abstracto, en Kant es con precisión: espacio-temporal. En Kant, lo que se afirma del modelo aristotélico es la evidencia de los axiomas y de todas las posiciones matemáticas, así como la exhibición de un objeto para ellas. Ahora bien, este objeto no se busca en la realidad independiente del sujeto, porque se piensa que no es posible en el mundo de la experiencia dar respuesta al escepticismo.

La respuesta de Kant es racionalista pero a diferencia de Leibniz no apuntala los aspectos deductivos, axiomáticos y formales del conocimiento.

Ahora bien: ¿qué le sucede a la geometría cuando no hay un espacio sensible como fundamento o los objetos para aplicar la intuición son tan abstractos que se pierden en el vacío? ¿Dónde queda la contrucción de las matemáticas si no hay intuición?



El pensador, Rodin.

Balance

La concepción kantiana sobre la naturaleza de la matemática se colocó en una dirección diferente (dentro del Racionalismo) a la que, como veremos, el logicismo y el formalismo irán a establecer. Mientras que para este último la matemática no tiene objeto, no posee una referencia (más que a lo sumo en los " trazos sobre el papel"), está libre de contenido y es formal, en Kant se establece una incidencia sobre una realidad-objeto conectada en cierta forma con la naturaleza. No llega Kant a buscarla en la naturaleza misma, o en el orden material de la relación sujeto-objeto, pero busca un contenido separado de la metálica evidencia lógica o la estricta manipulación deductiva o calculatoria.

Kant no dio una respuesta racional satisfactoria a la crítica escéptica, y no se salió del gran esquema del conocimiento a priori de la realidad; pero adoptó una aproximación metodológica diferente de aquella que se basa en una reducción de las matemáticas a proposiciones "idénticas".

Con las ideas sobre la matemática de Descartes, Leibniz y Kant es posible tener una primera visión de la reflexión moderna sobre las matemáticas.

En realidad, lo que nos interesa subrayar ahora, es que durante los siglos XVII y XVIII se acuñaron las principales ideas que serían reproducidas o ampliadas mutatis mutandis en el siglo XIX y XX. Aquí ya es posible detectar la existencia de una buena dosis de racionalismo (que hace de la mente productora privilegiada de verdades absolutas y eternas), absolutismo y infalibilismo, y de sobreestimación de la axiomática. Sin embargo, nuevos elementos en el desarrollo de las matemáticas se encargarían de proporcionar más carbón para la chimenea de este tipo de esquemas sobre la naturaleza de las matemáticas.



24.6 Biografías



Roger Bacon

Roger Bacon nació en el año 1 214 en Ilchester, Somerset, Inglaterra. De joven estudió geometría, aritmética, astronomía y música. En 1 241, se graduó de la Universidad de París. Después de graduarse inició a impartir clases acerca de las ideas de Aristóteles en la Universidad de París. De 1 247 a 1 257, estudió en Oxford, en donde se vio influenciado por el trabajo de Grosseteste e inició sus investigaciones en idiomas, matemáticas, ópticas y ciencias.

En 1 257, al encontrarse mal de salud, dejó la universidad e ingresó a la Orden de los Franciscanos desde donde le escribió al Papa Clemente IV en 1 266 pidiéndole su autorización para crear una enciclopedia de todas las ciencias, coordinada por un grupo de la iglesia. Después de que la iglesia se negara a tal petición Bacon escribió tres libros en que desarrollaba estas nuevas ciencias.

En 1 278, fue encarcelado por los Franciscanos al ser “sospechoso” en su forma de enseñar. Después de permanecer diez años en prisión, regresó a Oxford y escribió una pequeña obra acerca de teología un poco antes de su muerte en el año 1 294.

24.7 Síntesis, análisis, investigación

1. Investigue qué es la Patrística. Escriba una síntesis de una página.
2. Describa las principales características de la Escolástica.
3. Investigue qué es, en filosofía, el empirismo y quiénes fueron sus principales figuras antes del siglo XX.
4. Comente el papel que se le asignó a Dios en las ideas racionalistas que emergieron después de la Edad Media.
5. ¿Cuál es el criterio de verdad en el conocimiento que propuso Descartes?
6. ¿Qué papel juegan las ideas claras y distintas, innatas, en la epistemología de Descartes?
7. Comente la relación entre matemáticas y metafísica en Descartes.
8. ¿Cuáles son los tres postulados de Aristóteles para las ciencias demostrativas?
9. Explique el significado de la intuición en Descartes para asegurar verdades y realizar las deducciones en las matemáticas.
10. ¿Qué es la mathesis universalis de Descartes?
11. Comente la relación entre las ideas de Descartes y las de Platón sobre las matemáticas y su aplicación en el mundo.
12. Investigue en un libro o diccionario de filosofía qué es el idealismo. Dé una breve explicación, no más de una página.
13. Explique los dos principios que Leibniz consideraba necesarios para el conocimiento.
14. Explique los dos tipos de verdades que señala Leibniz.
15. Explique cómo era el sistema deductivo para Leibniz.
16. Comente la relación entre Descartes y Leibniz con relación a los criterios de verdad.
17. ¿Qué son las matemáticas para Leibniz?
18. ¿Cuál es el papel de la intuición en Leibniz?
19. Investigue en un diccionario filosófico qué es el noúmeno para Kant.
20. Investigue la diferencia entre analítico y sintético en Kant. Use bibliografía adicional. Explique por qué para Kant la matemática es sintética a priori.
21. Explique y comente el papel de la intuición para Kant en las matemáticas.
22. Explique la relación entre Descartes y Kant en su visión de las matemáticas.
23. Lea el siguiente texto de Bertrand Russell:

    "La influencia de la geometría en la filosofía y el método científico ha sido profunda. La geometría, tal como fue establecida por los griegos, comienza con axiomas que son (o creían serlo) evidentes en sí mismos. Luego avanza la geometría por razonamientos

deductivos hasta los teoremas que no son, ni mucho menos, evidentes en sí. Los axiomas y teoremas se tienen por ciertos en el espacio real, y éste es algo dado por la experiencia. Así parecía ser posible descubrir cosas del mundo real, descubriendo primero lo que es evidente en sí, y después haciendo uso de la deducción. Esta idea influyó en Platón, Kant y en la mayoría de los filósofos intermedios. Cuando dice la Declaración de la Independencia que 'estas verdades las consideramos como evidentes en sí', se rige por Euclides. La doctrina del siglo XVIII de los derechos naturales es una búsqueda de axiomas euclidianos en el campo de la política (evidente por sí mismo, sustituido por Franklin, en lugar de lo 'sagrado e innegables', de Jefferson). La forma de 'los principios' de Newton, a pesar de su materia reconocidamente empírica, está dominada del todo por Euclides. La teología, en sus exactas formas escolásticas, se nutre de la misma fuente; la religión personal se deriva del éxtasis; la teología, de las matemáticas, y ambas se encuentran en Pitágoras." [Russell, Bertrand: Historia de la filosofía occidental, Tomo I, p. 56]

Explique a qué características de las matemáticas juzga Russell como factores de influencia sobre la filosofía.

24. Lea cuidadosamente el siguiente texto de Poincaré.

"Los axiomas geométricos no son, por lo tanto, ni juicios sintéticos a priori ni hechos experimentales.

Son convenciones: nuestra elección entre todas las convenciones posibles es guiada por los hechos experimentales, pero permanece libre, y sólo responde a la necesidad de evitar toda contradicción. Por ello es que los postulados pueden permanecer rigurosamente válidos, aun cuando las leyes experimentales que han determinado su adopción sólo son aproximadas." [Poincaré, Henri: Filosofía de la ciencia, p. 185]

Explique las ideas de este autor.

25. Vamos a comentar el siguiente texto:

"Hay poco del verdadero espíritu filosófico en Aquino. No se dispone a seguir, como el Sócrates platónico, adonde quiera que su argumento le pueda llevar. No se empeña en una investigación cuyo resultado sea imposible conocer de antemano. Antes de empezar a filosofar ya conoce la verdad; está declarada en la fe católica. Si puede encontrar argumentos aparentemente racionales para algunas partes de la fe, tanto mejor; si no puede, sólo precisa volver a la revelación. El descubrimiento de argumentos para una conclusión dada de antemano no es filosofía, sino una defensa especial. No puedo, consiguientemente, admitir que merezca ser colocado en el mismo plano de los mejores filósofos de Grecia o de los tiempos modernos." [Russell, Bertrand: Historia de la Filosofía Occidental, Tomo II: La Filosofía Moderna, p. 83.]

Explique las principales críticas que hace Russell a los aportes de Aquino. Comente los argumentos esgrimidos. Puede usar otros textos adicionales.

26. Estudie el siguiente texto de Poincaré.

"La posibilidad misma de la ciencia matemática parece una contradicción insoluble. Si esta ciencia no es deductiva más que en apariencia, ¿de dónde proviene ese rigor perfecto que

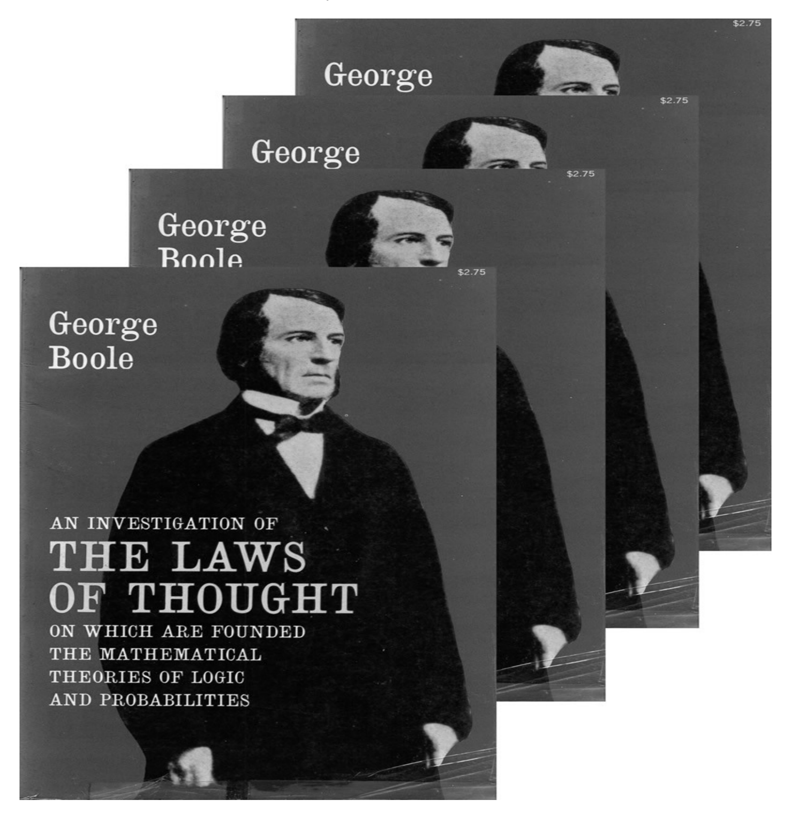
nadie piensa poner en duda? Si, por el contrario, todas las proposiciones que enuncia pueden deducirse unas de otras por las reglas de la lógica formal, ¿cómo no se reduce la matemática a una inmensa tautología? El silogismo no puede enseñarnos nada esencialmente nuevo y, si todo debiera proceder del principio de identidad, también todo debería poder llevarnos de nuevo a él. ¿Se admitirá entonces que los enunciados de todos esos teoremas que llenan tantos volúmenes, no sean más que maneras complicadas de decir que A es A.

Sin duda, se puede remontar hasta los axiomas que están en el origen de todos los razonamientos. Si se juzga que no se los puede reducir al principio de contradicción, ni tampoco se quiere ver en ellos hechos experimentales que no podrían participar de la necesidad matemática, se tiene todavía el recurso de clasificarlos entre los juicios sintéticos a priori. Pero esto no es resolver la dificultad, es sólo denominarla de otro modo; y aun cuando la naturaleza de los juicios sintéticos no tuviera ya misterio para nosotros, la contradicción se habría hecho vaga, por el hecho de alejarse; y el razonamiento silogístico seguirá siendo incapaz de agregar nada a los datos que se le dieron; esos datos se reducen a algunos axiomas, y no debería encontrarse otra cosa en las conclusiones." [Poincaré, Henri: Filosofía de la ciencia, p. 235]

Comente las ideas de este texto con relación a las ideas de los filósofos estudiados en este capítulo.

CAPITULO XXV

MATEMÁTICAS, FILOSOFÍA Y LÓGICA



En este capítulo nos interesa hacer una primera síntesis de las ideas filosóficas que han sido muy importantes en las visiones racionalistas, absolutistas e infalibilistas sobre la naturaleza de las matemáticas. Estas ideas retoman planteamientos que encontramos en Descartes, Leibniz y Kant, pero en un nuevo escenario intelectual, además del propiamente sociohistórico.

Para incursionar en esa etapa de gran efervescencia sobre los fundamentos de las matemáticas, especialmente en el periodo que ocupa el final del siglo XIX y el primer tercio del XX, debemos incidir sobre algunos temas previos. Por un lado, intentaremos resumir con una perspectiva deliberada el sentido de las nuevas matemáticas del XIX, retomando asuntos que ya desarrollamos con total dedicación en la parte histórica de este libro. En segundo lugar, analizaremos un poco la relación entre las nuevas matemáticas y la filosofía. Y, finalmente, incursionaremos en el desarrollo de la lógica moderna, porque éste estuvo directamente implicado en muchos de los intentos fundacionales que se dieron.

Con ese cuadro, en el siguiente capítulo, podremos entrarle al logicismo, al formalismo y al intuicionismo, para, después, proceder a trazar límites y perspectivas de la reflexión sobre las matemáticas.

25.1 Las nuevas matemáticas de los siglos XVIII y XIX

En el siglo XVII se dio históricamente un salto cualitativo en las matemáticas, que abrió un derrotero extraordinario para la producción matemática. Muchos de estos trabajos estuvieron estrechamente ligados a la física. El cálculo en Newton es un ejemplo. Pero hay más. Muchos métodos y resultados fueron empujados directamente por la astronomía y la mecánica.

Las matemáticas del siglo XVIII a diferencia de las del siglo XVII fueron esencialmente cuantitativas, conectadas más estrechamente a la evolución de las ciencias llamadas naturales.

Lo que llama Morris Kline el "Siglo Heroico" configuraba, sin embargo, una situación que podríamos caracterizar como contradictoria. Se tenía una gran producción matemática, un gran éxito en la capacidad de predicción en la ciencia de los resultados matemáticos, y al mismo tiempo "un marasmo lógico en los fundamentos." [Kline, M.: Mathematics. The Loss of Certainty, p. 153] El centro del análisis era el cálculo y a pesar de la enorme oscuridad lógica, a pesar del uso "libertino" de los números, éste experimentó un enorme desarrollo. Los números irracionales eran admitidos a principios del XIX, aunque no los negativos y los complejos. Berkeley aprovechaba el marasmo para atacar a los infinitesimales de Leibniz y a la matemática en general.

Durante el siglo XVIII, las matemáticas que se hicieron estuvieron basadas en la intuición y el sentido físico de éstas y no tanto en la lógica. La confianza de su trabajo, debe enfatizarse, no residía ni en la consistencia ni en las reglas axiomáticas, sino en la aplicación de sus resultados. No es extraña entonces la visión kantiana sobre la naturaleza de la matemática. ¿Cuál es esa visión?

Los problemas en los fundamentos lógicos, si bien habían sido tratados, no ocuparon un lugar preponderante entre los matemáticos, hasta que (a principios de siglo XIX), se evidenciaron elementos de la matemática que rompían supuestamente el esquema de la coincidencia matemática-naturaleza. El surgimiento de las geometrías no euclidianas y la existencia de números que no seguían lo esperable en ellos (los cuaterniones de Hamilton), volcaron las mentes sobre los fundamentos lógicos. Si se miraba hacia el análisis no había fundamento ni en el álgebra ni en la aritmética usadas, y en la geometría había problemas. Los cuaterniones no conmutativos y las geometrías no euclídeas eran, lo que Kline caracteriza, un auténtico desastre.

Este "primer desastre" va a tener consecuencias extraordinarias para la reflexión sobre la matemática y para la evolución de la filosofía de las matemáticas.

Durante el siglo XVIII y principios del XIX, la visión kantiana sobre la matemática se podía apreciar en coherencia con la realidad de lo que es la práctica matemática. Cuando emergen las geometrías no euclidianas y los cuaterniones las cosas no pueden quedar en el mismo sitio. El sentido de la intuición kantiana entra en problemas, sobre todo cuando había asumido como dada en la "intuición" la geometría euclídea.

Los recientes resultados matemáticos señalan la importancia de la estructura y la validez lógica frente a una intuición entendida en conexión con lo sensible. La correspondencia de la matemática con la realidad no había sido entendida en cuanto estructuras susceptibles de tener un modelo capaz de coincidir con lo real, sin relación con la experiencia más que en aspectos planteados en ciertos momentos. Había sido entendida a partir de la relación sensible individual, limitada por las fronteras más directas de las condiciones de los hombres. Si se quiere, se puede decir que la visión que se tenía de la matemática era la que permitía una conexión casi sensorial con el espacio

inmediato y con la realidad material.

Desde el punto de vista teórico, las geometrías no euclidianas no fueron el factor que destruyó la visión kantiana, aunque tal vez así se planteó. El surgimiento de las geometrías no euclidianas y los cuaterniones pusieron de manifiesto la existencia de un nuevo carácter en las matemáticas, que no pudo ser aprehendido por Kant; no porque haya asumido una particular geometría, sino porque las nociones de intuición y construcción que estableció no podían dar cuenta de ese carácter.

La emersión de "lo nuevo" en las matemáticas del siglo XIX afirmaba una separación entre las matemáticas y la realidad. Mostró un camino en el que la manipulación formal y la consistencia lógica ocupan un papel muy importante. Para Kline lo que sucedió era algo que se acumulaba desde el XVIII:

"... un oculto cambio en la naturaleza de la matemática ha sido hecho inconscientemente por los maestros. Hasta alrededor de 1500, los conceptos de las matemáticas eran idealizaciones inmediatas o abstracciones de la experiencia (...). Cuando, además, los números complejos, un álgebra extensiva que emplea coeficientes literales, y en las nociones de derivada e integral entraron en las matemáticas, el asunto empezó a ser dominado por conceptos derivados de los lugares recónditos de las mentes humanas" [Kline, M.: Mathematics. The Loss of Certainty, p. 167].

Para Kline: esta nueva matemática, que crea conceptos más que abstrae, está presente desde siglos anteriores. Sin embargo, lo nuevo no fue comprendido como tal y, entonces, no se entendió la necesidad de un fundamento aparte al de las verdades evidentes.

En realidad, la matemática no es nunca mera abstracción o generalización inductiva; existe un contenido operativo y estructurador en la esencia de la práctica matemática. Los irracionales y negativos en los griegos por ejemplo no eran simples productos de la abstracción; no se trata, entonces, de un cambio de un tipo de abstracción a otro.

El carácter de la nueva matemática del XIX va a estar determinado por el devenir propio de las matemáticas, así como por las condiciones generales de la evolución científica de la época; lo esencial va a ser lo primero.

La producción matemática hasta el siglo XVIII concentró resultados matemáticos extraordinarios que (en la segunda mitad y en la primera del XIX) encuentran un punto de acumulación. Esto engendró una autoconciencia diferente de su práctica que generó una orientación también diferente en ella. La matemática (fusión histórica y social de esfuerzos individuales) entró en el siglo XIX en una nueva etapa evolutiva en la que la conciencia de ella fue uno de sus factores; aunque esta conciencia no correspondiese (en mi opinión) a la esencia de su naturaleza última. Las geometrías no euclidianas y los cuaterniones fueron resultados teóricos que sacudieron el mundo matemático.

Las nuevas condiciones en las matemáticas (y la reflexión sobre éstas) generaron, como lo analizamos antes en detalle, un intento extendido por solventar las debilidades de las matemáticas del XVII y el XVIII. Se sucedieron importantes intentos en búsqueda de la consistencia de las nuevas geometrías y en la rigorización del análisis y el álgebra (Bolzano, Abel, Cauchy, etc.). Recordemos que Cauchy trató de fundamentar el cálculo en el número y en el concepto de límite. El mejor intento en esta rigorización fue hecho por Weierstrass. Este dio una derivación de las propiedades de los irracionales a partir de los racionales, y Dedekind se colocó en la misma

dirección.

En la búsqueda del rigor se buscó la conexión de los infinitesimales, las "operaciones" de derivación e integración y, en general, el continuo real, con la aritmética.

Se puede señalar a Bolzano como iniciador de este proceso, aunque desde el siglo anterior se buscaban formas de rigorización de los resultados obtenidos.

Para Cauchy era necesario buscar definiciones claras y precisas y el establecimiento de las fronteras de los conceptos y las fórmulas. Intentos en la aproximación del análisis y la aritmética fueron realizados por Martin Ohm (1822), y después Grassmann, Hankel y Weierstrass. Pero fue este último el que ofreció una definición rigurosa de los números irracionales a partir de los racionales. Su trabajo implicaba una "... liberación del análisis del tipo de prueba geométrica intuitiva tan prevaleciente en ese tiempo." [Wilder, R.: Introduction to the Foundations of Mathematics, p. 190]. La noción del número real estaba conectada, entonces, a las magnitudes de la geometría.

Otros autores como Dedekind (en sus trabajos de 1872 y 1888) y Cantor, tomando como punto de partida la validez de las propiedades de los racionales, los asociaron a los irracionales, de una manera específica. Nos señala Bell en 1940:

"La definición de Dedekind de los números irracionales como cortaduras en clases infinitas de racionales, las sucesiones de números racionales de Cantor para definir los números irracionales, y los números irracionales de Weierstrass considerados como clases de racionales, todas ellas en definitiva referían el continuo de los números reales a los números naturales. Las 'magnitudes' de Eudoxo quedaban reemplazadas por construcciones hipotéticas realizadas con los números 1,2,3... De este modo, la aritmetización del análisis era una vuelta al programa de Pitágoras." [Bell, E. T.: Historia de las matemáticas, p. 291]

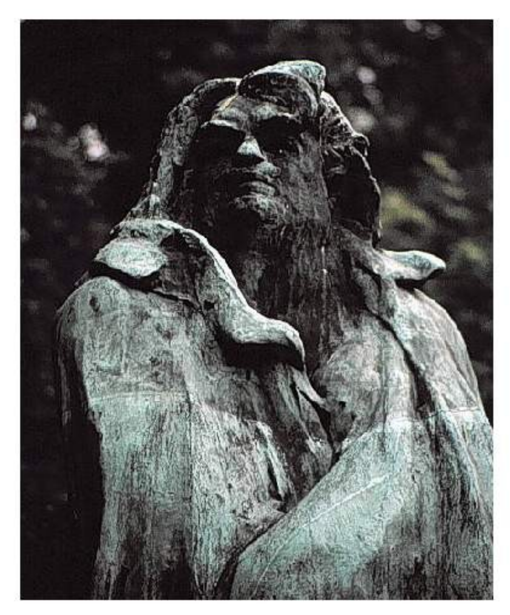
La aritmetización del análisis no se puede considerar un proceso mecánico y simple de rigorización de resultados matemáticos, sino que debe verse integrada a una nueva "autoconciencia" en la evolución de la matemática. La aritmetización va dirigida en el siglo XIX al abandono de la intuición geométrica que había predominado en el cálculo del siglo XVIII; es la búsqueda por aprehender una nueva realidad en la que la validez lógica aparece como central.

Los trabajos de Cantor en lo que se refiere a los fundamentos del análisis continúan la obra de Weierstrass. En las definiciones de los reales el problema residía en la forma de traducir el "paso al límite" a los enteros.

Para Dedekind y también para Weierstrass está presente esta incidencia sobre lo que es una referencia al continuo y, entonces, al infinito. La noción de continuo real implica un proceso matemático (mental si se quiere) cualitativamente diferente al que se manifiesta en la aritmética. Esto tiene implicaciones epistemológicas.

Con la aritmetización del análisis no se trataba simplemente de desgeometrizar el cálculo y de apuntar hacia mejores condiciones lógicas en sus fundamentos; se trataba de una reducción de diferentes nociones conceptuales (referidas a objetos diferentes) a las nociones aritméticas. Este proceso de cualidades diferentes sólo podía ser realizado a partir de una nueva abstracción y, sugiero, a partir de la introducción implícita o explícita de supuestos teóricos sobre la existencia y la naturaleza de las entidades matemáticas.

La aritmetización de las matemáticas es la manifestación, por otra parte, de una intención reduccionista de sus distintos componentes. Es la búsqueda de una unidad teórica en la diversidad, cuyo planteamiento exige una readecuación en la conciencia de la naturaleza de la matemática e incluso del conocimiento.



Balzac , Rodin, detalle.

25.2 Matemáticas y filosofía

La matemática del siglo XIX se puede resumir con la emersión de las geometrías no euclidianas, la aritmetización del análisis, la sistematización geométrica y el surgimiento de formas algebraicas nuevas, los trabajos de Gauss en la teoría de números (seguidos por Dirichlet), los logros en la generalidad de la geometría analítica, la teoría de las funciones de Weierstrass, Schwarz y Mittag-Leffler ...

Nos parece relevante enfatizar que es en este panorama intelectual que se construyó la teoría de conjuntos. Esta nace, nos dice Bourbaki, debido a: "Las necesidades del Análisis en particular el estudio a fondo de las funciones de variables reales que se desarrolla durante todo el siglo XIX". [Bourbaki, N.: Elementos de historia de las matemáticas, p. 46] Tal y como la conocemos ahora es trabajo de Cantor. Este se interesó por el asunto en 1872, a propósito de los problemas de equipotencia en 1873, de la dimensión a partir de 1874, y entre 1878 y 1884 incidió sobre casi todos los problemas de la teoría de los conjuntos.

A pesar de la oposición general que esta teoría generó en la época de Cantor, Weierstrass y Dedekind siguieron con interés la labor de Cantor.

Para Dedekind su objetivo era fundamentalmente la aplicación de la noción de conjunto a la de número. Desde el momento en que aparecen muchos de los resultados, éstos van a ser aplicados a las cuestiones clásicas del Análisis.

La teoría de conjuntos fue muy importante porque iba a servir como engranaje de los principales resultados matemáticos y lógicos de la época y también concentraría sobre ella la reflexión sobre los fundamentos de la matemática. La teoría de conjuntos, de una u otra forma, va a representar desde entonces un papel esencial en la descripción de las matemáticas, a pesar de las dificultades que a partir de ella se sucedieron en momentos posteriores.

El siglo XIX (con los resultados teóricos en matemáticas y lógica que hemos señalado) ofrecía un cuadro intelectual extraordinario para la síntesis en los fundamentos y la reflexión sobre las matemáticas. Esta va a ser realizada por Gottlob Frege retomando la filosofía logicista de Leibniz.

En la evolución de la matemática del siglo XIX el ideal de la posibilidad de una evidencia absoluta como criterio de verdad está inscrito en el horizonte intelectual. Pero es una evidencia que podríamos decir ha pasado de ser semántica para empezar a ceder a una sintáctica. El método axiomático que se apuntala aquí es "puro" contrapuesto con el "intuitivo" del ideal griego, es formal [Ladrière, J.: Limitaciones internas de los formalismos, p. 34] Las matemáticas sufrieron en el siglo XIX un doble proceso de "independización de las estructuras fundamentales del análisis (...) y crítica de los conceptos básicos (...)." [Ladrière, J.: Limitaciones internas de los formalismos, p. 33]

Las condiciones de partida para la reflexión de Frege fueron diferentes a las de Kant o Leibniz, incluso a las de Boole; esto engendraría que los mismos problemas en torno a la naturaleza última de la matemática hayan sido abordados no sólo con recursos teóricos nuevos, sino frente a un contenido de la misma diferente.

De esta forma el proyecto que va a aprehender Frege luego, ya lo examinaremos, no va a ser simplemente el de la materialización mecánica del de Leibniz. Frege va a establecer un proyecto técnica y filosóficamente nuevo, aunque no se pueda negar la influencia de filosofías anteriores. De hecho, mucho de la filosofía de las matemáticas presente en todos los intentos fundacionales de fines de XIX y principios del XX estaba contenido en la filosofía clásica y especialmente en la de los siglos XVII y XVIII.

Para Descartes, Spinoza, Leibniz o Kant la razón genera verdades a priori, infalibles. Se establece en cada uno una cierta combinación teórica a partir del idealismo, platonismo, axiomatismo, o intuicionismo. Para Descartes los tres primeros se conectan a un intuicionismo racional (espiritualista); para Kant, el último, espacio temporalizado (influencia empirista), es lo decisivo. Para todos la naturaleza de las matemáticas es a priori, sus verdades necesarias y absolutas. Este es el marco teórico del racionalismo: el sustrato esencial de lo que hemos caracterizado como un paradigma dominante en la filosofía de las matemáticas.

Antes de entrar en los proyectos que pretenderán fundamentar las matemáticas, debemos hacer una breve incursión en el desarrollo de la lógica, y, más bien, en una aproximación que establecería una relación entre matemática y lógica, que después sería un fundamento de esos proyectos.



La mano de Dios, Rodin.

25.3 Lógica y matemáticas

Como consecuencia de los nuevos tiempos, la lógica sufrió modificaciones relevantes. Richard Whately fue uno de los primeros que hizo contribuciones, en las islas británicas. Sir William Hamilton y Augustus De Morgan aportaron también; pero fue George Boole el verdadero fundador de la lógica simbólica moderna.

Su aproximación se va a inspirar en la visión del álgebra de Peacock, Gregory y De Morgan, pero sobre todo en las características de una nueva matemática (el peso de una nueva matemática, especialmente, el álgebra).

Boole logró importantes desarrollos en la lógica del siglo XIX. ¿Cómo resumir sus logros? Fueron establecidos por el uso de las matemáticas en ésta: el simbolismo y el carácter operatorio-aritmético.

Sin embargo, y esto queremos subrayarlo, sus trabajos reforzaron una nueva visión de las matemáticas. Estos asuntos son los que queremos reseñar en esta sección.

Para Boole: la lógica encuentra su fundamento más profundo en las operaciones de la mente.

En Análisis Matemático de la Lógica, un pequeño libro publicado en 1847, afirmaba que la lógica está "... basada en hechos de otra naturaleza que tienen su fundamento en la constitución de la mente." [Boole, G.: Análisis matemático de la lógica, p. 9] La lógica es posible, entonces, en la medida de la existencia de las facultades propias del intelecto, en "... nuestra capacidad para concebir una clase y designar sus miembros individuales por medio de un nombre común." [Boole, George: Análisis matemático de la lógica, p. 13] Es en el lenguaje, añade, donde vamos a observar la manifestación de las operaciones de la mente y, por tanto, sus leyes van a ser también las leyes del mismo lenguaje.

El método de Boole considera el lenguaje que conducirá al análisis de las operaciones de la mente. Señala:

"Estudiando las leyes de los signos, estamos en efecto estudiando las leyes manifestadas del razonamiento." [Boole, G.: An investigation of the laws of thought on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities, p. 24]

La lógica, sus leyes y proposiciones, pueden establecerse a través de "un cálculo del razonamiento deductivo" [Boole, G.: Análisis matemático de la lógica, p. 10] O, como diría luego:

"La teoría de la lógica y la teoría del lenguaje resultan así, íntimamente relacionadas. Un intento afortunado de expresar las proposiciones lógicas por medio de símbolos -cuyas leyes combinatorias podrían basarse en las leyes de los procesos mentales que representan? sería un proceso en el camino hacia un lenguaje filosófico." [Boole, G.: Análisis matemático de la lógica, p. 13]

La visión de Boole se conecta con las ideas de Leibniz de construir un cálculo simbólico; el que en esencia era matemático.

Ahora bien, para Boole la lógica es operatoria (como en Leibniz). En el primer capítulo de su libro de 1854 nos dice:

"El designio del siguiente tratado es el de investigar las leyes fundamentales de aquellas operaciones de la mente por las cuales el razonamiento es realizado; para darles expresión en el lenguaje simbólico de un cálculo, y sobre esta fundamentación establecer la ciencia de la lógica y construir su método; para hacer ese método mismo la base de un método general para la aplicación de la doctrina matemática de las Probabilidades; y finalmente, para recoger de los variados elementos de verdad traídos a la vista en el curso de estas indagaciones algunas indicaciones concernientes a la naturaleza y constitución de la mente humana." [Boole, G.: Laws of thought, p. 1]

La lógica es matemática, porque es esencialmente axiomática y operativa. Más aún, especialmente, por ser desarrollada como un cálculo simbólico. Existen verdades fundamentales sobre las que descansan todas las otras verdades. Todas ellas descansan sobre "...la fundamentación de unos cuantos axiomas; y todos estos son verdades generales." Esto ya lo había señalado en 1847, así:

"... la lógica, como la geometría, se basa en verdades axiomáticas y ... sus teoremas se construyen teniendo en cuenta esa doctrina general de los símbolos que constituye la base del Análisis hoy aceptado." [Boole, G.: Análisis matemático de la lógica, p. 25]

Enfatiza:

"... porque es un método que se apoya en el empleo de símbolos regidos por leyes combinatorias generales y conocidas, cuyos resultados admiten una interpretación no contradictoria." [Boole, G.: Laws of thought, p. 11]

Las leyes de la lógica eran para Boole matemática, aunque solo en su forma, no en su contenido. Todas las leyes básicas de lógica las va reduciendo a relaciones de asociatividad, conmutatividad, distributividad, etc.

Para ello identifica el signo "$+$

25.4 Biografías



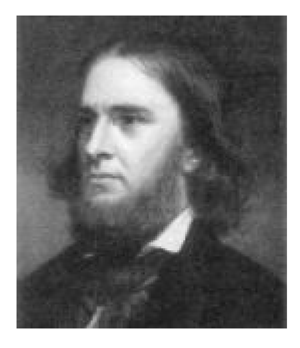
Augusto De Morgan

Augusto De Morgan nació el 27 de junio de 1 806 en Madura, India. Su padre fue John De Morgan. Poco después de que nació, perdió la vista de su ojo derecho. A los siete meses fue llevado por su familia a Inglaterra. Su padre murió cuando él tenía diez años.

En 1 823, ingresó a la Universidad de Cambridge, en donde conoció a dos de los profesores que luego se convertirían en sus mejores amigos: Peacock y Whewell. En 1 826, regresó a estudiar a Londres. Un año después, solicitó un puesto de matemáticas en la Universidad de Londres, el cual le fue concedido. Fue el primer profesor de matemáticas en la universidad.

En 1 866, fue el cofundador de la Sociedad Matemática de Londres y su primer presidente; su hijo George estuvo a su lado en este proyecto. Ese mismo año fue elegido como miembro de la Sociedad Real Astronómica.

Murió el 18 de marzo de 1 871 en Londres, Inglaterra.



Benjamin Peirce

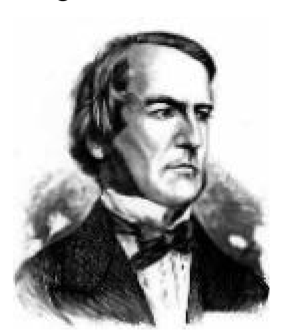
Benjamin Peirce nació el 4 de abril de 1 809 en Salem, Massachusetts, Estados Unidos.

Se graduó de la Universidad de Harvard en 1 829 y dos años más tarde fue nombrado tutor de dicha universidad. Entre sus principales estudios, hay una gran gama de temas matemáticos, de mecánicas celestes y geodesia, en la aplicación hacia el álgebra lineal y la teoría del número. También, revisó y escribió un comentario a la traducción de Bowditch, de los cuatro volúmenes del

libro de Laplace: Tratado de Mecánica Celeste.

En 1 833, fue nombrado profesor en Harvard y estableció el Observatorio en la Universidad, en el cual determinó la órbita de Neptuno y calculó las perturbaciones producidas por Neptuno en la órbita de Urano y de otros planetas.

Murió el 6 de octubre de 1 880 en Cambridge, Massachusetts, Estados Unidos.



George Boole

George Boole nació el 2 de noviembre de 1 815 en Lincoln, Lincolnshire, Inglaterra. Sus estudios los realizó primero, en una escuela local y luego en una escuela de comercio. Fue su padre quien le enseñó a temprana edad acerca de las matemáticas y le enseñó como construir instrumentos ópticos. A la edad de doce años tradujo una oda escrita en latín del poeta Horacio. A los dieciséis años fue asistente de un profesor escolar.

A pesar de que sus intereses se centraban en los idiomas, en 1 835, abrió una escuela e inició a estudiar matemáticas por su propia cuenta. Estudió los trabajos de Laplace y Lagrange y a partir de notas a estos trabajos realizó su primer trabajo. Duncan Gregory, quien era el editor del periódico matemático en Cambridge le propuso estudiar en la universidad, a lo que Boole tuvo que negarse debido a que el dinero que obtenía de la escuela lo utilizaba para mantener a sus padres. Publicó un trabajo acerca de ecuaciones diferenciales, que le hizo merecedor de una medalla otorgada por la Sociedad Real.

En 1 849, obtuvo el puesto de director de matemáticas en la Universidad Queens y trabajó ahí por el resto de su vida. Fue galardonado con honores de la universidad de Dublin y Oxford y fue elegido como miembro de la Sociedad Real en 1 857. Su esposa Mary, fue sobrina de Sir George Everest, de quien se le dio el nombre al Monte Everest.

Murió de un fuerte resfrío el 8 de diciembre de 1 864 en Ballintemple, Couny Cork, Irlanda.

25.5 Síntesis, análisis, investigación

1. En el siguiente texto se establece una descripción y valoración de la construcción matemática en los siglos XVIII y XIX. Léalo con cuidado.

   "Los Bernoulli, Euler, Lagrange, Laplace y Gauss, realizaron todos ellos parte de sus trabajos más brillantes en problemas destinados a mejorar la concordancia entre el paradigma de Newton y la naturaleza. Muchas de esas mismas figuras trabajaron simultáneamente en el desarrollo de las matemáticas necesarias para aplicaciones que Newton ni siquiera había intentado produciendo, por ejemplo, una inmensa literatura y varias técnicas matemáticas muy poderosas para la hidrodinámica y para el problema de las cuerdas vibratorias. Esos problemas de aplicación representan, probablemente, el trabajo científico más brillante y complejo del siglo XVIII. Podrían descubrirse otros ejemplos por medio de un examen del periodo posterior al paradigma, en el desarrollo de la termodinámica, la teoría ondulatoria de la luz, la teoría electromagnética o cualquier otra rama científica cuyas leyes fundamentales sean totalmente cuantitativas. Al menos en las ciencias de un mayor carácter matemático, la mayoría del trabajo teórico es de ese tipo. Pero no todo es así. Incluso en las ciencias matemáticas hay también problemas teóricos de articulación de paradigmas y durante los periodos en que el desarrollo científico fue predominantemente cualitativo, dominaron estos problemas. Algunos de los problemas, tanto en las ciencias más cuantitativas como en las más cualitativas, tienden simplemente a la aclaración por medio de la reformulación. Por ejemplo, los Principia no siempre resultaron un trabajo sencillo de aplicación, en parte debido a que conservaban algo de la tosquedad inevitable en un primer intento; y en parte debido a que una fracción considerable de su significado sólo se encontraba implícito en sus aplicaciones. Por consiguiente, de los Bernoulli, d'Alembert y Lagrange, en el siglo XVIII, a los Hamilton, Jacobi y Hertz, en el XIX, muchos de los físicos matemáticos más brillantes de Europa se dieron repetidamente a la tarea de reformular la teoría de Newton en una forma equivalente, pero más satisfactoria lógica y estéticamente. O sea, deseaban mostrar las lecciones implícitas y explícitas de los Principia en una versión más coherente, desde el punto de vista de la lógica, y que fuera menos equívoca en sus aplicaciones a los problemas recién planteados por la mecánica." [Kuhn, Thomas S.: La Estructura de las Revoluciones Científicas, págs. 64-65]

   Explique con sus palabras las ideas expresadas en este pasaje. Comente.

2. ¿Cuál era el primer desastre en la percepción de las matemáticas que se dio en el siglo XIX según Moris Kline?
3. Retomemos el sentido de la aritmetización del análisis. ¿Cómo se puede interpretar desde un punto de vista filosófico?
4. Investigue el sentido de los términos semántica y sintaxis. Explíquelos. ¿Qué es evidencia semántica? ¿Qué es evidencia sintáctica?
5. Comente el nuevo carácter de las matemáticas del siglo XIX.
6. ¿Cuál fue el método con el que transformó Boole la lógica?
7. ¿Por qué para Boole la lógica es matemática?

8. ¿Cuál es la esencia de las matemáticas para Boole?
9. Investigue qué es el álgebra booleana. Explique.
10. Investigue qué es el cálculo proposicional. Explique.
11. Volvamos a la discusión filosófica general con los siguientes textos de Poincaré.

    "La contradicción nos impresionará más si abrimos un libro cualquiera de matemáticas; en cada página el autor anunciará la intención de generalizar una proposición ya conocida. ¿Es que, acaso, el método matemático procede de lo particular a lo general? Entonces, ¿cómo puede llamárselo deductivo?

    En fin, si la ciencia del número fuera puramente analítica, o pudiera deducirse analíticamente de un pequeño número de juicios sintéticos, pareciera que un espíritu suficientemente potente podría apreciar de una ojeada todas las verdades; ¡qué digo!, podría también esperarse que un día se inventara para expresarlas un lenguaje bastante simple para que así se revelaran inmediatamente a una inteligencia ordinaria.

    Si uno se rehúsa a admitir estas consecuencias, es preciso aceptar entonces que el razonamiento matemático tiene por sí mismo una especie de virtud creadora y que, por consiguiente se distingue del silogismo." [Poincaré, Henri: Filosofía de la ciencia, p. 236]

    "Para llegar a eso es preciso necesariamente ir de lo particular a lo general, ascendiendo uno o varios escalones.

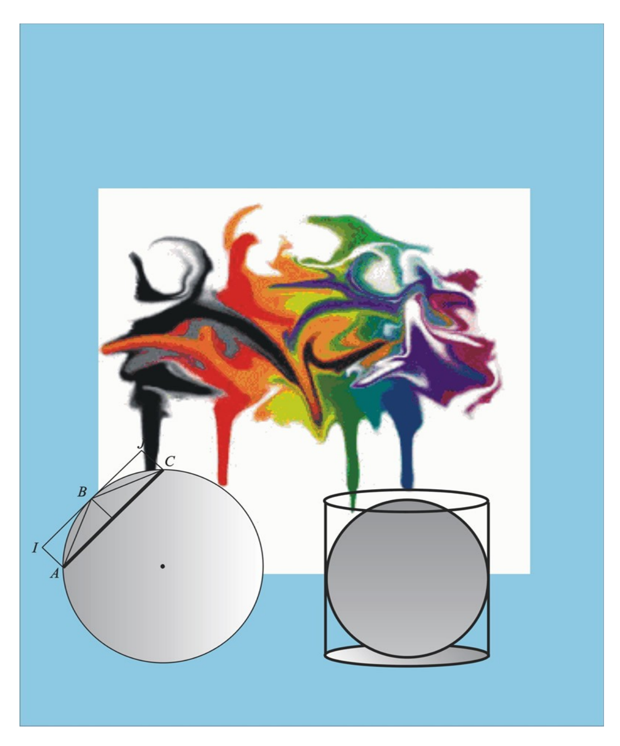
    El procedimiento analítico 'por construcción' no nos obliga a descender, pero nos deja en el mismo nivel.

    No podemos elevarnos sino por la inducción matemática, única que nos puede enseñar algo nuevo. Sin la ayuda de esta inducción, diferente en cierto sentido de la inducción física, pero fecunda como ella, la construcción sería impotente par crear la ciencia." [Poincaré, Henri: Filosofía de la ciencia, p. 249]

    Explique las ideas del autor. Comente inducción versus deducción en las matemáticas.

CAPITULO XXVI

LOS FUNDAMENTOS DE LAS MATEMÁTICAS



A finales del siglo pasado y principios de este emergieron tres escuelas filosófico-matemáticas que intentaron resolver las dificultades del rigor y fundamento teóricos en las matemáticas: el logicismo, el formalismo y el intuicionismo.



Gottlob Frege.

26.1 El logicismo

Gottlob Frege nació el 8 de noviembre de 1848 en Wismar, Mecklenburg-Schwerin (ahora Alemania). Se le considera uno de los fundadores de la lógica simbólica moderna. Estudió matemáticas, física y química en las universidades de Jena, de 1869 a 1871, y Göttingen, de 1871 a 1873. Enseñó matemáticas en la Universidad de Jena y escribió sus libros en diferentes ramas de la matemática, aunque fuera del campo de la lógica sus publicaciones fueron escasas. Sus escritos en filosofía, lógica y matemática han sido de gran importancia. Murió el 26 de julio de 1925 en Bad Kleinen, Alemania.

Frege retomó el punto de partida filosófico obtenido en los siglos XVII y XVIII, y basándose en el apuntalamiento de los aspectos deductivos y lógicos por los matemáticos del XIX, retomó la teoría leibniziana de la evidencia lógica en la aritmética. Manteniéndose en el marco epistemológico kantiano (el lenguaje de sus distinciones) dijo que la aritmética no era sintética a priori (como en Kant) sino analítica; para ello redefinió la noción en su Grundlagen der Arithmetik: "El problema es el de encontrar su prueba y seguirla hasta las verdades primitivas. Si en este camino sólo se encuentran definiciones y leyes lógicas generales entonces se trata de una verdad analítica." [Frege, G., en el libro de 1 884: Los Fundamentos de la Aritmética incluido en Conceptografia, p. 117]

Para Frege la lógica conecta a las leyes más profundas del pensamiento. La aritmética (según él) era lógica. Decía:

" ¿No yace la base de la aritmética a mayor profundidad que la de cualquier conocimiento empírico, a mayor profundidad que la de la misma geometría? Las verdades aritméticas gobiernan el campo de lo numerable. Este es el más comprehensivo, puesto que a él pertenece no solo lo real, no solo lo intuitivo sino todo lo pensable. ¿Las leyes de los números, así, no deberían estar en íntima unión con las del pensamiento?." [Frege, G. en el libro de 1884: Los Fundamentos de la Aritmética incluido en Conceptografia, p. 130]

Lo que busca Frege en la reducción de la matemática a la lógica es un mecanismo teórico que permita obtener rigor y certeza en matemáticas. En esa medida se integra a la tradición decimonónica de rigorización de las matemáticas (Cauchy, Weierstrass, Dedekind, Cantor, etc.) que trata de cubrir las lagunas teóricas de los resultados extraordinarios de los siglos XVII y XVIII. Desde esta óptica la preocupación de Frege es por la verdad de las proposiciones de la matemática, y, entonces, es esencialmente epistemológica. Frege integra los resultados lógicos del siglo de De Morgan, Boole, etc., pero no con el objetivo de dejar las cosas en una "simbolización" de la matemática o con una "matematización" de la lógica. Frege intenta la redefinición de la noción de verdad. Esto naturalmente encontraba justificación en la abstracción de la matemática de ese siglo que exigía nuevos criterios de verdad.

Las motivaciones de Frege también eran filosóficas. Estaba al tanto de las ideas que en torno a la naturaleza de la matemática y la lógica se vertían en esa época. En sus intentos por probar (de hecho) la consistencia de la aritmética, buscó sustento en la filosofía. O de manera complementaria, se puede decir que una actitud filosófica particular en la concepción del carácter de las matemáticas motivó un proyecto (el logicista). Para Frege, la solidez epistemológica de las matemáticas se encontraba en la exhibición de "objetos" lógicos, objetivos, partícipes de una realidad pero no física ni sensible. Llegará a definir la existencia de un "tercer mundo" en la estructura ontológica.

En su artículo de 1918 " Der Gedanke" hablará de objetos (físicos), ideas (representaciones individuales como sensaciones, etc.) y los pensamientos (reales y no físicos) que constituían ese "tercer mundo." Según él: gran parte de los problemas epistemológico-filosóficos tenía su origen en la incomprensión de la existencia de ese "tercer mundo."

Ahora bien, este nuevo mundo estaba cargado de las características de eternidad, absoluto, independencia, permanencia, etc., que recuerdan la visión platonista.

Frege, siguiendo a Leibniz y Boole, construyó en su famoso Begriffsschrift un lenguaje simbólico capaz de mejorar el rigor en la expresión matemática así como acortar las pruebas y "evitar el salto en las deducciones". Este lenguaje respondía a sus motivaciones epistemológico-filosóficas sobre las matemáticas. Era concebido como un instrumento para poder llevar a cabo los procesos de rigor y fundamentación de la aritmética. Con él contribuyó enormemente en el desarrollo de la lógica moderna.

En su Begriffsschrift por primera vez aparecen los cuantificadores y las variables ligadas, que permiten a Frege desarrollar la primera teoría coherente de la cuantificación; aparece el cálculo proposicional de funciones de verdad, el análisis de la proposición como función y argumento en lugar de sujeto y predicado; por primera vez aparece una distinción precisa entre nombres y predicados, predicados de primer orden y de segundo orden; se formaliza la lógica sentencial y se presenta un cálculo deductivo para esta última.

La publicación de Die Grundlagen der Arithmetik (1884) buscaba ofrecer una crítica a diversas posiciones filosóficas sobre los números y la aritmética; al mismo tiempo que definir el concepto de número natural. Die Grundgesetze der Arithmetik (1893, 1903) corresponde a lo que debía ser para Frege la culminación práctica de su proyecto en los fundamentos de la matemática.

La evidencia lógica como fundamento

Para Frege, se trataba de materializar el proyecto de hacer la evidencia lógica el fundamento de la aritmética. Es esto lo que aparece (dándole unidad si se quiere) en su Begriffsschrift, Grundlagen y Grundgesetze der Arithmetik.

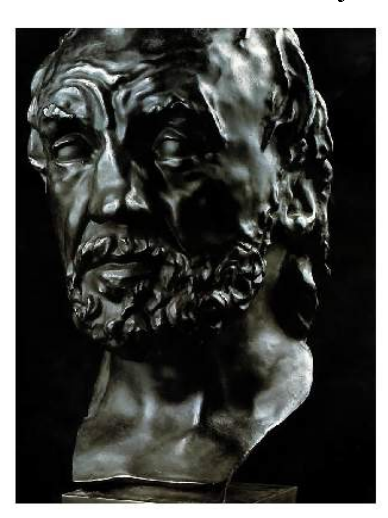
Frege parte desde un principio del racionalismo; solo que busca una combinación nueva más adecuada a los desarrollos lógico-matemáticos del XIX. Privilegia la lógica (que es convertida en una realidad casi mítica y trascendente) y apuntala los rasgos axiomáticos y formales de la matemática. Es decir, asume que la axiomática es columna vertebral del edificio matemático. Sin embargo, esto no era suficiente. Añade un fuerte platonismo en la consideración de los objetos matemáticos; y busca erradicar la intuición (aunque sea mental) en la aritmética (aunque no en la geometría).

La combinación de estos elementos teóricos brindaba una nueva reflexión sobre las matemáticas que buscaba captar una nueva realidad de las matemáticas. Eso sí: sin salir del racionalismo continental, aquel que hacía de las proposiciones de la matemática verdades a priori infalibles. Frege añadiría la idea de que los objetos matemáticos viven en un mundo "objetivo" no material, independiente del sujeto.

Si bien Frege partía del lenguaje y el marco epistemológico generales kantianos, su interpretación sobre la aritmética (como conocimiento analítico) se dirigía contra la visión de Kant. En el seno del mismo racionalismo favorecía las ideas y tradición de Leibniz, solo que en una escala técnica, matemática y filosófica superior.

La abstracción de las matemáticas del siglo XIX determinaba, es cierto, una nueva situación teórica de grandes consecuencias. El siglo XIX es la verdadera cuna de la matemática "pura". Anteriormente hablar de matemática pura y aplicada resultaba absurdo, incomprensible. En ese siglo pasado se vio la emersión de matemáticos dedicados exclusivamente a su especialidad. El modelo de Arquímedes, Galileo, Newton, Gauss, etc., dejó de ser el común. (Con grandes excepciones: Poincaré.) La abstracción y la especialización abrieron el terreno propicio para la separación de la práctica matemática de los problemas de la realidad. La matemática pura había nacido. Con ella, se alimentaban las visiones filosóficas racionalistas y viceversa; estas últimas apuntalaban la separación en nuevo cuerpo de la matemática pura.

Frege vivió en esta realidad que golpeteaba el decurso histórico y teórico de las matemáticas. Su visión sobre éstas nace de ella pero, además, va a ser un influjo en su devenir.



Paradojas y narices rotas. Título arbitrario de la escultura Hombre con naríz rota, Rodin.

Paradojas

La materialización en el proyecto logicista de la visión sobre las matemáticas que Frege poseía encontró sus dificultades. No habiéndose terminado de imprimir el segundo tomo de sus Grundgesetze, uno de sus pocos lectores, Bertrand Russell, descubre una paradoja en uno de los pilares esenciales del edificio. La paradoja aparece precisamente en su noción de "extensión de conceptos", es decir, ligada al tratamiento de la teoría de conjuntos. Frege en el apéndice del volumen dos de los Grundgesetze la expresa así:

"Nadie esperará afirmar que la clase de los hombres es un hombre. Aquí tenemos una clase que no se pertenece a sí misma. Digo que algo pertenece a una clase cuando cae bajo el concepto cuya extensión es la clase. Fijemos nuestra mirada sobre el concepto: clase que no se pertenece a sí misma. La extensión de este concepto (si podemos hablar de su extensión) es entonces la clase de clases que no se pertenecen a sí mismas. Para acortar vamos a llamarla la clase K. Preguntamos

ahora si esta clase K se pertenece a sí misma. Primero, supongamos que sí lo hace. Si algo pertenece a una clase, cae bajo el concepto cuya extensión es la clase. Entonces si nuestra clase se pertenece a ella misma es una clase que no se pertenece a sí misma. Nuestra primera suposición conduce entonces a una autocontradicción. En segundo lugar, supongamos que nuestra clase K no se pertenece a ella misma; entonces ella cae bajo el concepto cuya extensión es ella misma, y entonces se pertenece a ella misma." [Frege, G.:"On Russell paradox", en Geach, Peter; Black, Max. Translations from the philosophical writings of Gottlob Frege, p. 235]

Entre concepto y extensión de concepto aparecía entonces una dificultad que no era fácil de abordar. En el terreno de la teoría de clases ya habían aparecido paradojas antes que la de Russell. Ya en 1895 Cantor mismo había detectado la que se conoce como Burali-Forti y en 1899 la que lleva su mismo nombre. En 1905 J. Richard encontró una nueva y años después aparecieron las de Berry y Grelling.

La emersión de las paradojas hizo cimbrar el proyecto de Frege. No se trataba para él solamente de un problema técnico, sino de un cuestionamiento de toda la visión que tenía sobre la aritmética. La profundidad de la crisis que se abrió en esta etapa fregeana del logicismo debe entenderse bien; para Frege, su proyecto era la descripción de verdades absolutas correspondientes a un mundo no tangible pero real. La paradoja cuestionaba no sólo el proyecto sino su sustrato filosófico.

Jean Largeault en su libro Logique et Philosophie chez Frege hace un balance global sobre esta situación que merece citarse:

"Un platonismo tan extremo es de hecho incompatible con el invento de una solución de recambio en el caso en que surgiera una contradicción: en un tal sistema la eventualidad misma de una contradicción es a priori impensable ya que las proposiciones primitivas supuestamente deben formalizar relaciones lógicas naturales entre datos lógicos naturales. Sin embargo la contradicción se produce. Estrictamente consecuente con sus premisas realistas, Frege abandona a la vez la lógica y el logicismo cuando constata que la paradoja de Russell pone inexplicablemente en cuestión, no las reglas de deducción ni la deducción misma, sino el fundamento de verdad considerado por él como siendo a la vez objetivo y a priori, de donde sale la deducción: es como si la verdad se negara a sí misma, por un fenómeno que debe haber sido en efecto tan enigmático para Frege como lo fue la irracionalidad de $\sqrt{2}$

26.2 El intuicionismo

El intuicionismo asumió como suyas una serie de críticas que emergieron frente al carácter abstracto de las matemáticas. Con Brouwer se estructuró una visión sobre la naturaleza de las matemáticas que había estado presente también entre los matemáticos decimonónicos: Krönecker, Baire, etc. Los intuicionistas se colocaban en un terreno opuesto (en su medida) al axiomatismo y al logicismo.

Para los intuicionistas (como en Kant) era necesario recurrir a una intuición, pero esta vez no podía ser espacio-temporal. Éstos decidieron reducirla a una exclusivamente temporal. Para estos es el movimiento que en la mente hace pasar del 1 al 2 lo que determina las matemáticas. Si existe una evidencia, está en la intuición (las proposiciones matemáticas se consideran entonces sintéticas a

priori). Éstos responden a las paradojas de una manera tajante: se trata de abusos y extralimitaciones de la lógica y el lenguaje. Cuando la lógica y el lenguaje han dejado de corresponder con la verdadera matemática es que se suceden las paradojas.

Mientras que en los logicistas la lógica es elevada a una categoría casi metafísica, para los intuicionistas se trata de un instrumento absolutamente accesorio.

No se trata para el intuicionismo de probar la consistencia de la matemática sino de hacer matemática verdadera, apegada a esa intuición introspectiva. Esta matemática así determinada filosóficamente establece, según Brouwer, un programa práctico centrado en la noción de constructividad. Es esto lo que en el fondo determina las reglas usadas, a saber: el lenguaje y la lógica. Dependerá de ella también el tratamiento de las nociones infinitas. La verdad y la existencia en matemáticas aparecen fundidas en la construcción. Aunque las ideas constructivistas se pueden rastrear desde hace siglos, en el siglo XIX y XX se pueden ver en Krönecker y Poincaré, por ejemplo. Señala Poincaré:

"Una demostración matemática no es una simple yuxtaposición de silogismos; son silogismos colocados en un cierto orden, y el orden en el cual están colocados estos elementos es mucho más importante que ellos mismos. Si tengo el sentimiento, la intuición de este orden, de manera que me pueda dar cuenta rápidamente del conjunto del razonamiento, no debo temer más olvidarme de uno de los elementos, cada uno de ellos vendrá a colocarse en el cuadro que le he preparado, sin que haya hecho ningún esfuerzo de memoria." [Poincaré, Henri: Filosofía de la ciencia, p. 255]

El tipo de constructivismo que desarrolló el intuicionismo es, sin embargo, muy limitado, se restringe a buscar mecanismos o procedimientos finitistas para una fundamentación de las matemáticas; el alcance de los métodos y el marco teórico en el que se mueven es reducido; no se da una contextualización histórica, psicológica o social que integre la construcción.

Cuando se pasa de la evidencia lógica (en los logicistas) a la evidencia temporal (en los intuicionistas) sin duda se ha hecho un salto epistemológico. Sin embargo, no se trata de una ruptura con el racionalismo.

Los intuicionistas atacaron aspectos del paradigma formal y racionalista de las matemáticas, buscaron dar una alternativa filosófica, pero no se alejaron del mito de las verdades infalibles de la razón. Aunque digan los intuicionistas que no se preocupan por los fundamentos de la matemática (a la manera de Hilbert) sin duda no dejan de intentar la solidificación infalible y absoluta del cuerpo teórico de las matemáticas.

Con una actitud metodológica que elimina grandes partes de la matemática clásica aceptada por la mayoría de los matemáticos, con una vuelta parcial a Kant, se sumaron a las filosofías racionalistas sobre las matemáticas. Al igual que Kant y a diferencia de Leibniz se privilegian elementos no formales (ni lógicos) en su interpretación teórica (lo cual es muy positivo), pero no logran llegar a las raíces más profundas que dan cuenta de la naturaleza de las matemáticas.

26.3 El formalismo

Los formalistas buscaron la evidencia en las matemáticas también en Kant. Para ellos las proposiciones de la matemática no se reducen a nociones y principios lógicos, sino que la matemática posee objetos que describe y ligados a una percepción interior. El fundador de esta aproximación, el gran matemático David Hilbert planteaba las cosas así:

"...algo que se presupone al proceder a inferencias lógicas y en la ejecución de operaciones lógicas está ya dado en la representación (vorstellung), esto es, ciertos objetos concretos extralógicos, que están intuitivamente presentes en forma de experiencia inmediata y se hayan en la base de todo pensamiento. Si el pensamiento lógico ha de estar seguro, estos objetos han de ser susceptibles de examinarse a fondo, en sus componentes, y la exhibición, la distinción, el orden de sus partes y la disposición de éstos en el espacio, han de estar dados en los objetos mismos, como algo que no puede reducirse a nada más ni necesita por lo demás en modo alguno semejante reducción." [Hilbert, D. en Körner, S.: Introducción a la filosofía de la matemática, p. 88]

Hilbert, al igual que Brouwer y Kant, hablaba de una intuición pero se trataba de la intuición del signo. Decía en 1922:

"Para mí -y en esto me opongo totalmente a Frege y a Dedekind- los objetos de la teoría de números son los signos mismos, de los cuales podemos reconocer la forma en toda su generalidad y con toda seguridad, independientemente de las circunstancias de lugar y de tiempo, de las condiciones particulares de su presentación y de las diferencias insignificantes que pueden afectar a su trazado. El punto de vista filosófico sólido que considero como indispensable para el fundamento de las matemáticas puras -como para cualquier tipo de pensamiento, de comprensión y de comunicación científicos- se puede resumir de esta forma: en el principio -y así nos expresaremos aquí- era el signo." [Hilbert, D. en: Ladrière, J.: Limitaciones internas de los formalismos, p. 27]

Para Hilbert el fracaso del logicismo es el fracaso de los intentos por eliminar las intuiciones y las evidencias previas a los procesos lógicos. No se trata de eliminarlos, se trata de explicar en concreto cuáles son y cómo actúan. Ahora bien, la exhibición de estos objetos concretos, para Hilbert, es la base de la posibilidad de la consistencia de la matemática. Porque, señala Körner: "Si la matemática ha de restringirse -por completo y sin calificación- a la descripción de objetos concretos de cierta clase y a las relaciones lógicas entre tales descripciones, entonces, ninguna contradicción puede producirse en ella, ya que las descripciones precisas de objetos concretos son siempre mutuamente compatibles." [Körner, S.: Introducción a la filosofía de la matemática p. 88]

Con esta filosofía es, entonces, posible trazar un programa para intentar garantizar la coherencia lógica de las matemáticas.



El pensamiento, Rodin.

Sistemas formales

Hilbert afirma que la matemática no se puede reducir a la lógica, que otros axiomas y principios no lógicos deben añadirse. En ese sentido aunque parte del tratamiento axiomático-formal del logicismo, no está preocupado por las condiciones que imponen un reduccionismo logicista. La presencia de axiomas extralógicos no son fuente de problemas en su filosofía. Más aún, para él la presencia de nociones y elementos "ideales" que no representan percepciones intuitivas no es contradictorio con la consistencia de la matemática, para lo cual se basa en la tradición clásica de las matemáticas (irracionales, complejos, etc.).

Es importante para Hilbert la simbolización de todas las nociones. Las proposiciones son combinaciones o cadenas de símbolos. Para Hilbert las nociones de la matemática son entonces de un contenido perceptible, no perceptibles o "ideales". Él busca la fusión de ambas y las introduce en un programa que pretende probar la consistencia del cuerpo teórico así construido. Para lograr esos efectos se requiere entonces hacer una diferenciación de niveles: por un lado, la teoría propiamente, que él la expresa con números-trazos y las operaciones entre ellos; y , por el otro, una metateoría, que está compuesta por las fórmulas que corresponden a los trazos y sus proposiciones y a las reglas formales que corresponden a las de la teoría.

Una teoría de la aritmética se refiere entonces a la construcción de resultados con los trazos, mientras que la que se refiere a la construcción de fórmulas se llama metateoría.

Una vez construido un sistema formal (de fórmulas) a partir de una teoría el proyecto parte de la siguiente hipótesis: la consistencia lógica de la teoría es equivalente a la consistencia formal del sistema formal.

Los sistemas formales son la pieza de toque de Hilbert en la búsqueda por demostrar la consistencia de la matemática. Ahora bien: en el formalismo existen dos orientaciones aparentemente encontradas.

Para Hilbert como hemos dicho, el formalismo es un medio; pero, para otros, es un fin. Para Curry, por ejemplo, la matemática es la "ciencia de los sistemas formales". [Curry, H. B.: Outlines of a formalist philosophy of mathematics, p. 56]

En el formalismo a ultranza hay una transmutación del objetivo de la construcción matemática. Este aquí es la fundamentación en sí; no se establecen realmente diferencias entre la teoría y la metateoría, todo es parte de lo mismo.

El convencionalismo

El formalismo reduce las matemáticas a una manipulación apropiada de signos. De alguna manera sus premisas teóricas empujan a cierto convencionalismo en matemáticas y tal vez a una nueva evidencia: la sintáctica. El formalismo rompe con el logicismo; su incidencia en la proporción de objetos reales para la matemática parece conducirlo fuera de la visión racionalista de la que hemos hablado, pero no es así. El punto de partida formalista seguía siendo la posibilidad de la demostración de las verdades matemáticas a priori, infalibles.

Las importantes discusiones entre estas tres diferentes visiones sobre la naturaleza de la matemática no trascendieron las fronteras del racionalismo. Para todos, el objeto o el fundamento de la matemática no se encontraba en el mundo material. Se pueden enfatizar y combinar con grandes diferencias el lenguaje, la lógica, la intuición, la deducción, etc., pero siempre dentro del esquema que hace de la mente productora de verdades a priori y del deseo de poseer un edificio matemático inexpugnable, absoluto.

Con la nueva matemática del siglo XIX, con la matemática pura, con los grandes desarrollos en lógica (finales del XIX y principios del XX), los límites de la razón parecían infinitos. El racionalismo en matemáticas no encontraba un punto de debilidad. Incluso la tradición empirista renunció a encontrar un objeto o una base material para dar cuenta de la naturaleza de las matemáticas (la vieja interpretación de Mill no suscitaba muchos adherentes). Su respuesta fue entonces negarle todo contenido acerca del mundo a las matemáticas y condenarlas a ser nada más que lenguaje; aquí la evidencia era sintáctica sin más.

Si bien es cierto que el empirismo había robado mucho terreno al racionalismo, en las matemáticas éste aparecía sólidamente anclado. Incluso la "veracidad" de esta visión en las matemáticas se convertía en su más importante soporte.

Todo parecía seguro en las tiendas del racionalismo en sus diferentes variantes a finales de los veinte. Había vacíos que llenar, de seguro, pero existía una extraordinaria confianza en una fundamentación absoluta de la verdad matemática.

En general, todo parecía claramente establecido sobre las fronteras de las principales tradiciones filosóficas, y sobre las principales categorías epistemológicas. Este edificio de supuestos teóricos, de una u otra tradición, empezó a temblar en los siguientes años.

En busca de la certeza

Con las geometrías no euclidianas, los cuaterniones de Hamilton y las n-tuples de Grassmann, se generó un fuerte golpe a la visión existente de las matemáticas. Se introducía un nuevo sentido en las matemáticas. Con las paradojas, el "desastre" (al decir de Kline) fue más formidable. La certeza lógica era puesta en el banquillo de los acusados. Los filósofos y matemáticos buscaron por todos los medios fundamentar el edificio de verdades absolutas que entraba en crisis, y pensaron que lo tenían prácticamente al alcance de sus manos.

Hilbert expresaba su optimismo sin ambages en 1925: "Es también una placentera sorpresa descubrir que, al mismo tiempo, hemos resuelto un problema que ha plagado a los matemáticos por un largo tiempo, viz., el problema de probar la consistencia de la aritmética." [Hilbert, David: "On the infinite", en Putnam, Hilary / Benacerraf, Paul (Edit): Philosophy of Mathematics. Selected Readings, p. 149]

En la década de los veinte Hilbert y sus seguidores intentaron afanosamente realizar sus objetivos. Algunos resultados publicó Ackermann en 1924, Von Newmann en 1927 y Herbrand en 1930 y 1931. Sin embargo, pronto las aspiraciones formalistas y, en general, de los intentos fundacionales de varias décadas se tendrían que redefinir al encontrar una realidad absolutamente nueva y apasionante.

26.4 Gödel

En el año 1931 Kurt Gödel publicó un artículo llamado "Sobre sentencias formalmente indecidibles de Principia Mathematica y sistemas afines". Las ilusiones de Hilbert caerían por tierra de la noche a la mañana.

Gödel resume sus resultados bajo el título Diskussion zur grundlegung der Mathematik que publicaría la famosa revista Erkenntnis también en 1931. Señalaba Gödel:

"Incluso para los sistemas formales con un número infinito de axiomas hay sentencias aritméticas indecidibles, con tal de que su esquema axiomático cumpla ciertas condiciones (muy generales)." [Gödel, K.: Obras completas, p. 99]

Las consecuencias de estos resultados son decisivas. Implican, en primer lugar, que cualquier formalismo, suficientemente fuerte para expresar partes básicas de la teoría elemental de números, es incompleto. Es decir: las matemáticas no pueden ser formalizadas de manera absoluta, y, además, en las partes formalizables no es posible garantizar la consistencia.

La crítica golpeaba de manera directa los métodos finitistas promovidos por Hilbert. Decía Gödel:

"...Una demostración de la consistencia de uno de estos sistemas S solo puede llevarse a cabo con ayuda de modos de inferencia que no son formalizables en S. Por tanto, sería completamente imposible obtener una prueba finitaria de consistencia (como buscan los formalistas) para un sistema formal en el que estén formalizados todos los modos finitarios (es decir, intuicionísticamente aceptables) de prueba." [Gödel, K. en Nagel, Ernest & Newman, James: La prueba de Gödel, p. 64]

Implicaciones

La crítica por los resultados gödelianos no solo ponía en cuestión los métodos hilbertianos, sino que se dirigía al corazón de los que se suponía era posible en matemáticas: los sistemas formales en matemáticas. Es decir, ponía en cuestión todo intento fundacional que tomara como punto de partida absoluto a los sistemas formales. El papel de la axiomática en las matemáticas exigía con Gödel ser revisado teóricamente hasta sus raíces más profundas.

Uno de los filósofos modernos de la ciencia de habla francesa, Jean Ladrière, resume las limitaciones que implica el resultado gödeliano:

"...no es posible formalizar completamente una teoría matemática cuando ésta ha llegado a un cierto nivel de complejidad. En determinados casos, el modelo simbólico no consigue representar de manera adecuada los nexos deductivos que existen en el seno de la teoría bajo su forma intuitiva, no formalizada. En otros casos, el modelo fracasa cuando trata de representar ciertos conceptos intuitivos de la teoría. En cualquier caso, no se puede hacer abstracción de la relación de significación que liga el modelo simbólico al dominio matemático que trata de representar. Llega un momento de la interpretación que no puede ser puesto entre paréntesis. El recurso a la pura intuición del signo, tal como la entendía Hilbert, no es suficiente. La utilización del método formal marca un progreso evidente, y ha permitido obtener un cierto número de precisiones de largo alcance sobre la estructura de las teorías matemáticas, pero no dispensa a la matemática de mantener el contacto con ciertas intuiciones previas a la formalización y que ésta sólo puede ayudar a clarificar." [Ladrière, J.: Limitaciones internas de los formalismos, p. 30]

Los resultados de Gödel establecen que no es posible desterrar la intuición cualquiera que ésta fuese, ligada esencialmente a los procedimientos con los que el hombre se relaciona con las cosas materiales. La dimensión formal y axiomática de las matemáticas no se puede confundir con ellas mismas.

Por otra parte, Gödel conduce a romper con el esquema del sistema absoluto y cerrado para todo discurso. Los resultados gödelianos someten a crítica el esquema sobre el conocimiento que pretende que éste se obtiene a partir de la deducción aséptica de verdades primarias. Es el esquema de la pirámide en la que de la cúspide a la base se trasmite la verdad sin más intervención que la mecánica de la lógica y la razón, al margen del mundo sensorial viviente. La razón en sí misma no podía ser absoluta.

He aquí un claro mensaje. Con solo primeros principios o supuestas verdades innatas no es posible dar cuenta de la realidad.

Esto es central para comprender la naturaleza de las matemáticas. Es imprescindible recurrir a la intuición. Y no me refiero a esa apelación subjetiva a la que recurren intuicionistas de diferentes formas. Me refiero a la intuición que encuentra su lugar en la realidad del contacto material del sujeto con el objeto. Una intuición con condiciones básicas vinculadas a lo sensible y a la experiencia. Es decir, la naturaleza de las matemáticas no se puede aprehender si no es haciendo intervenir (de alguna forma) referencias a la realidad empírica de los hombres, a la vida.



La tormenta, Rodin.

No se trata tal vez de trasladarse de tradición epistemológica y pedir afiliación al empirismo. Pero se hace esencial a partir de Gödel y desde las mismas tiendas del racionalismo replantear la experiencia y la intuición (o una dimensión de ésta) en la reflexión sobre las matemáticas.

Con Gödel todos los proyectos fundacionales basados en la axiomática y los sistemas formales encontraron sus fronteras. El logicismo clásico establecía la evidencia lógica a partir de una estructuración axiomática y formal. El formalismo fue el más afectado. El intuicionismo encontraba armas en su crítica a los demás. Sin embargo, la crítica al racionalismo y a esta enfermiza premisa de la fundamentación en sí, no los dejaba bien parados tampoco.

26.5 Falibilismo e infalibilismo en las matemáticas

Imre Lakatos, en un artículo de 1962, establecía un extraordinario juicio sobre estos intentos fundacionales:

"La matemática, al igual que la lógica russelliana tiene su origen en la crítica de la intuición; ahora bien, los meta-matemáticos -como hicieron los logicistas- nos piden que aceptemos su intuición como prueba 'última'. De aquí que ambos caigan en el mismo psicologismo subjetivista que en otro tiempo atacaron. Pero, ¿por qué empeñarse en pruebas 'últimas' y autoridades 'decisivas'? ¿Por qué buscar fundamentos, si se acepta que son subjetivismos? ¿Por qué no admitir honestamente la falibilidad matemática e intentar defender la dignidad del conocimiento falible contra el escepticismo cínico, en lugar de hacernos ilusiones de que podemos reparar, hasta que no se note, el último rasgón del tejido de nuestras intuiciones 'últimas'?" [Lakatos, I.: Matemáticas, ciencia y epistemología, pp. 40, 41]

La crítica de los resultados gödelianos incide contra el dogmatismo que hacía de las verdades matemáticas, "zonas liberadas" infalibles. La verdad absoluta como base epistemológica no puede afirmarse en las matemáticas sin confundir la mente de los jóvenes. Las matemáticas ya no pueden verse a través de la interpretación axiomática, deductiva y formal. Lo que había sido un extraordinario paradigma en la reflexión sobre las matemáticas, cayó teóricamente en 1931.

De nuevo Lákatos, pero en otro libro:

"La historia de las matemáticas y la lógica del descubrimiento matemático, es decir, la filogenésis la ontogénesis del pensamiento matemático no se puede desarrollar sin la crítica y rechazo final del formalismo.

Sin embargo la filosofía formalista de las matemáticas posee raíces muy profundas. Se trata del último eslabón de la larga cadena de filosofías 'dogmáticas' de las matemáticas. Durante más de dos mil años, ha tenido lugar una larga discusión entre 'dogmáticos y escépticos'. Los dogmáticos sostienen que podemos alcanzar la verdad y saber que la hemos alanzado, sirviéndonos para ello del poder de nuestro intelecto y / o sentidos humanos. Los escépticos, por otra parte, o bien sostienen que no podemos alcanzar la verdad en absoluto (si no es con ayuda de la experiencia mística), o bien que no podemos saber si la hemos alcanzado o si podemos alcanzarla. En este gran debate, en el que los argumentos se ponen una y otra vez al día, las matemáticas han constituido la orgullosa fortaleza del dogmatismo. Siempre que el dogmatismo matemático de la época entraba en crisis, una nueva versión suministraba de nuevo genuino rigor y fundamentos últimos, restaurando con ello la imagen autoritaria, infalible e irrefutable de las matemáticas, 'la única Ciencia que Dios ha tenido a bien otorgar hasta ahora a la humanidad' (Bobees [1651], pág. 15) La mayoría de los escépticos se rindieron ante el carácter inexpugnable de este reducto de epistemología dogmática. Ya es hora de lanzarle un reto". [Lakatos, Imre: Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático, p. 20]

Diversidad matemática

La veta abierta por Gödel siguió produciendo buenos resultados. En 1936, Gentzen probó la consistencia para los enteros y algunas partes del análisis pero a costa de introducir, además, una inducción transfinita. La prueba de la consistencia de un sistema siempre exigía un sistema más potente. En 1936 Alonso Church probó que no era posible garantizar "procesos efectivos" en la matemática. En 1963 Paul Cohen probó que la hipótesis del continuo y el axioma de escogencia son independientes del sistema axiomático más usado (Zermelo-Fraenkel), lo que equivale a decir que son proposiciones indecidibles. Cualquier opción en torno al uso de estos axiomas es entonces posible, y en cada una emergen axiomáticas matemáticas diferentes.

Para completar el cuadro, apareció el teorema de Skolem-Löwenheim: expresando que los axiomas de un sistema no limitan los modelos posibles. O sea, que dado un sistema pueden existir cualesquiera modelos.

Si la matemática no es un cuerpo sólido, seguro, único, absoluto y verdadero, entonces deben sacarse las consecuencias teóricas. Existen varias matemáticas. La idea de una sola matemática a partir de la axiomática y las estructuras no puede ser totalmente aceptable. Es decir, la idea de meter en el mismo saco a la aritmética, a la geometría, al álgebra a partir de las nociones axiomático-formales es poco válida después de Gödel. Ningún sistema formal puede dar cuenta de la estructura de la mayoría de las partes de las matemáticas; serían necesarios varios sistemas formales, y esto aún no sería suficiente.

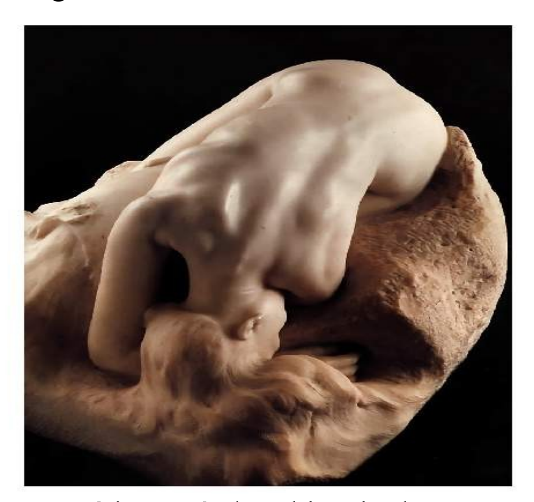
Si recordamos el teorema de Skolem-Löwenheim, no sabemos hasta dónde llega cada modelo. Pero, además, según se acepte o no el axioma de escogencia, o la hipótesis del continuo, por el resultado de Cohen cada opción nos brindará una estructura axiomática diferente.

Entonces: existen varias matemáticas. De hecho, en nuestra opinión, siempre han existido históricamente varias matemáticas de una u otra forma, y esto tiene que ver con la naturaleza misma de las matemáticas. Es en este terreno perfectamente entendible el sentido teórico de los últimos resultados que se han obtenido en los últimos años en los fundamentos de la matemática. Estudios sobre ciertos conceptos llamados "topos" y "lógicas generalizadas" expresan esta diversidad de la matemática.

Ahora bien, que los métodos de las disciplinas matemáticas sean diferentes, no debe interpretarse como que no se pueden usar unas en las otras. Todo lo contrario. Buena parte de la riqueza de las matemáticas modernas descansa en la ruptura con las fronteras cognoscitivas en general y en particular en las ciencias matemáticas; ya no es posible afir-mar límites rígidos y estáticos. Existe una extraordinaria simbiosis y promiscuidad teóricas decisivas para la construcción matemática.

Contra el absolutismo e infalibilismo

Las implicaciones de los resultados de Gödel que hemos señalado en este trabajo son importantes en la comprensión de las matemáticas. Hemos hablado de ausencia de verdades absolutas, de ausencia de un edificio infalible e inexpugnable, de la necesidad de la intervención de la intuición y la experiencia, de la diversidad de las matemáticas, etc. Sin embargo, todo esto que se deriva de una comprensión de los resultados gödelianos no ha calado suficientemente en la visión que poseen la mayoría de los matemáticos o gentes vinculadas a la matemática.



En busca de las matemáticas. Título arbitrario de una escultura de Rodin.

En buena parte de la enseñanza de las matemáticas, la axiomática y los métodos deductivistas abstractos siguen siendo un rostro persistente. Todavía no nos hemos librado de aquellos énfasis en la unidad de las matemáticas por la vía de las estructuras y las reducciones axiomáticas. Y, sobre todo, se transmite a los estudiantes el respeto y miedo a un edificio inexpugnable, absoluto y verdadero, imposible de cuestionar. Es posible encontrar métodos, nociones, conceptos, procedimientos comunes entre las diferentes disciplinas matemáticas, de hecho, su intercambio y retroalimentación son importantes para la práctica matemática, pero esto no debe hacerse por la vía inapropiada. Ya volveremos.

Se podría dividir la moderna historia de las matemáticas en dos etapas: antes de Gödel y después de Gödel. Sin embargo, los resultados que se abren con Gödel no han sido plenamente asimilados. Si se entiende bien el asunto, representa un formidable golpe a los paradigmas dominantes durante siglos en la reflexión sobre las matemáticas.

Para poder terminar de entenderse su sentido, tal vez sea necesario que exista otro paradigma globalmente aceptado. Lákatos sugería un renacer del empirismo en la filosofía de las matemáticas. Es probable que algo de esto exista. Pero es más que eso. Vivimos una época en la que se trata de definir criterios teórico-metodológicos para la construcción de un nuevo paradigma que de cuenta de lo que es la naturaleza de las matemáticas.

La influencia de esto en la vida de los profesores de matemática y los investigadores en matemática será decisiva. Como es también decisivo que las experiencias concretas y particulares que realizan profesores e investigadores en las matemáticas empujen hacia una nueva fundamentación de las matemáticas.

La dimensión que posee el esclarecimiento de la naturaleza de las matemáticas es extraordinaria. Es un problema epistemológico de primera magnitud. Este obliga a replantear las nociones clásicas de la epistemología. Las divisiones analítico-sintético, a priori - a posteriori, así como la dicotomía entre las tradiciones racionalista y empirista, deben ser sometidas a un importante escrutinio con base en esta redefinición teórica. No es posible pensar ya que sean suficientes para dar cuenta de la estructura del conocimiento. Sin duda es necesario encontrar una nueva colección de conceptos, categorías, métodos y principios teóricos.

En ese proceso los énfasis unilaterales y excluyentes presentes en las tradiciones racionalista y empirista, como en la dialéctica trivial, deberán excluirse. Sin duda, se trata de una auténtica revolución teórica.

Relevancia para la Educación Matemática

Se podría pensar que la importancia de esto es metafísica o literaria. Sería un grave error. Incluso se podría sugerir que estas preocupaciones están fuera de lugar en nuestro país y con relación a los problemas más inmediatos que tenemos en el desarrollo de las matemáticas. Sin embargo, esto sería una aproximación metodológica absolutamente errónea. Precisamente gran parte de las tareas que debemos afrontar en la resolución de los problemas del desarrollo y la enseñanza de las matemáticas reclaman una adecuada filosofía de las matemáticas.

Las concepciones teóricas que se han tenido sobre las matemáticas no han sido factores inútiles o externos al devenir mismo de las matemáticas. Todo lo contrario. Han sido bases de los derroteros que ésta ha seguido y que hoy mismo sigue. La conciencia de sí misma ha sido un factor decisivo en su decurso.

Por eso una transformación importante en las ideas que sobre las matemáticas se tiene es un punto de partida para orientar su evolución en un sentido que influya positivamente en el devenir de los hombres.

26.6 Biografías



Bertrand Arthur William Russell

Bertrand Russell nació el 18 de mayo de 1 872 en Ravenscroft, Monmouthshire, Gales. Es uno de los lógicos y filósofos más importantes del siglo XX. Pocos años después de su nacimiento sus padres murieron y él junto con su hermano se fueron a vivir con sus abuelos. Su abuelo fue Lord John Russell, quien había servido dos veces como Primer Ministro bajo el poder de la Reina Victoria. Ingresó a la Universidad de Cambridge en el Trinity College y obtuvo los primeros títulos en matemáticas y en ciencia moral.

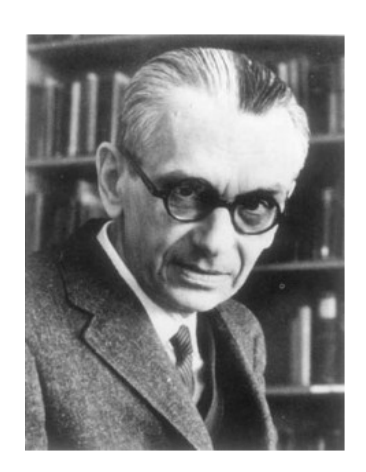
En 1 908, fue elegido miembro de la Sociedad Real. Se casó cuatro veces y se le conocieron muchas aventuras, por lo que no disfrutó de buena fama en el Parlamento.

Durante la Primera Guerra Mundial, condenó a ambos lados de la guerra y por su posición inflexible fue multado y encarcelado.

Junto a su segunda esposa, abrió una escuela experimental alrededor de 1 920. Se convirtió en el tercer Conde Russell después de la muerte de su hermano en 1 931. Después de 1 930, impartió lecciones en Estados Unidos y se le ofreció un puesto en el City College en Nueva York, pero no le fue posible aceptarlo debido a que una decisión jurídica declaró que era moralmente incapaz de enseñar en la universidad.

En 1 950, recibió el Premio Nobel de Literatura. En 1 958, fundó la Campaña para el Desarme Nuclear y fue encarcelado tres años después. Russell influyó en el positivismo lógico, desempeñó un importante papel en el resurgir del empirismo dentro de la epistemología. Sus estudios sobre el análisis lógico influyeron sobre la filosofía del siglo XX.

Murió el 2 de febrero de 1 970 en Penrhyndeudraeth, Merioneth, Gales.



Kurt Gödel

Kurt Gödel nació el 28 de abril de 1 906 en Brünn, Austria-Hungría (hoy Brno, República Checa). Kurt hizo sus estudios primarios y secundarios en Brünn y los completó a la edad de diecisiete años. En 1 923 entró a la Universidad de Viena. Completó su doctorado en 1 929 bajo la supervisión de Hans Hahn, un maestro, y para el año siguiente se convirtió en un miembro de la facultad de la Universidad en donde perteneció a la Escuela de Lógica hasta 1 938.

En 1 933 Hitler llegó al poder, y aunque este hecho no parecía afectar a Kurt debido a su poco interés en la política, lo afectaría poco después cuando Schlick, un amigo suyo, fue asesinado por un estudiante nacional socialista. Este suceso afectaría a Kurt y provocaría su primera depresión nerviosa.

En 1 934 dio una serie de conferencias en Princeton acerca de sistemas formales matemáticos. Cuando volvió a Viena en 1 938 se casó con Adele Porkert y cuando la guerra estalló regresó a Estados Unidos. En 1 948 obtuvo la ciudadanía estadounidense y comenzó a impartir clases en el Instituto de Estudios Avanzados en Princeton, de 1 953 hasta el día de su muerte.

En 1 974 recibió la Medalla Nacional de Ciencia.

Al final de su vida creyendo que lo envenenarían dejó de alimentarse, lo cual le produjo la muerte el 14 de enero de 1 978 en New Jersey, Estados Unidos.



Alan Mathison Turing

Alan Turing nació el 23 de junio de 1 912 en Londres, Inglaterra. Sus padres fueron Julius Mathison Turing, miembro británico del Servicio Civil Indio y Ethel Sara Stoney, hija del ingeniero que construyó la vía férrea de Madras.
Ingresó a la Escuela Preparatoria de Hazlehurst donde fue un excelente alumno. Le interesó el ajedrez y formó parte de la asociación de debates. En 1 926, ingresó a la Escuela Sherborne, y debido a la huelga general de ese año, Alan tenía que viajar sesenta millas en bicicleta para llegar a la escuela.

Su mayor contribución fue en el desarrollo de los números irracionales. Mientras estudiaba, leyó los estudios de Einstein referentes a la relatividad. Además, leyó La Naturaleza del Mundo Físico de Eddington.

En 1 931, ingresó a la Universidad Rey en Cambridge a estudiar matemáticas. En 1 933, surge el interés de Alan en la lógica matemática. También ese fue el año del levantamiento de Hittler y Alan se unió al movimiento anti-guerra. En 1 934, se graduó y en 1 935, asistió al curso avanzado de Max Newman acerca de las fundaciones de la matemática. En 1 936, ingresó a la Universidad de Princeton, y bajo la supervisón de Alonzo Church inició sus investigaciones. Regresó a Inglaterra dos años más tarde y de vuelta en Cambridge, inició la construcción de una máquina análoga para investigar la hipótesis Riemann, considerado el problema matemático más grande jamás resuelto.

En 1 947, estudió neurología y fisiología, alejándose de las matemáticas y de las máquinas por un tiempo. Fue miembro del Club Atlético Walton y ganó una competencia en tiempo record; además, compitió en la Maratón A.A.A. donde llegó en quinto lugar.

En 1 951, fue elegido miembro de la Sociedad Real de Londres. En 1 952, fue arrestado por violar los estatutos británicos de homosexualidad.

Murió por envenenamiento de cianuro de potasio mientras realizaba experimentos en electrólisis el 7 de junio de 1 954 en Wilmslow, Cheshire, Inglaterra.



Hermann Klaus Hugo Weyl

Hermann Weyl nació el 9 de noviembre de 1 885 en Elmshorn, Alemania. Era conocido como Peter, entre sus amigos.

Estudió en las Universidades de Munich y Göttingen. Obtuvo su doctorado en la Universidad de Göttingen, supervisado por el matemático David Hilbert en 1 908. Fue en esta Universidad, donde obtuvo su primer puesto de enseñanza.

De 1 913 a 1 930 trabajó en la sección de matemáticas del Zürich Technische Hochschule, donde Albert Einstein era miembro también de la facultad. Los siguientes tres años, trabajó en Göttingen. De 1 933 hasta su retiro en 1 952, trabajó en el Instituto de Estudios Avanzados en Princeton.

Murió el 8 de diciembre de 1 955 en Zürich, Suiza.

26.7 Síntesis, análisis, investigación

1. Explique la relación entre lógica y aritmética que proponía Gottlob Frege.
2. ¿Qué es y para qué sirve ese tercer mundo que Frege planteaba?
3. Investigue el significado de los términos: Begriffsschrift, Die Grundlagen der Arithmetik, Die Grundgesetze der Arithmetik.
4. Describa el contenido del Begriffsschrift.
5. Explique la paradoja que Russell encontró en la obra de Frege y el impacto de esa paradoja en las pretensiones logicistas que tenía Frege. ¿Qué quiere decir que el logicismo de Frege era platonista?
6. Investigue y diga qué son las paradojas de Epiménides y de Berry.
7. Exprese en sus palabras el sentido de la teoría de tipos. Investigue y explique qué era la teoría ramificada de tipos.
8. Estudie el siguiente texto.

   "La observación más elemental que se puede hacer sobre la teoría de tipos es que no es lógica. Es un principio de ordenación, en ese sentido no de existencia como el axioma de infinitud, pero aparece no obstante como un puente artificial por encima de las contradicciones. Lo más conflictivo de la teoría es que no permite toda una serie de definiciones en la matemática clásica. Para salir de estas dificultades es que se tuvo que recurrir precisamente al axioma de reducibilidad. El principio del círculo vicioso es el que está en la base de la teoría de tipos y prohibe el uso de las llamadas funciones impredicativas. Con la teoría de tipos podemos decir que Russell buscaba una predicativización de las matemáticas, pero esto sólo lo logró a medias. El problema medular reside en la pregunta: ¿es la matemática predicativa? Las matemáticas clásicas no parecen serlo, y pretenderlo abre el camino a la introducción de axiomas que son no gratos para el logicismo.

   La teoría de tipos, por otra parte, también conecta necesariamente con el axioma de elección y con el de infinitud. De nuevo el problema de la fundamentación matemática no lleva a una solución en un marco reducido como al que apunta la teoría de tipos; la predicatividad o no de las matemáticas sólo puede abordarse con una discusión sobre la naturaleza de la matemática. No se puede lanzar por la borda todas las definiciones impredicativas porque algunas de éstas han engendrado paradojas; menos aún cuando gran parte de las matemáticas se van con ellas. Lo que se plantea es entonces la redefinición del carácter de las entidades matemáticas (de las definiciones, que son el lugar privilegiado de su producción).

   La teoría de tipos y los axiomas no lógicos del logicismo russelliano son la manifestación más elocuente de su fracaso material. Pero las dificultades se siguen las unas a las otras." [Ruiz, A.: Matemáticas y filosofía, pp. 86-87]

Explique las ideas del autor en esta cita. Investigue qué quiere decir que la matemáticas puedan ser predicativas. Use más bibliografía.

9. Estudie los siguientes párrafos.

"El logicismo de Russell apuntala el paradigma formalizante pero (al igual que Frege) a medias. En Frege predomina siempre el reconocimiento de un mundo ideal, lo que determina un fuerte platonismo en su filosofía de las matemáticas. En Russell el mundo ideal también es reconocido en un principio pero a la par de un fuerte sentido de la realidad, así como una inclinación nominalista en la resolución de los problemas teóricos específicos.

Con Russell terminó una nueva etapa en los intentos por brindar una fundamentación logicista a las matemáticas. Es posible afirmar después de los trabajos de Frege y Russell que el Logicismo fracasó. Pero no sólo debido a dificultades técnicas o de manipulación lógica, ni siquiera por un supuesto tratamiento inadecuado de los sistemas formales usados. La raíz de los problemas se encuentra en la visión logicista del conocimiento matemático, en la conexión que se plantea de este y la realidad material, en los papeles epistemológicos asignados al sujeto y al objeto en la construcción matemática. La raíz de los problemas se encuentra en el terreno filosófico.

El logicismo va a fracasar en dotar a las matemáticas de un fundamento último. Sin embargo, con ello no se destruiría el paradigma racionalista-axiomatizante de las matemáticas. Para Hilbert y el formalismo los problemas del logicismo podían ser superados en una visión que afirmaba la posibilidad de la demostración de la consistencia en la aritmética, y que hacía de la intuición del signo su punto filosófico de partida. El fracaso del logicismo no fue visto antes de la década de los treinta realmente como un cuestionamiento profundo a los sistemas axiomático-formales y al racionalismo. Serían necesarios los resultados de Gödel para apenas crear condiciones teóricas que permitieran debilitar el racionalismo en matemáticas, y abrir posibilidades para una reconstrucción teorética de la reflexión sobre las metemáticas. En el fracaso del logicismo, y después de los resultados gödelianos de los Treinta, tal vez pueda entonces leerse un fracaso de los intentos por brindar un fundamento absoluto a las matemáticas." [Ruiz, A.: Matemáticas y filosofía, p. 101]

Explique las ideas del autor. Haga un comentario breve sobre el logicismo.

10. Explique la relación entre constructividad, lógica y lenguaje según los intuicionistas.

11. ¿Qué era la intuición del signo en David Hilbert?

12. ¿Cuál era la idea básica de Hilbert con relación a su propósito de fundamentar las matemáticas?

13. Explique qué es un sistema formal y una metateoría. Explique el sentido de la evidencia sintáctica en el formalismo.

14. Lea con cuidado el siguiente texto.

"La vuelta a Kant por los formalistas y los intuicionistas representa un auténtico fracaso desde el punto de vista filosófico. Los formalistas exhiben objetos inapropiados, transmutan el carácter de la matemática y, a pesar del reclamo kantiano, apuntalan fuertemente al

paradigma de lo deductivo y formal. Los intuicionistas, por otra parte, frente al logicismo y al formalismo (evidencia lógica y sintáctica) apuntalan la intuición subjetivista conjurada con el rechazo al platonismo y un obsesivo constructivismo. Vuelven a Kant en dos sentidos diferentes, pero con ello no contribuyen filosóficamente a abrir una ruta hacia una nueva interpretación alternativa y viable frente al paradigma formal.

El intuicionismo trató de escapar del paradigma de la evidencia lógica y formal, pero siguió participando del paradigma racionalista sobre las matemáticas, de las verdades infalibles y absolutas, de la mente generadora de conocimiento a priori. Intuicionistas y formalistas parten todos de la premisa de que el objeto o el fundamento de las matemáticas está separado del mundo material. Se enfatiza lenguaje, lógica o intuición en las matemáticas, pero nunca su contenido empírico.

En los años veinte las diferentes escuelas filosóficas en los fundamentos de la matemática sentían un futuro libre de las crisis teóricas del pasado. Las paradojas habían sido el último desastre. El formalismo prometía, el constructivismo, estrecho y complejo, pero podía servir. El logicismo con los axiomas extralógicos no parecía recuperarse, pero la esperanza no se disipaba. La matemática seguía siendo un edificio inconmovible y las teorías de la verdad infalible aparecían triunfantes. El empirismo renunciaría en pocos años a reconocer a la matemática como algo más que lenguaje y reglas convencionales. La década de los treinta cambiaría esta visión optimista de manera abrupta y radical para todo aquel que lo quisiera ver. Daba inicio a una nueva era: la gödeliana." [Ruiz, A.: Matemáticas y filosofía, p. 194]

Describa y explique las ideas del autor.

15. ¿Cuáles eran las consecuencias de los resultados de Gödel con relación al programa de demostrar la consistencia absoluta de las matemáticas?

16. Explique qué es el infalibilismo y absolutismo en las matemáticas.

17. Comente por qué la filosofía de las matemáticas que se acepte tiene relevancia en la educación matemática.

18. Estudie el siguiente texto con cuidado.

"Fue Brouwer quien postuló la existencia de una relación muy estrecha entre la intuición temporal y las matemáticas puras, todo ello dentro de su programad de refundición intuicionista de las matemáticas modernas. Este autor acepta las geometrías no euclídeas con iguales títulos que la euclídea, y admite asimismo la autonomía completa de la geometría con respecto a la intuición espacial y a la aplicación de los métodos analíticos en geometría; por otra parte, se opone vigorosamente a las tendencias formalistas, logicistas, cantorianas y abstractas que dominan el desarrollo contemporáneo de las matemáticas, ya que quiere, por el contrario, fundar éstas sobre una base intuitiva y, en particular, sobre la intuición temporal: pues esta intuición nos permite, en primer lugar, construir la sucesión infinita de los números naturales, y luego, el continuo de los números reales. Posteriormente, Brouwer se ha apartado algo de su programa inicial, en el sentido de que ha sustituido la intuición temporal por la 'intuición de la multi-unidad'; sin embargo, esta revisión no ha afectado ni a su crítica de las matemáticas modernas ni a su manera de

construir los número naturales y el continuo.

Obsérvese que, en definitiva, incluso Brouwer ha abandonado el método tradicional de asentar la teoría del continuo, partiendo simplemente de axiomas que constituyan -o que se supongo constituyen- la descripción de cierto continuo dado por la intuición. Pues la teoría intuicionista del continuo describe uno construido a partir de unos datos intuitivos de carácter mucho más elemental (datos que se toman de la intuición de la multi-unidad); procedimiento que adoptan tanto Brouwer como sus adversarios, y que resulta obligado, ya que la estructura de los continuos intuitivos es demasiado difusa como para permitir una descripción que pudiera servir como sistema de axiomas." [Beth en Piaget, Jean, Beth, E. W.: Epistemología matemática y psicología, p. 125.]

Explique el planteamiento de Brouwer en cuanto a la intuición temporal. ¿Cuál relación puede establecer con la filosofía de Kant? Comente la relación intuicionismo y formalismo.

19. Estudie el siguiente texto con cuidado.

"Los editores de Erkenntnis me han pedido que resuma los resultados de mi trabajo 'Sobre sentencias formalmente indecidibles de Principia Mathematica y sistemas afines', que acaba de aparecer en Monatshefte für Mathematik und Physik, XXXVIII, y que todavía no estaba impreso cuando se celebró la reunión de Könisberg.

Este trabajo trata de problemas de dos tipos, a saber, en primer lugar de la cuestión de la completitud (decidibilidad) de los sistemas formales de la matemática, y en segundo lugar de la cuestión de las pruebas de consistencia para tales sistemas. Un sistema formal se llama completo si cada sentencia expresable con sus signos es formalmente decidible a partir de sus axiomas, es decir, si para cada tal sentencia a existe una secuencia finita de inferencias acordes con las reglas del cálculo lógico que empieza con algunos axiomas y termina con la sentencia a o con la sentencia no--a. Un sistema S se llama completo respecto a cierta clase K de sentencias, si al menos cada sentencia de K es decidible a partir de los axiomas. En el trabajo anteriormente citado se muestra que no hay ningún sistema formal con un número finito de axiomas que sea completo no siquiera respecto de las sentencias aritméticas. Aquí entendemos por 'sentencias aritméticas' aquellas en que no aparecen más nociones que $+, \cdot, =$ (adición, multiplicación e identidad, referidas a números naturales), además de los conectores lógicos y lo cuantificadores universal y existencial, aplicados sólo a variables de números naturales (por lo cual en las sentencias aritméticas no aparecen más variables que las de números naturales). Incluso para los sistemas formales con un número infinito de axiomas hay sentencias aritméticas indecidibles, con tal de que su esquema axiomático cumpla ciertas condiciones (muy generales). De lo dicho se sigue en especial que hay sentencias aritméticas indecidibles en todos los sistemas formales conocidos de la matemática -por ejemplo, en Principia Mathematica (con axioma de reducibilidad, de elección y de infinitud), en la teoría axiomática de conjuntos de Zermelo-Fraenkel y en la de von Neumann, y en los sistemas formales de la escuela de Hilbert-. Lo primero que hay que hacer notar respecto a los resultados sobre las pruebas de consistencia es que aquí se trata de la consistencia en el sentido formal (o hilbertiano), es decir, la consistencia es considerada como una propiedad puramente combinatoria de ciertos sistemas de signos y de sus 'reglas del juego'. Ahora bien, los hechos combinatorios pueden ser expresados con los símbolos de

los sistemas formales matemáticos (como Principia Mathematica). Por eso el enunciado de que un cierto sistema formal S es consistente frecuentemente puede ser expresable con los símbolos de este sistema (en especial vale esto para los sistemas antes mencionados). Lo que puede probarse es lo siguiente: Para todos los sistemas formales, para los que anteriormente se ha afirmado la existencia de sentencias aritméticas indecidibles, el enunciado de la consistencia del sistema en cuestión es una de las sentencias indecidibles en ese sistema. Es decir, una demostración de la consistencia de uno de esos sistemas S sólo puede llevarse a cabo con ayuda de modos de inferencia que no son formalizables en S. Por tanto, sería completamente imposible obtener una prueba finitaria de consistencia (como la buscan los formalistas) para un sistema formal en el que estén formalizados todos los modos finitarios (es decir, intuicionistamente aceptables) de prueba. De todos modos, parece dudoso que alguno de los sistemas formales construidos hasta ahora, como el de Principia Mathematica, sea tan abarcador, o incluso que exista uno tan abarcador." [Gödel, Kurt: Obras Completas, pp. 98-100]

Explique los términos de completitud, sentencias indecidibles, sistema formal, consistencia y resuma lo que Gödel dice fueron sus aportes en el artículo citado.

20. Lea con cuidado el texto siguiente.

"El profesor Gödel era un hombrecillo taciturno, con la complexión de una pértiga y una apariencia que hacía pensar más en una zarigüeya o un ratón almizclero que en un genio de la lógica. Hacía dos años se había incorporado definitivamente al Instituto, ocho después de haber destrui-do, con un solo artículo, el conjunto de las matemáticas modernas.

A lo largo de más de dos milenios, las matemáticas habían evolucionado de forma descontrolada, como un árbol cuyas ramas se cruzaban, chocaban y se entretejían. Los descubrimientos de babilonios, egipcios, griegos, árabes e indios, y luego los avances logrados en el Occidente moderno, habían convertido la aritmética en una especie de monstruo de mil cabezas, cuya verdadera naturaleza nadie alcanzaba a comprender. Aunque se trataba del instrumento científico más objetivo y evolucionado de la humanidad, utilizado a diario por millones de hombres para resolver problemas prácticos, nadie sabía si, en medio de su infinita diversidad, era posible que las matemáticas contuviesen un germen en descomposición, un hongo o un virus que desacreditara sus resultados.

Los griegos fueron los primeros en advertir esta posibilidad, al descubrir las paradojas. Como constataron Zenón, y más tarde otros estudiosos de la aritmética y la geometría, la estricta aplicación de la lógica a veces producía sinsentidos o contradicciones que no podían resolverse con claridad. Muchas paradojas eran conocidas desde la Antigüedad Clásica, como la aporía de Aquiles y la Tortuga que negaba el movimiento o la paradoja de Epiménides, según la cual una proposición se negaba y se afirmaba a la vez, pero fue en las postrimerías de la Edad Media cuando estas irregularidades comenzaron a multiplicarse como una plaga maligna. Esta herejía, que ofuscó tanto a los pitagóricos como a los Padres de la Iglesia, ponía en evidencia que la ciencia podía equivocarse, contrariamente a lo que se pensaba hasta entonces.

Para revertir esta tendencia caótica, numerosos hombres de ciencia trataron de sistematizar las matemáticas y las leyes que las gobernaban.

Uno de los primeros en realizar esta labor fue Euclides, el cual, en sus Elementos, intentó derivar todas las reglas de la geometría a partir de cinco axiomas básicos. Más tarde, filósofos y matemáticos como René Descartes, Immanuel Kant, Frank Boole, Gottlob Frege y Giuseppe Peano buscaron hacer lo mismo en campos tan alejados como la estadística y el cálculo infinitesimal, con resultados poco concluyentes. Entre tanto habían aparecido nuevas paradojas, como las introducidas por Georg Cantor en su teoría de conjuntos.

Al iniciarse el siglo XX, la situación era aún más confusa que antes.

Conscientes de las aberraciones derivadas de las teorías de Cantor, los matemáticos ingleses Bertrand Russell y Albert North Withehead se unieron para tratar de reelaborar todas las matemáticas a partir de unos cuantos principios básicos, tal como había hecho Euclides dos mil años atrás en lo que ellos denominaron 'teoría de los tipos'. Como resultado de este método publicaron, entre 1903 y 1910. un tratado monumental, titulado The Principles of Mathematics -o Principia Mathematica en una clara alusión a la obra maestra de Newton-, gracias al cual deberían desaparecer las incómodas contradicciones del saber matemático anterior

Desafortunadamente, la obra era tan vasta y compleja que, al final, nadie quedó convencido de que a partir de sus postulados podrían derivarse todas las demostraciones posibles sin caer jamás en un sinsentido. Poco después de la aparición de los Principia, David Hilbert, un matematico de la Universidad de Gotinga, leyó durante un congreso en París una ponencia que se conoció a partir de entonces como Programa de Hilbert. En él se presentaba una lista de los grandes problemas aun no resueltos por las matemáticas -la tarea para los especialistas del futuro- entre los que se hallaba, señaladamente, la llamada 'cuestión de la completitud'. La pregunta era básicamente, si el sistema descrito en los Principia Mathematica -o cualquier otro sistema axiomático- era coherente y completo, es decir, si contenía o no contradicciones y si cualquier proposición aritmética podía ser derivada a través de sus postulados. Hilbert pensaba que la respuesta sería afirmativa, como señaló a sus colegas reunidos en París: 'Todo problema matemático es susceptible de solución, todos nosotros estamos convencidos de esto. Después de todo, una de las cosas que más nos atraen cuando nos dedicamos a un problema matemático es precisamente que en nuestro interior siempre oímos la llamada aquí está el problema, hay que darle una solución; ésta se puede encontrar sólo con el puro pensamiento, porque en matemáticas no existe el ignorabimus.'

El Programa de Hílbert era la Biblia de los matemáticos y lógicos del mundo -le explicó Von Neumann a Bacon-. Resolver uno solo de sus problemas significaba convertirse en un hombre famoso. ¿Lo imagina? Cientos de jóvenes, en todas partes del mundo, quebrándose la cabeza con tal de encajar una sola pieza en el gigantesco rompecabezas trazado por Hilbert. Quizás usted, como físico, no sea capaz de comprender la magnitud del reto... Había que probar que uno era el mejor... La carrera era, pues, no sólo contra aquellos rivales incógnitos, sino contra el tiempo. Una verdadera locura." [Volpi, Jorge: En busca de Klingsor, pp. 85-87]

Explique con cierto grado de sistematización la historia de las matemáticas que describe Volpi de forma literaria a partir de lo que usted estudió en este capítulo (forme una secuencia de momentos matemáticos). ¿Qué es el programa de Hilbert?

CAPITULO XXVII

USOS DE LA HISTORIA EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA



Lo que haremos en este capítulo es estudiar el tema del uso de la historia de las matemáticas en la enseñanza y aprendizaje de estas disciplinas y determinar la forma en la que las diferentes visiones filosóficas lo pueden condicionar. Buscamos encontrar el enfoque filosófico que permitiría el uso más completo y edificante de la historia en la Educación Matemática.

27.1 Relevancia de la historia en la educación científica y matemática

Ha sido reconocida desde hace algún tiempo la importancia de la historia de las matemáticas en la Educación Matemática. Una señal clara de esto es la existencia desde hace varios años del Grupo History and Pedagogy of Mathematics del International Committee of Mathematics Instruction. Importantes textos hacen constantes referencias a pasajes históricos y, en ciertas ocasiones, el orden histórico se ha tomado como base en la explicación de contenidos.



Adam, Rodin.

La historia de la ciencia, después de largos años desde su profesionalización con Sarton, ha empezado a ocupar un lugar particular y un papel cada vez más significativo en las aproximaciones epistemológicas y educacionales alrededor de las ciencias. En América Latina diversas publicaciones e investigaciones periódicas en historia de la ciencia han empezado a desarrollarse y estos estudios tienden a abrirse un espacio cada vez más importante en universidades e institutos (esto se dio especialmente en los años treinta en Estados Unidos; Sarton contó entonces con el valioso apoyo del entonces Rector de la Universidad de Harvard). Sin embargo, durante mucho tiempo el uso de la historia de las matemáticas ha sido muy reducido; incluso en buena parte de la enseñanza moderna de las matemáticas no aparece en ninguna forma.

La formación de los profesores de matemática, en general, se ha visto eximida de la historia de éstas (salvo tal vez por algún curso aislado y poco meditado de los currícula ordinarios). El énfasis de la educación matemática ha sido puesto en una vía abstracta y poco intuitiva. Detrás de esto, como hemos expresado antes, existe un sustrato filosófico.

La concepción del uso de la historia en la educación varía en función de la filosofía de las matemáticas que se posea. Y éste constituye uno de los ejemplos más importantes de la relación entre la ideología o la filosofía y la práctica educativa matemática.

A veces, es posible considerar la inclusión de referencias históricas aisladas de tipo anecdótico como recurso de motivación y, en otras ocasiones, programas estructurados con base en el devenir histórico concreto. La importancia o no de la introducción de la historia y el uso preciso de la educación matemática no es producto de un desarrollo intrínseco de los contenidos matemáticos, sino que está profundamente condicionado por objetivos que encuentran sentido y coherencia especialmente en las visiones aceptadas consciente o inconscientemente sobre la naturaleza de las matemáticas.

Con esto, no quiero decir que los principios de la educación matemática alrededor de la historia son deducidos de una manera lógica de una filosofía de las matemáticas. Me refiero, sobre todo, a la necesidad de señalar el papel jugado por las creencias o ideologías, más o menos consistentes desde un punto de vista teórico, que los matemáticos, educadores, filósofos, administradores educativos y otros han asumido como correctas.

Tampoco quiero decir que toda filosofía implica necesariamente una práctica educativa; como señalaba hace algunos años el profesor John Threlfall, de la University of Leeds: "La filosofía en el sentido de la consideración de verdades fundamentales brinda a las personas visiones que bien pueden sostener pero que no constituyen principios para la acción a no ser que otros pasos sean dados" [Threlfall, John: "Absolutism or fallibilism What difference does it make to the classroom?" en Philosophy of Mathematics Newsletter 7 (Febrero 1994)].

27.2 Ideología y práctica matemática

Sobre la contraposición entre ideología y práctica debemos hacer una digresión. No excluimos aquí la importancia de la práctica concreta con su multitud de experiencias, lecciones y resultados particulares en la educación y la acumulación de nuevos criterios, aproximaciones y resultados específicos que han cargado la mayoría de congresos internacionales sobre la enseñanza de las matemáticas. Muchos resultados positivos han emergido de los errores y desaciertos corregidos prácticamente en el pasado. Sin duda, la educación no gira en el vacío de las ideas al margen de dimensiones reales del mundo; las teorías y los métodos educativos asumen precisamente como puntos de referencia la realidad y su evaluación. Ellas evolucionan en relación esencial con el devenir de la práctica educativa particular, así como la totalidad sociohistórica.

Es decir, yo reconozco el papel preciso de las actividades intelectuales de los hombres en su contexto histórico pero, al mismo tiempo, quiero enfatizar la importancia de la ideología entendida como conjunto más o menos coherente de representaciones de la conciencia en su construcción. Esta representa en efecto un adecuado punto de partida para entender las actividades de la evolución de los hombres.

Considero, en general, a la ideología como un factor social que a veces determina el devenir no sólo intelectual sino también sociohistórico. En ese sentido no considero a la ideología sobre las matemáticas y sobre las ciencias en general como un "reflejo" de la "práctica" matemática o de las ciencias. No se trata meramente de una consecuencia determinada por esa práctica ni, por otro lado, determinada por otros estratos "materiales" de la actividad humana.

A veces, se considera a la ideología como una esfera pasiva y, en ocasiones, producto del movimiento de condiciones económico-productivas de la sociedad. Se busca con estas aproximaciones encontrar todos los determinantes ya sea del Positivismo o del Liberalismo, por ejemplo, en el "desarrollo de las fuerzas productivas".

Muchas actitudes metodológicas deterministas y doctrinarias han subestimado el papel de las esferas ideológicas y de la cultura en general en la comprensión de la misma cultura y de la sociedad. Por otro lado, tampoco las ideologías determinan "las leyes de la historia y la sociedad".

Se trata aquí de encontrar puntos de partida metodológicos que integren en una proporción justa el devenir de la sociedad con todos sus condicionantes y la ideología sobre las matemáticas y la práctica matemática concreta incluyendo su enseñanza. Es decir, se trata de abordar el estudio y la evaluación de las matemáticas y su enseñanza a partir de las realidades históricas particulares y concretas. Aquí afirmamos el imperativo de realizar el análisis histórico concreto a partir de la actividad global y particular de los hombres, a partir de la totalidad.

En este terreno teórico las premisas a priori deterministas desaparecen. A veces un factor es esencial y decisivo, a veces otro. En todos los casos se da una profunda dialéctica que, en lugar de afirmar la existencia de "uniformidad" o "leyes objetivas" en el devenir de la historia y la conciencia social, afirma la multiplicidad y la diversidad. Una dialéctica que afirma el papel del azar en la configuración de la historia y frente a la necesidad implacable de las leyes. Se trataría de una interpretación metodológica que valora de manera sustancial el papel de los individuos y sus ideas en el devenir sociohistórico.

La anterior discusión metodológica es importante en la medida en que es posible concluir que los procesos de desarrollo de las matemáticas deberían analizarse especialmente a partir de las realidades de las comunidades matemáticas, en cada momento histórico, así como sus relaciones con el resto de la sociedad. La evolución de sus tendencias debería entonces buscarse en un "debate" teórico y práctico de paradigmas aceptados o no y en toda una serie de consideraciones similares a las necesarias en el escrutinio de la evolución de las demás ciencias "naturales".

Un punto de partida externalista sobre la estructura de las revoluciones científicas en general puede aplicarse mutatis mutandis sobre el devenir de las matemáticas para rastrear importantes "situaciones problema" en la historia de la matemática: alrededor del Cálculo (en el siglo XVII y siglo XVIII) o alrededor de la Geometría no euclidiana y los cuaterniones (a principios del siglo XIX). Sin duda, importantes discusiones sobre los infinitesimales, el continuo y la teoría de conjuntos podrían estudiarse con una óptica más concreta y "situacional".

Ahora bien, si en el devenir del mundo de las matemáticas es adecuado asumir esta aproximación metodológica, con mucha mayor justicia esto se debería hacer en el estudio de la enseñanza de éstas. Pero vamos a dejar esta discusión en este punto.

27.3 Filosofías e historia de las matemáticas

¿Cuál sería el papel más adecuado de la historia en una educación matemática que afirma el carácter sintáctico y convencional de las matemáticas? Se trataría en el mejor de los casos de proporcionar ejemplos "motivantes" de introducción a las teorías o de la aplicación de éstas en la realidad. Si las matemáticas son un lenguaje, por más importante que se le considere, lo decisivo para aprenderlo es usarlo tal cual; la evolución histórica de éste no es importante. Existen en esta visión algunas consideraciones epistemológicas razonables. Sin duda, buena parte de las matemáticas posee un carácter sintáctico y mucho es sujeto a la conveniencia y a la convención. La visión sintáctica de las matemáticas estuvo presente en las discusiones sobre los fundamentos de la matemática desde finales del siglo XIX.

El Círculo de Viena lo hizo parte de su "catecismo" principal en el libro de A. J. Ayer Lenguaje Verdad y Lógica. En el uso de la historia de un lenguaje para aprenderlo a usar, aparte de las motivaciones para su aprendizaje, lo importante es la aprehensión de las reglas de la sintaxis. Pero, además, si estas reglas son posibles de cambiar por conveniencia o convención el origen histórico de los contenidos matemáticos resulta todavía menos importante cuando la sintaxis es lo decisivo; la semántica con la que aparece históricamente no puede resultar importante.

Es claro que, asumida esta visión filosófica sobre la naturaleza de las matemáticas, su enseñanza no requiere de la historia de las matemáticas para la asimilación de sus contenidos (epistemológicamente) ni para la estructuración de sus planes de estudio.

Supongamos que se asume que el corazón de las matemáticas lo constituye la axiomática y las estructuras formales. Es decir, lo central son las configuraciones estructurales formales, las reglas de consistencia y la organización axiomático-deductivas de las matemáticas. La educación matemática correspondiente buscaría enfatizar precisamente lo axiomático-formal y deductivo. La historia tal vez permitiría mostrar el origen y el desarrollo histórico de las estructuras. Pero el origen favorecido de presentación de los contenidos siempre sería el lógico. Las matemáticas no serían vistas como sucesiones de problemas históricos en las que es posible obtener incluso diferentes vías de solución o de orientaciones teóricas que dependen de una multiplicidad de factores no lógicos. Se favorece aquí una visión uniforme, racional y deductiva, y no una multiforme, intuitiva e histórica.

Si se considera que las entidades de las matemáticas son parte de un mundo "platónico" independiente de la voluntad de los hombres (sólo vinculado a éstos a partir de la razón), la historia jugaría cierto papel. La práctica matemática descansaría aquí en la búsqueda de verdades intemporales y la descripción de los objetos de ese mundo no material. (Esto es lo que se suele llamar platonismo en matemáticas. Se acepta la existencia de las entidades matemáticas al margen de la construcción individual humana. La dialéctica del crear-descubrir se resuelve unilateralmente en beneficio del segundo término.) La historia de las matemáticas reproduciría los momentos y el cómo fueron descubiertas las verdades, pero se trataría en esta visión de procesos eminentemente mentales en los que la realidad natural y social poco tendrían que hacer. No se trataría de un proceso de creación y modificación de resultados con relación al mundo y la mente de los hombres, sino de una aprehensión espiritual-racional (aunque deductiva) de realidades intemporales e independientes.

Si se quiere, la historia representaría un papel importante pero sería una historia de vivencias psicológicas, de recursos y mecanismos mentales, de situaciones motivantes de las aprehensiones de los objetos abstractos. Es decir, no se trataría de una historia material y social, cargada de debates, esfuerzos, individuales y colectivos (siempre parciales) y modificaciones a veces sustanciales producto de irrupciones poderosas de estratos sociales externos al mero pensamiento deductivo o racional; la educación aquí se concentraría en dos cosas: transmitir las verdades absolutas descubiertas y, por otra parte, los mecanismos de su aprehensión.

La dialéctica de la mente y la realidad sociohistórica aparecería aquí distorsionada por un "mentalismo" abstracto que, a lo sumo, favorecería una historia psicológica e "internalista" y, por lo tanto, insuficiente para poder dar cuenta de la construcción matemática (de los procesos interrelacionados mentales, materiales, sociales que intervienen en ella). Pero, además, se trataría de una historia muy difícil de establecer teóricamente. Por eso mismo se iría descansando en un

"fenomenalismo existencial" que enfatizaría sobre todo la reproducción de experiencias mentales (que pueden ser deductivas) que desencadenen la aprehensión de las verdades y las entidades matemáticas. Pero esto mismo conduciría, entonces, a reducir las posibilidades de intervención de la historia en la enseñanza.

Se podría asumir una visión diferente de las anteriores en la que las matemáticas fuesen producto-construcción del sujeto (epistemológicamente). Es decir, un constructivismo metodológico que afirme el rol del sujeto pero en donde lo material y social sirve apenas como punto (pasivo) de referencia. No se aprehenden aquí verdades absolutas, se trata de procesos de acumulación de resultados que la mente crea aunque la mente posea una referencia material biológica y social. Con esta aproximación la historia jugaría un rol más importante, sobre todo en la descripción y esclarecimiento de los pasos constructivos que históricamente se han dado.

Pero existe una dificultad. El carácter pasivo de lo material y social del objeto epistemológico podría generar otra historia psicologista, individual y artificial, tomando en cuenta, por ejemplo, sólo los aspectos de orden psicogenético. Si esto fuera así, el papel de la historia de la matemática en la educación de éstatambién se relativizaría.

Si el punto de partida filosófico fuese el Empirismo clásico, la evolución histórica aparecería importante al enfatizar el carácter "aproximado" de las verdades matemáticas. Estas serían el producto de experiencias sensoriales directas y concretas; lo que permitiría el cambio y la relativización. Las condiciones de su aprehensión-construcción y las influencias posteriores en su desarrollo parecen ser importantes en la medida que ayudan a esclarecer su gestación como recurso de nuevos resultados. La referencia al conjunto de experiencias sensoriales que generaron un resultado pueden ayudar a dar un sentido intuitivo y reproducible para su asimilación. Es posible entender la base de relaciones materiales y sociales que presionaron en la decantación y cristalización de una noción matemática. Una visión empirista clásica aparece como un buen punto de partida. Sin embargo, es insuficiente. No es posible reducir las matemáticas a inducción y generalización de experiencias sensoriales directas. Ese tipo de reducciones rechaza las múltiples posibilidades del intelecto y condenan la mente a ser una pantalla donde sólo lo material y físico (externo) dibujan las imágenes prácticamente sin intervención del sujeto.

Esta caracterización pasiva del sujeto encierra muchos problemas. Diferentes resultados epistemológicos revelan que los procesos mentales involucrados en las matemáticas y la ciencia en general trascienden de lejos el plano de la inducción y la generalización. (En el Empirismo clásico, el inductivismo en las teorías de la ciencia era la visión más aceptada. La noción de inducción ha sido desde entonces objeto de muchas discusiones en la Filosofía de la Ciencia. Tal vez sea más conveniente pensar, con Popper, que es más adecuada la visión del "error y corrección" en la comprensión de la evolución de las teorías científicas.)

Por otra parte, existe una dimensión estructural de las matemáticas que no puede ser captada analíticamente si el sujeto epistémico es sólo el receptáculo del movimiento del objeto. En este tipo de visiones la historia que se usaría no incluiría la correlación de acciones del sujeto con el contexto social y, por ende, dejaría por fuera el mundo de acciones, construcciones y operaciones que los sujetos realizan creativa y libremente frente a la realidad externa.

Todo parece apuntar a que el uso de la historia de las matemáticas jugaría un papel más importante en el seno de una visión filosófica que afirme al mismo tiempo una base de partida empírica y un

papel activo del sujeto epistémico. Es decir, la historia se vuelve esencial cuando se establece un cierto constructivismo socioempírico. El sujeto epistémico es el que construye las nociones y entidades matemáticas en un proceso de múltiples recursos mentales pero siempre sobre la base activa también de realidades materiales y sociales. Se vuelve importante esclarecer los pasos constructivos así como el medio material-social en el que toman cuerpo. Al asumir esta aproximación epistemológica no se afirma una predeterminación a priori de los factores epistemológicos; es decir, no se afirma una "proporción teórica" de aplicación universal. La proporción en la que los factores epistemológicos actúan en la práctica matemática es en sí un problema histórico concreto.



El secreto, Rodin.

27.4 Historia y educación matemática

El hecho de que en los últimos años se haya incrementado la presencia y uso de la historia como un recurso decisivo en la enseñanza de las matemáticas y, en especial, en la formación de los educadores, conduce a pensar que se trata de otro signo del avance de visiones filosóficas que se alejan de los paradigmas dominantes del pasado. Es decir, el desarrollo de una mayor intervención de la historia de las matemáticas en su enseñanza revela la existencia de modificaciones en la percepción que se tiene de la naturaleza de las matemáticas. Hasta dónde esto ha evolucionado es difícil de precisar.

Es, también, previsible que sea precisamente en la enseñanza de las matemáticas donde se busque hacer modificaciones. La educación plantea de una manera práctica la mayoría de los problemas epistemológicos centrales, y exige soluciones concretas (que serán siempre sujetas a la crítica, al error y la corrección). La educación se convierte en un especial factor dinámico en el desarrollo de las reflexiones epistemológicas y filosóficas en general.

No sería extraño entonces pensar en las comunidades de educadores de la matemática como el medio social más adecuado para construir importantes modificaciones en la percepción de la naturaleza de las matemáticas. En este sentido, lo que se podría conceptualizar como "filosofía de la educación matemática" más que una parte de la filosofía tendría un sentido pragmático integrado a la misma educación matemática.

Es éste precisamente el punto de vista que asume Paul Ernest en un debate, relativamente reciente, con el profesor de filosofía Zheng Yuxin de Nanjin University en China:

"Mi posición es que la filosofía de la educación matemática es primariamente una parte de la educación matemática. Se trata de una perspectiva sobre los problemas y asuntos de la educación matemática, pero que integra y aplica los métodos y conceptos de la filosofía." [Ernest, Paul: "In response to professor Zheng". Philosophy of Mathematics Education Newsletter 7 (February 1994)]

Una nueva visión aceptada de las matemáticas que sustituya los anteriores paradigmas cuestionados no existe todavía. Podría decirse que el primero en introducir una visión crítica del paradigma de las matemáticas como verdades infalibles y siguiendo una estructuración axiomático-deductiva fue Lakatos a finales de los sesenta. [La principal influencia de Lákatos provenía de Popper quien ofrece el falibilismo como una respuesta a lo que llamó doctrinas "justificacionistas": que establecen una categoría de conocimiento como fuente de autoridad y fundamento de otras o todas las demás (como la lógica, la aritmética, etc.)]

Frente a lo que él llamó un modelo "euclídeo" de entender las matemáticas, ofreció una visión crítica falibilista de éstas.

Desde entonces se han producido trabajos en esa dirección como los de Davis y Hersh, Kitcher, Tiles y Kline; y es, precisamente, el marco teórico de partida en el que encuentra sustento nuestro análisis. Este llamado a una nueva visión no podría entenderse al margen de la contribución del nuevo "externalismo" en la historia de la ciencia que afirma una contextualización social y gremial de la evolución de la ciencia con Kuhn, Feyerabend, Toulmin, Lakatos, Laudan y otros.

La asunción de una visión falibilista de las matemáticas tiene varias implicaciones. Ernest resume el asunto así:

"El establecimiento del conocimiento matemático como falible y cuasi empírico significa que las matemáticas no están herméticamente selladas y separadas de otras áreas del conocimiento, la actividad y los valores humanos. Esto significa que en las matemáticas al igual que en las ciencias y otras áreas del conocimiento humano el contexto de descubrimiento y de justificación se penetran mútuamente. Consecuentemente, no se les puede negar a los asuntos sociales, culturales y éticos un impacto sobre las matemáticas y el conocimiento matemático y debe admitirse con un rol esencial y constitutivo en la naturaleza del conocimiento matemático." [Ernest, Paul: "In response to professor Zheng". Philosophy of Mathematics Education Newsletter 7 (Febrero 1994)]

En los congresos internacionales de educación matemática durante los años 80 y en los principales "journals" de la disciplina lo que se ha llamado constructivismo se ha vuelto persistente. Podríamos decir que los puntos de partida filosóficos de esta tendencia los resume Glasersfeld en dos afirmaciones:

"i-el conocimiento no se recibe pasivamente sino que se construye activamente por el sujeto epistémico, y ii-la función cognoscitiva es adaptativa y sirve a la organización de la experiencia con el mundo y no al descubrimiento de una realidad ontológica." [Glaserfeld, E. von. "Constructivism in Education" en la obra editada por Huse, T. y Postlethwaite, T. N. The international Encyclopedia of Education Suplementary Volume, Oxford: Pergamon Press, 1989, p. 162.]

Existe influencia de Piaget en este tipo de visión.

Ahora bien, del "falibilismo" en la filosofía de las matemáticas al constructivismo en la educación matemática, pareciera que hay sólo un paso puesto que si se asume que una práctica cognoscitiva es falible, es muy comprensible considerarla como producto de la creación humana y su construcción, pero el asunto no es tan sencillo.

El constructivismo enfatiza el papel del sujeto en el aprendizaje y establece una relación sujeto-objeto a partir de éste, pero alguien bien podría plantear estos procesos constructivistas en la búsqueda de verdades intemporales de las matemáticas. Ya lo hemos sugerido antes: puede darse un constructivismo desprovisto de contenido material y en donde la relación con el resto del conocimiento -al que se refiere Ernest- se da sólo por la acción del sujeto como en Kant.

La realidad, sin embargo, es que la palabra "constructivismo" ha sido como un paraguas donde se han cobijado muchas posiciones filosóficas: es decir, salvo por la referencia general a los métodos constructivos, no es posible un examen serio sin realizar análisis precisos sobre estas nuevas corrientes. Sin embargo, de manera general, la visión que ha predominado hasta ahora en las nuevas tendencias de la enseñanza de las matemáticas ha asumido una visión epistemológica constructivista en general pero ha procurado no adoptar un punto de partida ontológico que, por ejemplo y en particular, interprete de una nueva manera el carácter empírico de las matemáticas.

También se ha dado una tendencia que se puede llamar socioculturalista que afirma los aspectos sociales en la construcción cognoscitiva.

"En la visión sociocultural se asume un individuo que está inmerso en un medio social y cultural que es decisivo para la práctica educativa, que influencia y determina hasta cierto punto las condiciones de esa práctica. Es claro que una de las tradiciones ideológicas y filosóficas que más ha puesto en relevancia el papel de lo social y cultural en el conocimiento es el marxismo. Para el marxismo la ciencia y el conocimiento deben estudiarse como fenómenos sociales, y las condiciones sociales (normalmente las macrovariables) terminan determinando el curso de la práctica científica. Por ejemplo, en la disciplina de la Historia de la Ciencia fueron intelectuales de corte marxista los que más influencia tuvieron en las primeras fases del llamado Externalismo en los años 30. Por eso no resulta extraño que muchas ideas que se han usado en esta corriente socioculturalista en la reciente educación matemática posean la influencia del soviético Vygotsky así como de otros teóricos (como V. V. Davydov , A. N. Leontev , y Galperin)." [Ruiz, A.: El desafío de las matemáticas, p. 79]

El escenario intelectual se puede resumir así:

"Es interesante señalar que, precisamente, ya en los últimos años y de cara al nuevo milenio, por razones que convendría explicar en otra parte, crece una tendencia en la comunidad internacional de educadores de las matemáticas a buscar un plano de convergencia entre las dos principales tendencias metodológicas en la epistemología de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Más son los constructivistas que acuden a la presencia de lo social y más los socioculturalistas que aceptan la participación activa del individuo en los procesos cognoscitivos. Y en las filas del constructivismo se llega a afirmar que el individuo (en su accionar) no solo construye las nociones como autoorganización sino que, también, las recibe por el influjo del maestro y del entorno en el que se desarrolla la práctica educativa: no hay solo autoconstrucción cognoscitiva sino, también, influjo social y cultural. Existe una dirección hacia una visión más integrada de la dimensión activa del sujeto, la acción de lo social y cultural y del objeto material externo en el conocimiento y el aprendizaje". [Ruiz, A.: El desafío de las matemáticas, p.]

Aunque las nuevas tendencias en la Educación Matemática favorecen un mejor aprovechamiento intelectual y formativo de la historia, todavía es necesario empujar hacia un mayor énfasis de la contextualización histórica, social y cultural, y empírica de la naturaleza de las matemáticas y su enseñanza.

27.5 Anexo: internalismo y externalismo en la Historia de la Ciencia

Uno de los temas que debe estudiarse en torno a los posibles usos de la historia de las matemáticas en su enseñanza aprendizaje es la polémica quue se dio hace algunos años en torno a la metodología de la historia de la ciencia. Para eso, como un anexo, vamos a introducir algunos fragmentos de la introducción de nuestro libro Historia de las matemáticas en Costa Rica. Una introducción:

En los años sesenta Thomas Kuhn publicó su obra La estructura de las revoluciones científicas, la cual desencadenó una extraordinaria polémica entre los filósofos y estudiosos de la ciencia. Es una obra que, sin embargo, cristalizó actitudes y tendencias que se venían desarrollando en teóricos de la ciencia desde antes.

Aclaremos primero los términos: el internalismo asume que la génesis y la validación de los conocimientos no están influenciados por factores externos y su estudio es de competencia de la historia y la filosofía de las ideas: la sociología y la psicología tienen muy poco que ver en el desarrollo de la ciencia. Los elementos que se tienden a enfatizar son los teóricos en sí mismos: la racionalidad y la lógica. El externalismo asume la posición opuesta. Su interés debe dirigirse hacia la estructura u organización de la ciencia: ciencia y tecnología, responsabilidad social de la ciencia, política científica, gobierno y ciencia, etc. Es decir, se da un énfasis a los factores psicosociales, políticos, orgánico-administrativos, etc., en detrimento generalmente de elementos lógico-deductivos de la ciencia. El externalismo encuentra sus raíces en tendencias teóricas que van de la fenomenología y la sociología descriptiva hasta el marxismo.

El internalismo ha estado íntimamente vinculado al Neopositivismo: en gran medida, el 'reconstruccionismo lógico' que se derivara de las posiciones de muchos de los 'internalistas' fue consecuencia de los puntos de partida filosóficos asumidos por el Círculo de Viena y sus seguidores. Sarton, el formador de la profesionalización de los historiadores de la ciencia, fue

claramente 'un internalista'. En realidad, excepto algunos casos provenientes del materialismo marxista y la escuela mertoniana la gran mayoría de los historiadores de la ciencia hasta los años cincuenta eran internalistas (con importantes distinciones entre ellos).

Conviene distinguir dos tipos de internalismo: de primer grado y de segundo. Entre los internalistas del primer tipo se podrían alinear historiadores y filósofos como Koyré, Nef, Hall, Agassi para citar unos pocos. Para éstos, la Historia de la Ciencia sería la historia de las ideas eludiendo la incorporación del análisis de cualesquiera factores externos. Una posición más flexible (un segundo grado) podría muy bien estar representada por Popper y por los trabajos de Lakatos y su famosa teoría de las reconstrucciones racionales . En realidad, las primeras posiciones de Popper y de Lakatos eran mucho más cercanas al internalismo que las que plantearon posteriormente.

Como historia externalista debe catalogarse el materialismo histórico marxista, en especial la escuela soviética. Esta posición se planteó en el Segundo Congreso Internacional de Historia de la Ciencia, en Londres, en 1931, cuando los enviados soviéticos, Bujarin y Hessen, iniciaron una perspectiva que rompía con el tipo de historia internalista. Las posiciones de intelectuales muy conocidos como John Bernal y Joseph Needham se inscriben en este materialismo histórico que, muchas veces, conduce a un determinismo simplista que remite el crecimiento de la ciencia meramente a la evolución de las fuerzas productivas. Por otra parte, también existía una sociología promovida por los trabajos de Robert Merton que intentaba una descripción sociológica cuantitativa (siguiendo cierta tradición de Durkheim) funcionalista.

Se puede afirmar que hasta la década de los sesenta se daba un estancamiento extraordinario del externalismo entre los historiadores de la ciencia.

Es, precisamente, la obra de Kuhn y la de otros autores de la misma época, como Feyerabend y Toulmin, lo que va a abrir nuevas posibilidades para abordar la historia de la ciencia. La idea metodológica central de Kuhn gira en torno a las revoluciones científicas y la intervención decisiva del factor psicosocial corporalizado en las comunidades científicas que escogen o desechan paradigmas en un complejo proceso. En el paso revolucionario de 'ciencia normal' a 'ciencia extraordinaria' aparecen conceptos que encuentran filiación con ideas de Koyré, Piaget y la escuela fenomenológica francesa de Bachelard o Michel Foucault (o incluso althuserianos como Michel Fichant y Michel Pecheux).

El Positivismo desde Compte ha intentado apartar de la comprensión de la ciencia el proceso heurístico y poco diáfano del descubrimiento, así como los saltos no lineales ni acumulativos. El Neopositivismo del Siglo XX ha tenido una gran influencia intelectual en el mundo occidental moderno (especialmente en los países anglosajones). En esquema, podríamos señalar como dos de sus principales fundamentos teóricos los siguientes: por un lado, una teoría del conocimiento que reproduce lo que se considera es la esencia de las ciencias empíricas y, por otro lado, la sistemática utilización de la lógica matemática. El conocimiento científico es, para ellos, fundamentalmente una colección de derivaciones lógicas y otra de comprobaciones empíricas. Su interés reside en la justificación racional de ellas y su consistencia lógica, así como su 'correspondencia con los hechos'. Siguiendo la distinción de Reichenbach entre el 'contexto del descubrimiento científico' y el 'contexto de justificación', podemos decir que los neopositivistas enfatizan el segundo. Las leyes de la ciencia deben, para ellos, ser reformadas según los modelos lógico-formales. El tratamiento de la ciencia se reduce en gran medida, entonces, a los problemas de una lógica aplicada.

Existe en esta visión una radical despreocupación por la génesis y, si se quiere, por la evolución auténticamente histórica del conocimiento científico. Por otra parte, también, es posición neopositivista asumir una supuesta neutralidad o descontextualización del lenguaje científico mediante el que se expresa el conocimiento. Es decir, la vieja teoría de un lenguaje de hechos, objetivo e incapaz de transmitir la contaminación humana o social. Es frente a esta visión filosófica imperante en la Historia de la Ciencia que intervinieron Kuhn y Feyerabend: una reacción no sólo contra el internalismo, que es más bien una consecuencia teórica, sino muy especialmente frente al Neopositivismo.

El externalismo marxista, mientras tanto, se había revelado incapaz de dar cuenta de la estructura de las revoluciones científicas y de los procesos de la ciencia a partir del esquema, trivial y mecánico, que considera a la ciencia parte de las fuerzas productivas que, a su vez, determinan el resto de la estructura social (un determinismo de la base económica). En ocasiones, durante la era estaliniana, los marxistas y filomarxistas llegaron a afirmar que existían ciencia 'burguesa' y ciencia 'proletaria', esta última la desarrollada en la URSS. La lógica de la ciencia venía así a ser expresión directa de las contradicciones de clase, con lo que se eliminaba de un tajo la dinámica interna propia del decurso de las teorías científicas. Los abanderados de la ciencia 'proletaria' llegaron, incluso, a negar la Genética y a cuestionar la Teoría de la Relatividad, y a buscar un condicionamiento social y económico sumamente rígido de la evolución de la ciencia, lo que tuvo un impacto negativo extraordinario durante décadas en la sociedad soviética: el caso Lysenko en la biología y en la agricultura soviéticas fue nefasto para ese país. La incapacidad del marxismo en la comprensión del papel esencial de la cultura y de las ideas en general en el devenir social no le permitía a sus teóricos dar una respuesta al internalismo.

En síntesis: las nuevas ideas aparecían en un doble contexto, por un lado un internalismo unilateral idealista fuerte y extremo y, por el otro lado, un externalismo de carácter marxista poco útil y capaz para poder explicar el desarrollo de la ciencia. Ni los marxistas ni los mertonianos daban una explicación metodológica adecuada. Feyerabend reaccionó contra la deficiente metodología neopositivista y clamó por introducir la vida de nuevo en el entendimiento y práctica de la ciencia. Kuhn reaccionó contra el esquema aceptado de la ciencia y hundió su análisis en la práctica. El proceso psicosociológico de la misma encontró el corazón de las transformaciones paradigmáticas en los científicos mismos. Su análisis removió y ventiló metodológicamente la historia y la filosofía de la ciencia. La teoría de Kuhn lo que establece es, entonces, un puente con las comunidades científicas entre el devenir propiamente conceptual de la ciencia y el devenir social. Hace incidir, entonces, el análisis de la Historia de la Ciencia en objetos concretos de carne y hueso. Este es un buen punto de partida metodológico, a pesar de las dificultades de precisión que, posteriormente, otros teóricos han encontrado en los conceptos de Kuhn (paradigma, ciencia normal, ciencia extraordinaria).

Me voy a permitir sobre este territorio sugerir algunas ideas para completar una visión sobre este conflicto entre externalismo e internalismo. En realidad, podríamos señalar dos posiciones en el internalismo: la primera posición es la neopositivista que apuntala el contexto de justificación y, entonces, los aspectos lógico-deductivos y formales de la ciencia; aunque ligados a las tareas de validación y por último de comprobación experimental. Es decir, se trata de una visión que se refiere a la lógica conceptual de la ciencia en sí misma. La posición de Alexandre Koyré y su escuela, por otro lado, no es la misma. Koyré va a afirmar que toda esa dimensión de la que hablan

los neopositivistas no puede ser separada de la dimensión de la filosofía y de la historia de las ideas, de la cultura y la ideología en un sentido general. Ambas posiciones son internalistas: no hacen intervenir elementos externos al mundo de las ideas. En mi opinión, es correcta la crítica de Koyré a la idea neopositivista de la no contaminación de la ciencia con metafísica y filosofía y, añadiríamos, con el mundo de la opinión. No obstante, la posición de Koyré deja por fuera elementos valiosos de naturaleza externa al mundo de las ideas que juegan un papel en el desarrollo y evolución de las ciencias.

Lo que es obvio es que ni un análisis internalista en el sentido neopositivista ni un análisis externalista en el sentido marxista, por ejemplo, son satisfactorios para entender la evolución de la ciencia: intervienen factores internos y externos, existe una participación múltiple y condicionada simultáneamente entre factores internos y externos. Cuáles factores juegan un papel más importante en un momento concreto, es algo que sólo se puede determinar sobre la base del análisis concreto. La mayor importancia de unos elementos sobre otros no se puede zanjar con una premisa a priori. En unos casos será de una forma, en otros casos será de otra. Esto es, sin duda, un llamado a una buena dosis de nominalismo metodológico en el análisis histórico. Yo afirmo la necesidad de reducir esa manía de buscar en la realidad histórica leyes generales, esa sobrestimación de la infalible necesidad. Resulta más conveniente abrir una dimensión amplia a la intervención del azar. Esto es un llamado al estudio serio de casos concretos con una enorme flexibilidad metodológica.

27.6 Biografías

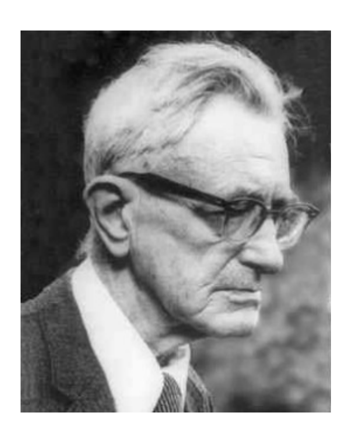


Imre Lakatos

Imre Lakatos nació el 9 de noviembre de 1 922 en Hungría. Fue bautizado con el nombre Imre Lipschitz. Debido a su procedencia judía, su vida se vería seriamente afectada por el ascenso de los Nazis al poder durante la Segunda Guerra Mundial. Realizó estudios en matemáticas, física y filosofía en la Universidad de Debrecen y se graduó en 1 944. Cambió su nombre a Imre Molnár con el objetivo de evitar su deportación. Él sobrevivió a la caza humana, pero su madre y abuela no fueron tan afortunadas y murieron en Auschwitz. Cuando la guerra acabó, Imre decidió cambiarse el nombre, otra vez, y escogió un nombre común de la clase obrera húngara: Lakatos.

En 1 947, obtuvo un puesto en el Ministerio de Educación pero no estaba dispuesto a seguir las órdenes de los soviéticos. En 1 950, fue arrestado por problemas políticos y estuvo en prisión por tres años. Al salir de la cárcel trabajó traduciendo libros de matemáticas al húngaro.

En 1 956, al estallar la revolución, huye a Inglaterra. Ingresa en la Universidad de Cambridge con el fin de obtener un doctorado en filosofía. En 1 960, obtuvo un puesto en la Escuela de Economía de Londres y enseñó ahí por catorce años hasta su muerte el 2 de febrero de 1 974.



Dirk Jan Struik

Dirk Struik nació el 30 de septiembre de 1 894 en Rótterdam, Países Bajos. Inició sus estudios en Hogere Bugerschool, la cual era una escuela que educaba a los hijos de personas de clase media que aspiraban a mejorar su estado social. Después de aprobar los exámenes adicionales que la escuela requería, en 1 912, ingresó a la Universidad de Leiden. Viajaba desde Rótterdam a Leiden en tren y nunca se involucró en la vida estudiantil. Estudió física y matemáticas.

En 1 917, dejó la universidad para tomar un puesto de enseñanza en una escuela en Alkmaar, al norte de Amsterdam, puesto que también dejó, al recibir la oferta de ser el asistente de Schouten. Después de presentar su tesis, obtuvo un puesto en la Universidad de Utrecht en 1 923. Ese mismo año, se casó con la matemática checa Ruth Ramler, quien había obtenido su doctorado en la Universidad de Praga. Viajó a muchos lugares y se estableció en Estados Unidos.

En 1 949 fue acusado por el FBI de pertenecer al partido comunista y fue severamente multado. A partir de su retiro en 1 960, aceptó invitaciones a Puerto Rico, Costa Rica y Utrecht. Promovió la historia de las ciencias, sobretodo de las matemáticas en América Latina.



André Weil

André Weil nació el 6 de mayo de 1 906 en París, Francia.

Estudió en universidades en París, Roma y Göttingen. Recibió su doctorado en ciencias en la Universidad de París en 1 928. De 1 930 a 1 932, enseñó en la Universidad Musulmana Aligarh en la India. A partir de 1 933, y hasta cuando estalló la Segunda Guerra Mundial, enseñó en la Universidad de Strasbourg. Para evitar ser enviado al ejército, huyó a Finlandia, pero fue encontrado y de vuelta en Francia encarcelado.

Su hermana, Simone Weil, era una filósofa mística y figura principal de la Resistencia Francesa. Él no tuvo otra opción, debido a su condición de judío, que unirse al ejército. Cuando tuvo la oportunidad, escapó a Estados Unidos e impartió lecciones en 1 941 en las Universidades de Haverford y Swarthmore, en Pensilvania.

En 1 945, obtuvo un puesto en la Universidad de Sao Paulo, Brasil, el cual mantuvo hasta 1 947, cuando volvió a los Estados Unidos y comenzó a trabajar en la Universidad de Chicago hasta 1 958. Por último, a partir de ese mismo año trabajó para el Instituto de Estudios Avanzados de la Universidad de Princeton hasta 1 976, cuando se retiró como Profesor Honorario.

Recibió muchos reconocimientos a lo largo de su vida: fue miembro honorario de la Sociedad Matemática de Londres en 1 959 y elegido miembro de la Sociedad Real de Londres en 1 966. Además, fue elegido por la Academia de Ciencias en París y la Academia Nacional de Ciencias de los Estados Unidos.

Murió el 6 de agosto de 1 998 en Princeton, New Jersey, Estados Unidos.



George Pólya

George Pólya nació el 13 de diciembre de 1 887 en Budapest, Hungría. Ingresó a la Universidad de Budapest a estudiar leyes, pero al poco tiempo las leyes le aburrieron y decidió estudiar idiomas y literatura.

Con el fin de entender la filosofía, tomó algunos cursos de matemáticas y su interés en ellas crecieron; fue así como en 1 912 obtuvo un doctorado en matemáticas. Un año después, partió a Göttingen y conoció a Hilbert y Weyl.

En 1 914, fue a Zurich, a cumplir con una cita que había sido acordada por Hurwitz. En 1 918, publicó sus primeros estudios acerca de la teoría de número; también publicó estudios referentes a la astronomía y a la probabilidad. En 1 924, fue a Inglaterra, a trabajar junto a Hardy y Littlewood, en un proyecto que se llamó Desigualdades y que fue publicado en 1 934.

La situación política en Europa lo forzó a trasladarse a Estados Unidos en donde trabajó por dos años en la Universidad de Brown y luego se pasó a Stanford.

Murió el 7 de septiembre de 1 985 en Palo Alto, California, Estados Unidos.



Florian Cajori

Florian Cajori nació el 28 de febrero de 1 859 en San Aignan, Graubünden, Suiza. Sus padres fueron Georg Cajori, un ingeniero conocido por construir caminos y puentes en Suiza y Catherine Camenisch.

Asistió a las escuelas de Zillis y Chur. A la edad de dieciséis años, emigró a Estados Unidos y estudió en el State Normal School en Whitewater, Wisconsin y se graduó de ahí dos años más tarde. Antes de ingresar a la Universidad de Wisonsin, enseñó en una escuela local. En 1 883, obtuvo el título de bachillerato y un año después ingresó a la Universidad de Johns Hopkins, pero fue en la Universidad de Wisconsin en 1 885, donde obtuvo su maestría. Ese mismo año, fue

asignado asistente de profesor en la Universidad de Tulane en Nueva Orleáns. En 1 887, inició a enseñar matemáticas aplicadas. Sostuvo la presidencia de física en Colorado College entre 1 889 y 1 898.

En 1 890, se casó con Elizabeth G. Edwards y tuvieron un hijo. En 1 894, obtuvo su doctorado de la Universidad de Tulane. En 1 918, obtuvo un importante puesto de matemáticas en la Universidad Berkeley, California, el primer puesto de este tipo que se fundó en Estados Unidos, lo cual le brindó una gran reputación. En 1 917 y 1 918, fue elegido presidente de la Asociación Matemática de América. En 1 923, fue vice-presidente de la Asociación Americana del Avance de la Ciencia y además, formó parte de la Sociedad de la Historia de la Ciencia y del Comité Internacional de la Historia de las Ciencias entre 1 924 y 1 930.

Acercándose a la edad de setenta años comenzó a tener problemas de salud y en 1 930 fue sometido a una operación de la cual nunca se recuperó totalmente, y murió seis meses después el 14 de agosto en Berkeley, California, Estados Unidos.



Marshall Harvey Stone

Marshall Stone nació el 8 de abril de 1 903 en Nueva York, Estados Unidos. Marshall estaba destinado a estudiar derecho según la tradición familiar.

Estudió en Harvard de 1 919 a 1 922, y durante los siguientes dos años fue instructor de la Universidad, fue allí donde se percató de que deseaba estudiar matemáticas.

En 1 926, obtuvo su doctorado en matemáticas, supervisado por George Birkhoff. Un año más tarde, comenzó a impartir lecciones en Harvard.

De 1 931 a 1 933 aceptó un puesto en la Universidad de Yale y luego regresó a Harvard hasta 1 937.

En 1 946, tomó el cargo de presidente de la sección de matemáticas en la Universidad de Chicago.

En 1 968, se retiró. Se le conocieron muchos intereses, entre ellos el amor a viajar desde que era muy joven, y fue en uno de sus viajes a la India en donde murió el 9 de enero de 1 989.

27.7 Síntesis, análisis, investigación

1. Investigue: haga una reseña biográfica de George Sarton.
2. ¿Cuál ha sido hasta ahora el papel que se le ha dado en Costa Rica a la historia de las matemáticas en los programas de formación de profesores y profesionales en la educación matemática?
3. Comente la relación entre ideologías (conjunto estructurado de ideas) y la práctica matemática.
4. Explique cuál sería el uso de la historia de las matemáticas en la visión sintáctica de las matemáticas?
5. ¿Qué papel tendría la historia de las matemáticas si se acepta una visión platonista de las matemáticas? ¿Y con una visión empirista?
6. En el siguiente texto se afirman dos dimensiones en las matemáticas. Estudie con cuidado el planteamiento del autor.

   "La historia de las matemáticas es, entonces, y de manera drástica, dual: no solo se refiere como en otras ciencias naturales especialmente a las situaciones socioculturales e individuales que crearon conceptos o explicaciones de un objeto físico; sino también, de manera privilegiada, a aquellas situaciones que crearon conceptos y explicaciones de otros conceptos y explicaciones: edificios que si bien empíricos en sus cimientos, en la argamasa de todo, así como en los constructores y albañiles, se elevan cada vez más 'hacia el cielo'. A pesar de esta elevación, por sus fundamentos empíricos (en sus nociones, métodos y artífices), se hace posible su aplicación en el mundo. En particular, nos parece que debe enfatizarse que las teorías matemáticas son aplicables en la realidad humana porque en sus edificios conceptuales las reglas de construcción no son cualesquiera (la poesía y la pintura no son matemáticas, aunque pueda que éstas sí sean poesía y pintura para el espíritu); las matemáticas refieren a operaciones y acciones precisas que se pueden asociar a manipulaciones de la realidad material o social. Tal vez el término de lógica no sea el más adecuado para referirnos al marco más general para encerrar el fundamento de estos quehaceres abstractos de las matemáticas pero, si se nos permite la imprecisión: asociamos ese término con procesos de validación de las construcciones matemáticas." [Ruiz, A.: El desafío de las matemáticas, pp. 56, 57]

   Explique con sus palabras el carácter dual de las matemáticas que se afirma en el texto. ¿Por qué son aplicables las matemáticas a la realidad?
7. Comente el uso de la historia de las matemáticas en la Educación Matemática y lo que en este texto se ha llamado constructivismo socioempírico.
8. Comente: la filosofía de la educación matemática debe formar parte activa de la educación matemática y no de la filosofía en general.
9. Explique cuáles consecuencias tiene para el uso de la historia en la Educación Matemática el asumir una visión falibilista y cuasiempírica de las matemáticas.

10.Explique la relación entre falibilismo y constructivismo en la educación matemática.

11.Investigue: haga una reseña biográfica de Thomas Kuhn.

12.Estudie el siguiente pasaje.

"Así pues, los libros de texto comienzan truncando el sentido de los científicos sobre la historia de su propia disciplina y, a continuación, proporcionan un substituto para lo que han eliminado. Es característico que los libros de texto de ciencia contengan sólo un poco de historia, ya sea en un capítulo de introducción o, con mayor frecuencia, en dispersas referencias a los grandes héroes de una época anterior. Por medio de esas referencias, tanto los estudiantes como los profesionales llegan a sentirse participantes de una extensa tradición histórica. Sin embargo, la tradición derivada de los libros de texto, en la que los científicos llegan a sentirse participantes, nunca existió efectivamente. Por razones que son obvias y muy funcionales, los libros de texto científicos (y demasiadas historias antiguas de la ciencia) se refieren sólo a las partes del trabajo de científicos del pasado que pueden verse fácilmente como contribuciones al enunciado y a la solución de los problemas paradigmáticos de los libros de texto. En parte por selección y en parte por distorsión, los científicos de épocas anteriores son representados implícitamente como si hubieran trabajado sobre el mismo conjunto de problemas fijos y de acuerdo con el mismo conjunto de cánones fijos que la revolución más reciente en teoría y metodología científicos haya hecho presentar como científicos. No es extraño que tanto los libros de texto como la tradición histórica que implican, tengan que volver a escribirse inmediatamente después de cada revolución científica. Y no es extraño que, al volver a escribirse, la ciencia aparezca, una vez más, en gran parte como acumulativa. Por supuesto, los científicos no son el único grupo que tiende a ver el pasado de su disciplina como un desarrollo lineal hacia su situación actual. La tentación de escribir la historia hacia atrás es omnipresente y perenne. Pero los científicos se sienten más tentados a volver a escribir la historia, debido en parte a que los resultados de las investigaciones científicas no muestran una dependencia evidente sobre el contexto histórico de la investigación y, en parte, debido a que, excepto durante las crisis y las revoluciones, la posición contemporánea de los científicos parece ser muy segura. Un número mayor de detalles históricos, tanto sobre el presente de la ciencia como sobre su pasado o una mayor responsabilidad sobre los detalles históricos presentados, sólo podría dar un status artificial a la idiosincrasia, los errores y las confusiones humanas. ¿Por qué honrar lo que los mejores y más persistentes esfuerzos de la ciencia han hecho posible descartar? La depreciación de los hechos históricos se encuentra incluida, profunda y es probable que también funcionalmente, en la ideología de la profesión científica, la misma profesión que atribuye el más elevado de todos los valores a detalles fácticos de otros tipos. Whitehead captó el espíritu no histórico de la comunidad científica cuando escribió: 'Una ciencia que vacila en olvidar a sus fundadores está perdida'. Sin embargo, no estaba completamente en lo cierto, ya que las ciencias, como otras empresas profesionales, necesitan a sus héroes y preservan sus nombres. Afortunadamente, en lugar de olvidar a esos héroes, los científicos han estado en condiciones de olvidar o revisar sus trabajos. El resultado de ello es una tendencia persistente a hacer que la historia de la ciencia parezca lineal o acumulativa, tendencia que afecta incluso a los científicos que miran retrospectivamente a sus propias investigaciones." [Kuhn, Thomas S.: La Estructura de Las

Revoluciones Científicas, págs. 214-215-216]

¿Qué quiere decir que una ciencia progresa linealmente? ¿Cuál es el sentido de la historia de la ciencia en su desarrollo?

13. Lea con cuidado el siguiente texto de una gran matemático inglés del siglo XX.

"Decidirse a escribir sobre matemáticas es una experiencia realmente melancólica para todo matemático profesional. La función de un matemático es trabajar probando nuevos teoremas, acrecentar el campo de los conocimientos matemáticos, y en modo alguno hablar sobre lo que él u otros matemáticos han hecho. Los estadistas menosprecian a los agentes de publicidad, los pintores menosprecian a los críticos de arte, y Fisiólogos, físicos o matemáticos comparten muy a menudo tales sentimientos; no existe desdén más profundo, o en su conjunto más justificable, que el que sienten los hombres que crean hacia los hombres que explican. Exposición, crítica y apreciación es una labor reservada para inteligencias de segunda fila." [Hardy, G. H.: Autojustíficación de un matemático, pág. 65]

En esta cita se expresa una visión de lo que debe ser un intelectual en las matemáticas, un matemático, y de lo que no debe ser. También su juicio se puede aplicar a quien estudia las matemáticas desde la historia o la filosofía. Explique la posición de Hardy. Coméntela.

14. Este es un buen momento para retomar el concepto de paradigma. Kuhn en un libro posterior a la Estructura de las revoluciones científicas abandona este concepto, de cierta forma.

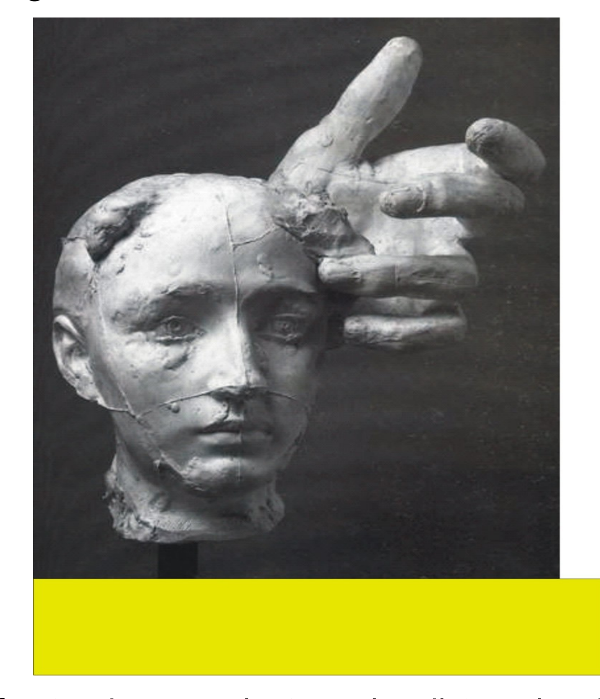
"Volvamos, finalmente, al término 'paradigma'. Fue introducido en La estructura de las revoluciones científicas porque yo, el autor historiador del libro, al investigar la población integrante de una comunidad científica, no logré detectar las suficientes reglas compartidas que explicasen la problemática conducta de investigación del grupo. Llegué a la conclusión de que los ejemplos compartidos en una práctica exitosa podían suplir la deficiencia en reglas del grupo. Estos ejemplos constituían sus paradigmas y, en cuanto tales eran esenciales para su continuada investigación. Por desgracia, después de alcanzar esta meta pensé en ampliar las aplicaciones del término hasta abarcar todos los compromisos compartidos del grupo, todos los componentes de lo que ahora prefiero llamar matriz disciplinar. Inevitablemente el resultado fue la confusión, y ello oscureció los motivos originales para la introducción de un término especial. Pero tales motivos todavía permanecen. Los ejemplos compartidos pueden desempeñar funciones cognoscitivas comúnmente atribuidas a reglas compartidas. Cuando las desempeñan, el conocimiento se desarrolla de forma diferente de como lo hace cuando está gobernado por reglas. Este escrito ha sido, ante todo, un esfuerzo por aislar, clarificar y hacer comprensibles estos puntos esenciales. Si se los entiende, será posible prescindir del término 'paradigma', aunque no del concepto que llevó a su introducción." [Kuhn, Thomas S.: Segundos pensamientos sobre paradigmas, pág. 40]

Explique por qué abandona el concepto de paradigma.

15. Con base en la información que se ofrece en este libro y una investigación adicional, explique qué es el internalismo y el externalismo en la metodología de la historia de la ciencia.

CAPITULO XXVIII

¿QUÉ SON LAS MATEMÁTICAS?



Las nuevas visiones frente al pensamiento racionalista sobre las matemáticas han ido abriéndose campo en la filosofía de las matemáticas y en la enseñanza de éstas con características diferentes en cada caso. No obstante, las nuevas tendencias en la educación matemática no son un reflejo mecánico de las que se han dado en la filosofía de las matemáticas; por eso deben analizarse de manera independiente. Pero, por otra parte, sí se han dado conexiones y relaciones que también deben ser examinadas.

Lo más importante es señalar que se trata de un proceso claramente inacabado. Por ejemplo, Barabashev, profesor de la Universidad Estatal de Moscú, afirmaba hace unos años que a partir de la mitad de este siglo se ha dado un giro que favorece un reemplazo de las visiones abstractas y axiomáticas de los objetos y métodos de las matemáticas, por aquellas más cercanas a una concepción de matemáticas que admite la aplicación y la utilidad práctica. Barabashev establece un paralelismo entre la sistematización euclidiana de la matemática previa y la sistematización que desde Klein hasta Bourbaki se realiza en la época moderna. ["Empiricism as a historical phenomenon of Philosophy of Mathematics", en Revue Int. de Philosophie, Vol. 42, No. 167, 4-1 988, pgs. 509-517]



Edad de Bronce, Rodin.

En este último capítulo, nos interesa sugerir algunas ideas sobre lo que son las matemáticas: su naturaleza última, su diversidad, su carácter socioempírico y sus determinantes epistemológicos; lo que hemos consignado como un constructivismo socioempírico.

Hacer esta descripción teórica nos va permitir comprender mejor lo que desarrollamos en el capítulo anterior: la relación entre el uso de la historia, la enseñanza y la filosofía de las matemáticas.

En primer lugar, para esclarecer nuestros puntos de partida y propiciar más la reflexión, vamos a resumir nuestra visión más general de los elementos que afectan en el devenir de las ciencias y en particular las matemáticas.

28.1 Las comunidades matemáticas

Una primera premisa: aceptamos a las comunidades científicas como los mecanismos sociales donde se construye el conocimiento científico por la acción de los individuos.

Objetividad y subjetividad

Distinguimos en la construcción científica dos dimensiones: una subjetiva y otra objetiva. Con la primera nos referimos a los procesos heurísticos, empíricos, psicológicos, intuitivos y particulares propios de la actividad de cada científico o grupo de científicos.

Con la segunda nos referimos a todos aquellos asuntos que dan validez dentro de las comunidades científicas a los resultados obtenidos por estas prácticas individuales: algo así como el terreno que permite la intersubjetividad (transmisión) y la objetividad a la práctica. Lo que da la objetividad a los resultados de la práctica del científico es un conjunto de premisas, creencias, valores y reglas aceptadas por la comunidad científica del caso y este conjunto constituye, en cada ocasión, la

manera como se interpreta y "operacionaliza" social e históricamente la correspondencia de los resultados teóricos con la realidad: por ejemplo, la capacidad de predicción de una teoría o la consistencia lógica y formal de éstas.

Ambas dimensiones están íntimamente ligadas y se condicionan de muchas maneras. Sobre-enfatizar una sola de estas dimensiones como regla general a priori constituye un error (por ejemplo, es el error que se comete cuando se piensa que la esencia de las matemáticas es el conjunto de formalismos, lenguaje, simbolismo y axiomática que está presente en éstas, o, simétrico error, cuando se sobrevalora los recursos individuales intuitivos y heurísticos).

Varios factores importantes intervienen en las dimensiones señaladas, influyéndolas de distinta manera: por un lado, un sustrato intelectual que, ampliando el que por ejemplo afirma Koyré, es el que hace referencia a la cultura, a la ideología, a la filosofía, a las creencias de una época presentes en la comunidad científica. Por otra parte: un sustrato de carácter técnico y económico. Existe un tercer sustrato, cuya importancia se ha acrecentado especialmente en este siglo: el político (me refiero a aquel territorio en que la toma de decisiones políticas empujan la evolución de la ciencia en un sentido o en otro dentro de límites específicos).

Lo anterior nos brinda una "dialéctica" entre comunidad científica y sociedad, y entre comunidad científica y la esfera de las ideas; pero existe una relación entre el científico individual y la comunidad científica que nos brinda otro sustrato: donde intervienen elementos de naturaleza personal, trayectoria individual, condiciones psicológicas, sociales, actitudes frente a la comunidad científica, etc. Es, entonces, la combinación del papel de varios estratos y el rol de muchos factores, integradamente, lo que explica en definitiva el hecho científico. En cada proceso el azar ocupa un espacio muy grande, lo que debe ser aprehendido en la explicación.

La contextualización y el influjo externo

A partir de los años setenta del siglo XX se volvió dominante como teoría metodológica una actitud externalista en los estudios sobre las ciencias. Ahora bien, la existencia de factores externos al desarrollo de la ciencia no basta para la mejor comprensión de ésta. La discusión de método no acaba allí. Una visión que excluye el rol de los factores externos en la evolución de la ciencia o una visión que reduce extraordinariamente el rol de las ideas y de la lógica interna de la ciencia en su decurso, constituyen ambas serios obstáculos metodológicos. Hoy en día, en general, es reconocido que ni una visión internalista extrema ni una visión externalista extrema son viables, posibles o adecuadas. La perspectiva más adecuada es la que acude a la presencia de la mayor cantidad de factores en la comprensión del hecho científico.

Ahora bien, insistimos, el estudio de las matemáticas debe contextualizarse socialmente y, entonces, abrir curso a la investigación de las diferentes dimensiones y factores que afectan este devenir: el carácter de las comunidades matemáticas, la institucionalización de la práctica matemática, la influencia de la economía, la ideología y la política, la enseñanza y demás factores deben tomarse en cuenta.

Esta visión favorece dos cosas: por un lado, que no se limite el estudio de las ciencias y las matemáticas a lo que es -digamos- ciencia de vanguardia (los últimos resultados presentes en el mundo) y, por otro lado, favorece que se estudie la historia de las ciencias y las matemáticas tomando en cuenta la diversidad cultural y regional. No sólo afirmamos la importancia de la

contextualización social sino que, además, afirmamos la trascendencia de reconocer la diversidad dentro de ésta.

Sociocultura y transdisciplina

Nos separamos, entonces, de las aproximaciones metodológicas que asumen a las ciencias como una sola realidad producto de una abstracta sociedad. De esta manera, el análisis de la práctica científica no se reduce a la producción de "punta" ni tampoco a la que se suele identificar como "ciencia occidental". Esto vuelve interesante estudios comparativos y transculturales, el escrutinio de los mecanismos y condiciones de la introducción de nuevos conceptos o teorías (recepción, utilización o desarrollo), y la valoración de la producción intelectual de culturas a la que muchas veces se le ha negado estatus científico.

El estudio de las ciencias se vuelve algo más dinámico y de mayor importancia social y exige, aparte de su profesionalización (métodos propios y dedicación académica exclusiva), el concurso multi, inter, transdisciplinario como un punto de partida.

Las matemáticas deben estudiarse por grupos integrados de especialistas en psicología, filosofía, filología, historia general, antropología, educación, matemáticas y otras disciplinas.

28.2 Diversidad matemática

Sigamos con nuestras premisas teóricas. Una de las primeras consecuencias de los resultados de Gödel, nos parece, establece claramente que la matemática no puede seguir considerándose como un cuerpo teórico sólido, seguro, único, absoluto y verdadero. Es conveniente pensar en la existencia de varias matemáticas. No como expresión de una visión historicista a lo Spengler, ni tampoco como producto de una actitud convencionalista.

En el mismo sentido, tampoco pensamos que los resultados que mencionamos antes deben interpretarse en el sentido de considerar a las matemáticas como varios sistemas axiomáticos; esta multiplicidad axiomática es resultado o expresión de la naturaleza misma de las matemáticas. La misma diversidad histórica que ha distinguido entre geometría, álgebra, análisis, y demás cuerpos matemáticos, también es señal de esa naturaleza.

Se puede usar el término "matemática" y contraponerlo con el de "matemáticas" sin que esto traicione la naturaleza de estas disciplinas. O bien puede verse la matemática como la participación simbiótica de diferentes disciplinas cuyas fronteras, objetos y métodos son cada vez más menos rígidos, y en la cual, más bien, intervienen unos en otros.

Esta discusión conduce directamente a consideraciones sobre la naturaleza de las matemáticas.

Diversidad y unidad

Queremos ser enfáticos en lo siguiente. Los métodos de las matemáticas en sus diferentes disciplinas se intercambian, se integran. Y conforme avanza la historia de las matemáticas y su cortejo de abstracción, es fácil encontrar más y más elementos en común, y, sin duda, se ha vuelto

esencial potenciar la unidad y la generalidad de los métodos y objetos matemáticos para su construcción teórica.

En la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas conviene tener las dos perspectivas. Por un lado, la afirmación de la diversidad matemática, que refiere a sustentos históricos y empíricos (ofreciendo amplios recursos didácticos) Y, a la vez, mostrar los rasgos de unificación, de convergencia de los diferentes métodos. En las matemáticas existe un especial sentido de transdisciplinariedad.

28.3 ¿Es la matemática a priori?

Esta ha sido una posición usualmente incuestionada que, por lo demás, en su medida, fue engendrada a partir de las divisiones clásicas de la epistemología moderna: a priori - a posteriori, sintético-analítico.

En realidad, a través de esa noción se busca dar cuenta de ciertas características particulares de las matemáticas, en particular: una intervención más "amplia" del sujeto epistémico en la construcción teórica. El sentido de lo a priori en matemáticas ha sido formulado de acuerdo con las filosofías asumidas. Para Leibniz, por ejemplo, las matemáticas eran "verdades de la razón" y, al igual que Frege, su verdad respondía a una evidencia lógica. Para Kant, sin embargo, el a priori involucra algo diferente: la intuición espacio-temporal. Incluso para pensadores modernos como Ladrière (que ha escrito una extraordinaria obra sobre los límites de los formalismos) la matemática sigue siendo simplemente a priori y se trata de un lenguaje a través del cual viajan significaciones producto de una experiencia sui generis.

No ha sido fácil plantear como Mill un carácter empírico de las matemáticas. La misma tradición empirista moderna alrededor del Círculo de Viena llegó a la conclusión de que era preferible considerar a las matemáticas como un lenguaje sin referencia alguna al mundo, su evidencia: sintáctica. Russell, por ejemplo, pasaría en su vida de un platonismo "moderado" a una posición radicalmente sintáctica sobre las matemáticas. Esta visión, influida mucho por la misma evolución del logicismo y el formalismo, contribuía a no enfrentar los paradigmas formalistas y racionalistas sobre las matemáticas.

De lo que se trata es de no sobreenfatizar el carácter a priori de las matemáticas, fuera de un contexto socioempírico y humano, histórico.



Balzac, de Rodin.

28.4 La naturaleza de las matemáticas

Vamos ahora a valernos de algunos párrafos de nuestro libro El desafío de las matemáticas, para resumir

algunas de nuestras opiniones sobre la naturaleza de las matemáticas. Para empezar:

"Las matemáticas son conocimiento de 'lo general' (una manera de hablar) en el mundo que, como todo conocimiento, surge en una relación entre el sujeto y el objeto (ella misma un factor real). Ahora bien, cuando introducimos el vocablo 'lo general' para las matemáticas no pensamos en "universales" (como Aristóteles) que existen en la realidad; para nosotros, se trata de percepciones humanas sobre el mundo: los conceptos de número 2, de 3 o de 526, nacen de condiciones de la realidad. Los substratos materiales para estos conceptos (abstracciones) son objetos empíricos de las matemáticas. Lo mismo sucede con las nociones de plano, recta, y punto. Evidentemente, no encontramos puntos, planos, rectas y números bailando en el mundo empírico (son conceptos), pero es fácil comprender que éstos poseen referentes en la realidad material. Podría sugerirse que propiedades generales del mundo como la diversidad o la extensión son fundamento de partes de las matemáticas; también podría sugerirse la continuidad física. En todo esto no se debe olvidar que la creación de conceptos e, incluso, la percepción de objetos empíricos que sustentan estos conceptos, depende mucho de nosotros: nuestro ojo, nuestra mente, condiciona lo que vemos. Es decir: vemos y conocemos lo que nuestra realidad nos permite. En esta condición, en lo que somos, participan factores biológicos y físicos pero también sociales (culturales e históricos). Esto es importante: lo que vemos es en buena parte nuestra realidad y sus fronteras. Vemos diversidad, pero se podría decir que todo lo que existe es una sola cosa (recuérdese aquella tensión en la Grecia Antigua entre unidad y diversidad: Parménides y Heráclito). Vemos continuidad en la materia, pero los espacios inter y subatómicos nos señalan lo contrario. Lo que vemos y los conceptos con los que comprendemos el mundo dependen de lo que somos y de los límites de nuestros sentidos en particular; por eso, con la creación de instrumentos técnicos superiores, varía nuestra percepción de lo que existe. El cielo estrellado de Aristóteles y Ptolomeo no podía ser el mismo que el de Galileo con su telescopio: el 'tamaño' y la cantidad sí importan." [Ruiz, A.: El desafío de las matemáticas, p. 54]

Sin embargo, es decisivo entender que las matemáticas son también producto de la acción del sujeto de una

manera relevante; más aun, las acciones del sujeto (físicas, abstraídas o mentalizadas) son objetos de esa

práctica. Por eso:

"En la comprensión de los objetos empíricos de las matemáticas debe pensarse también en el sujeto: por ejemplo, nuestra capacidad de repetir acciones (en el tiempo) refiere también a la diversidad y a la continuidad. El número, otro ejemplo, no debe verse solamente como algo que encontramos en el objeto físico al margen de nosotros; también lo encontramos al repetir y organizar nosotros acciones. El contar no refiere solo al mundo externo, también al interno: a nosotros. De igual manera, el medir no refiere solo a un mundo 'medible' sino, también, a nuestra acción. La conclusión: algunas de nuestras acciones son también substrato material de conceptos matemáticos. Acciones físicas humanas de repetir, agrupar, asociar, revertir, son objetos de las matemáticas, y con las mentales que las 'replican' en nuestros cerebros sucede lo mismo. (...) Ahora

bien, nos repetimos para que no haya duda alguna: estas acciones no son ajenas a la realidad física externa al sujeto; las cosas 'se agrupan', los procesos físicos se 'repiten' o se 'devuelven', ellos mismos, sin nosotros." [Ruiz, A.: El desafío de las matemáticas, p. 55]

Ahora podemos resumir nuestra respuesta a la pregunta: ¿qué son las matemáticas?

"Combinación de entes extraídos del mundo exterior al sujeto pero, también, de sus acciones y operaciones. Las matemáticas se construyen aquí: acciones sobre nociones extraídas de la realidad o acciones humanas, sobre ellas mismas o sobre otras acciones y operaciones. Acciones sobre acciones: un territorio fértil para la abstracción matemática. Con el correr de la historia humana, las matemáticas de las abstracciones, acciones y operaciones sobre ellas mismas, llegaron a ocupar su corazón: conjuntos de construcciones mentales cada vez más alejadas de lo intuitivo y empírico. Tanto que, hoy en día, a veces, nos da la impresión que nunca tuvieron contacto con ese mundo. En ese laberinto complejo de acciones y operaciones sobre acciones y operaciones u otros nuevos conceptos extraídos del mundo empírico, la lógica ocupa un lugar privilegiado". [Ruiz, A.: El desafío de las matemáticas, p. 56]

Poincaré se refiere un poco a esto, con vocación de profesor:

"Tomemos por ejemplo la idea de la función continua. Esto no es primero más que una imagen sensible, un rasgo trazado con tiza sobre la pizarra. Poco a poco se depura y sirve para construir un sistema complicado de desigualdades, que reproduce todas las líneas de la imagen primitiva; cuando ha sido terminada toda, se ha descimbrado como después de la construcción de una bóveda; dicha representación grosera, apoyo inútil desde ahora, ha desaparecido y no ha quedado más que el edificio mismo irreprochable a los ojos del lógico. Por lo tanto, si el profesor no recordara la imagen primitiva, si no restableciera momentáneamente la cimbra, ¿cómo adivinaría el alumno merced a qué capricho todas estas desigualdades han sido establecidas de esta manera las unas sobre las otras? La definición sería lógicamente correcta, pero no le enseñaría la verdadera realidad." [Poincaré, Henri: Filosofía de la ciencia, p. 220]

Seguimos. En todo esto usted podría preguntar: ¿y los métodos específicos de las matemáticas y su

validación? Sin duda, es un asunto capital.

Lo abordamos de la siguiente manera.

"Los métodos usados por los matemáticos para validar sus construcciones teóricas no son cualesquiera. Es decir, se trata de edificios conceptuales rigurosamente pegados, con colecciones de resultados integrados por principios de deducción aceptada. Estos métodos de organización de los entes y resultados matemáticos corresponden de manera abstracta al mundo. Son formas de organización de lo real no solo originadas en (puestas por) el sujeto (como Piaget) sino, también, en el objeto mismo: formas de organización de la naturaleza, que tomamos y comprendemos en esa relación compleja entre nosotros los humanos y nuestro entorno. Esto asociado a que las nociones básicas del edificio matemático son abstraídas del contacto con el mundo, constituye una base para valorar especialmente los mecanismos de validación establecidos colectiva e históricamente por los matemáticos. Los criterios de validación de las teorías matemáticas son construcciones históricas, por lo tanto variables en el tiempo, sujetos a cambios, errores y defectos. Su progreso, sin embargo, ha sido constatable, y hoy ofrece principios muy sólidos de rigor y pertinencia que permiten asegurar resultados teóricos 'confiables' aunque, evidentemente, dentro de las fronteras establecidas

por el estatus epistemológico de las matemáticas. Todo esto presupone que no cualquier cosa es matemática, que no toda abstracción o construcción mental hecha por los humanos es matemática y puede, en consecuencia, corresponder, de la manera que hemos sugerido aquí, a la realidad. Hagamos una acotación adicional en torno a este asunto: los criterios de validez lógica y coherencia deductiva en las matemáticas son extraordinariamente valiosos. Esto es un punto de partida. No obstante, como hemos visto aquí, se debe tener cuidado. Además, tampoco sugerimos que el quehacer abstracto de las matemáticas se reduce a la deducción lógica. Que se use la deducción lógica en la práctica matemática y, específicamente, que el rigor lógico sea un requisito en la comunicación de resultados entre los matemáticos, no quiere decir que las matemáticas sean reducibles a la deducción lógica. La larga experiencia del logicismo y los otros proyectos fundacionales nos confirman esta conclusión. Hemos insistido a lo largo de este trabajo en señalar como motor de las matemáticas una práctica de acciones y operaciones mentales sobre otros conjuntos de objetos, acciones y operaciones, en un doble influjo primigenio: epistemológicamente, el mundo empírico y el sujeto." [Ruiz, A.: El desafío de las matemáticas, pp. 57, 58]

28.5 Epistemología matemática

De manera precisa, las nociones básicas de las matemáticas se constituyen en realidad a partir de la relación sujeto-objeto, que posee una esencial dimensión material. Con esto no presento más que una incursión metodológica en la que apunto los componentes de la relación epistemológica.

El estrato de realidad al que me refiero como sujeto de las matemáticas no es tampoco homogéneo. Precisamente cuando hacía antes referencia a la diversidad de las matemáticas lo hacía como correlación a la diversidad de este estrato. Esta diversidad es producto tanto de la multiplicidad del objeto exterior como de la multiplicidad con la que el sujeto se relaciona con ese objeto.

En el conocimiento yo señalo tres factores claves: el sujeto, la sociedad o marco social, y el objeto material. El conocimiento es producto de una síntesis del concurso de estos tres elementos, eso sí, en una relación de influencias muy difícil de precisar cuantitativamente.

El sujeto, biológico y físico, es activo, pero en una relación con el objeto, material también, que actúa de manera dinámica. Los dos factores son activos, pero de maneras diferentes y condiciones, incluso temporales, distintos. Su concurso interviene en el otro. Y, por supuesto, el resultado solo se puede entender en la relación conjunta.

Esta relación epistemológica es en sí una realidad incluso material diferente a cada uno de los constituyentes.

Esta relación debe entenderse, además, en un contexto social, que influye en el movimiento del sujeto y, a veces, incluso modifica la realidad del objeto. Lo social como factor epistemológico implica la historia, y le da una dimensión histórica a la construcción cognoscitiva.

Esto que hemos reseñado se puede aplicar a todo el conocimiento, aunque de una manera diferente en cada caso. O lo que es igual: el peso de cada factor es diferente, en relación con cada sector del conocimiento considerado.

28.6 Posiciones falibilistas en la filosofía de las matemáticas

La noción de "constructivismo" en Educación Matemática cubre una panoplia de posiciones teóricas. Se trata de un término "paraguas". Y lo mismo sucede con términos como "Empirismo" o "falibilismo". Lákatos, con artículos publicados en la década de 1960, asumía un falibilismo que, de hecho, siguiendo el discurso teórico popperiano, permite la existencia de falsadores no empíricos de teorías matemáticas:

"Frente a lo que él llamó un modelo 'euclídeo' de entender las matemáticas, 'infalible', ofreció una visión crítica falibilista de éstas. Su visión se suele asociar con el vocablo cuasiempirismo. Para Lákatos las matemáticas son un resultado de una práctica social e histórica. Establece una distinción entre lo que es esa práctica individual y subjetiva (cómo construye matemáticas el matemático) y el cuerpo teórico (el resultado final producido, lo que se podría llamar objetivo) que se valida en una comunidad matemática. La exposición y comunicación de los resultados al gremio matemático y su validación dependen entonces de reglas aceptadas histórica y socialmente. Su preocupación central se separa de las de los intentos absolutistas, los asuntos son otros: ¿cómo se hace la práctica matemática: su dimensión subjetiva pero sobre todo la objetiva y la interrelación entre ellas?" [Ruiz, A.: El desafío de las matemáticas, p. 49]

Veamos esto con mayor detalle. Lákatos parte de la diferencia entre teorías euclídeas y aquellas que llama cuasiempíricas. Señala este autor, en primer lugar:

"La epistemología clásica ha modelado durante dos mil años su idea de teoría, científica o matemática, sobre la concepción de la geometría euclídea. La teoría ideal es un sistema deductivo con una inyección de verdad indudable en la cúspide (una conjunción finita de axiomas) -de modo que esa verdad, fluyendo hacia abajo desde la cúspide, a través de canales de inferencias válidas seguros y preservadores de la verdad inunde todo el sistema. [Lákatos, Imre: Matemáticas, ciencia y epistemología, p.47]

Vamos a la distinción:

"Tal vez la mejor manera de caracterizar las teorías cuasi-empíricas, como algo opuesto a las teorías euclídeas, sea como sigue. Denominamos 'enunciados básicos' a aquellas sentencias de un sistema deductivo en las que se inyecta inicialmente valores de verdad, y 'enunciados básicos verdaderos' al subconjunto de enunciados básicos que reciben el valor particular verdadero. Entonces, un sistema es euclídeo si la clausura [deductiva] de aquellos de sus enunciados básicos que se asumen como verdaderos. De otro modo, es un sistema cuasi-empírico. [Lakatos, Imre: Matemáticas, ciencia y epistemología, p. 48]

Y añade:

"El que un sistema deductivo sea euclídeo o cuasi-empírico viene determinado por el patrón del flujo o corriente del valor de verdad en el sistema. El sistema es euclídeo si el flujo característico es la transmisión de la verdad desde el conjunto de axiomas 'hacia abajo', al resto del sistema --aquí la lógica es un organon de prueba--; un sistema es cuasi empírico si el flujo característico es la retransmisión de la falsedad desde los enunciados básicos falsos 'hacia arriba', hasta 'las hipótesis' -la lógica es ahora un organon de crítica. Pero esta demarcación entre patrones del flujo de los valores de verdad es independiente de las convenciones particulares que regulan la inyección

original de valores de verdad en los enunciados básicos. Por ejemplo, una teoría que es cuasi-empírica según mi interpretación puede ser empírica o no-empírica en el sentido usual: es empírica sólo si sus teoremas básicos son enunciados básicos espacio-temporalmente singulares cuyos valores de verdad vienen determinados por el código vigente, aunque no escrito, del científico experimental. Podemos hablar, de modo aún más general, de teorías euclídeas versus, teorías cuasi-empíricas independientemente de lo que fluye por los canales lógicos: verdad cierta o falible y falsedad, probabilidad e improbabilidad, lo moralmente deseable o indeseable, etc. Lo decisivo es el cómo del flujo). (...).

El desarrollo de una teoría cuasi-empírica es muy diferente. Este desarrollo parte de problemas, seguidos de soluciones arriesgadas; luego vienen los tests severos, las refutaciones. El vehículo del progreso se encuentra en las especulaciones audaces, la crítica, la controversia entre teorías rivales, los cambios de problemas. La atención se centra siempre en los bordes oscuros. Los slogans son crecimiento y revolución permanente, no fundamentos y acumulación de verdades eternas. [Lakatos, Imre: Matemáticas, ciencia y epistemología, p. 48, 49, 50]

Y llega a la conclusión que señalamos en un capítulo anterior:

"A la vuelta del presente siglo, la matemática, 'el paradigma de certeza y verdad', parecía constituir el último refugio efectivo de la ortodoxia euclídea. Pero, en verdad, existían algunas grietas en la organización euclídea incluso en matemáticas, y esas grietas producían un desasosiego considerable. Hasta tal punto que el problema central de todas las escuelas fundacionales era: 'establecer de una vez por todas la certeza de los métodos matemáticos'. Sin embargo, los estudios fundacionales condujeron inesperadamente a la conclusión de que tal vez fuera imposible una reorganización euclídea de la matemática en su conjunto; que las teorías matemáticas, al menos las más ricas, eran cuasi-empíricas, al igual que las teorías científicas. El euclideanismo sufrió una derrota dentro de su propio refugio. [Lakatos, Imre: Matemáticas, ciencia y epistemología, p. 50]

Morris Kline, otro ejemplo, en su Mathematics. The loss of certainty, no asume tampoco la visión apriorista y se refiere a la matemática como una ciencia "cuasi-empírica" que no se diferencia mucho de la Mecánica u otras ciencias tradicionalmente consideradas empíricas; dice que la diferencia reside en la "longevidad" de los resultados matemáticos.

Kitcher

Una de las obras más densas y completas que asume una posición "empirista" en los nuevos tiempos es la de Philip Kitcher: The nature of Mathematical Knowledge de 1983.

Conviene, para completar este capítulo y ampliar nuestros pensamientos, mencionar un par de sus ideas y nuestra posición frente a ellas.

Kitcher establece que los orígenes de las matemáticas son empíricos y pragmáticos, y propone una posición constructivista que afirma que "... las matemáticas son una ciencia idealizada de operaciones que podemos realizar con relación a cualesquiera objetos." [Kitcher, P.: The nature of Mathematical Knowledge, p. 12] Algo así como que el input original es empírico y útil y, luego, la capacidad humana de realizar acciones operatorias hacen las matemáticas al margen de una influencia empírica o pragmática inmediata, cotidiana.



El poeta y su musa, Rodin.

Para Kitcher, los nuevos resultados matemáticos obedecen a la necesidad de resolver problemas que se plantea la comunidad matemática del caso, pero siempre en este contexto separado de nuevos influjos empíricos. En un artículo posterior "Mathematical Naturalism" del libro del que es coeditor: History and Philosophy of Modern Mathematics , Kitcher resume su posición de manera aún más clara:

"La materia última de las matemáticas es la forma en la cual los seres humanos estructuramos el mundo, realizando manipulaciones físicas crudas o a través las operaciones del pensamiento. (...) las matemáticas (son) como una colección de historias sobre las realizaciones de un sujeto ideal al cual le atribuimos poderes con la esperanza de iluminar las habilidades que tenemos para estructurar el ambiente que nos rodea". [Kitcher, P.: "Mathematical Naturalism" en el libro editado por William Aspray y Philip Kitcher: History and Philosophy of Modern Mathematics, pp. 313 y sgtes.]

La esencia de la posición de Kitcher es doble: la matemática es ciencia de las operaciones humanas, y su evolución y racionalidad solo se pueden establecer de manera histórica a través de la evolución misma de las comunidades matemáticas al igual que en las otras ciencias naturales.

En síntesis, en lo que se refiere a la naturaleza de las matemáticas asume la influencia de Piaget y en la evolución de éstas la de Kuhn y el externalismo moderno.

Esta visión filosófica no es aceptada por quienes consideran a las matemáticas como construcciones racionales libres siempre de la influencia empírica o práctica. El profesor Miró Quesada, por ejemplo, critica a Kitcher de manera muy tajante: "No cabe duda de que la exposición de Kitcher sobre el desarrollo del análisis es brillante y que constituye un aporte a la historia de la matemática. Sin embargo, no se encuentra en ella ninguna relación con su tesis fundamental de que toda la matemática se funda sobre bases empíricas". [Miró Quesada, F.: "La naturaleza del conocimiento matemático: Crítica a un libro de Philip Kitcher", en Crítica, Rev. Hispanoamericana de Filosofía, Vol XIX, No. 57 (diciembre de 1987), p. 131]

Miró juzga a Kitcher como un pragmatista y afirma: "... la racionalidad matemática no puede reducirse al éxito en la solución de problemas. Este éxito no es arbitrario sino que se comienza a utilizar porque permite comprender racionalmente lo que debe hacerse para resolver un problema que antes no se podía solucionar". [Miró Quesada, F.: "La naturaleza del conocimiento matemático:

Crítica a un libro de Philip Kitcher", en Crítica, Rev. Hispanoamericana de Filosofía, Vol XIX, No. 57 (diciembre de 1987), p. 132]

No estoy de acuerdo con el profesor Miró Quesada en el distanciamiento de las matemáticas que propone con relación al mundo empírico, pero su crítica no es incorrecta: no es sólo la solución de problemas planteados sociohistóricamente lo que da sostén o define el curso a las matemáticas, esto da pie a un relativismo histórico que puede negar la existencia de progreso científico (dentro de un marco teórico no apriorista ni absolutista ni lineal).

Nuestra posición se distancia de la de Kitcher de varias formas: Kitcher acepta un empirismo original y luego se libra de él cuando afirma que las matemáticas son simplemente una ciencia de operaciones en el vacío (a lo Piaget). En esta aproximación, las matemáticas son lo que son sin importar lo que los matemáticos hagan. Él trata de superar esto con la noción de "racionalidad"; lo que está bien es lo que brinda verdad y comprensión, entonces establece restricciones. Pero, de cualquier manera, el argumento está basado en la validación que establece un marco histórico: la verdad en matemáticas es lo que establece la evolución histórica, sea cual sea el curso seguido.

La evolución de las matemáticas históricamente brinda una verdad. No importa si Kitcher reconoce otros inputs empíricos, de alguna forma se sale de la consideración de verdad: su teoría de verdad en matemáticas no es logicista ni formalista ciertamente, es histórica, historicista (algo similar mutatis mutandis a la de Spengler). De alguna manera da la impresión de que él confunde el "uso" de operaciones humanas (que crea matemáticas) con las operaciones humanas. Las matemáticas no describen estas operaciones, las usan. Estas operaciones pueden ser abstraídas, iteradas, generalizadas, multiplicadas, transformadas en varias dimensiones, pero siempre la base es el uso de ellas en la construcción del conocimiento.

La racionalidad de las matemáticas no puede ser establecida sólo por un criterio histórico o si se hace el valor de este criterio se trivializa: si no creemos en absolutismos todo es evidentemente histórico, ¿y qué importancia tiene eso?

La posición de Kitcher es sólida frente al apriorismo, correcta en el llamado a la historia, en el establecimiento de la conexión con las ciencias naturales, en la vehiculización de la práctica por comunidades sociales y afirmando la conexión empírica; con esto se distancia claramente de la filosofía dominante sobre las matemáticas.

Nuestra opinión es un poco diferente: estamos de acuerdo en el input original de carácter empírico y pragmático (incluyendo la naturaleza de las operaciones humanas que intervienen en la práctica matemática); este input mantiene su papel a través de la creación de matemáticas porque las operaciones mentales que se usan en la creación matemática se encuentran en conexión con la realidad empírica. Y, también, porque la realidad empírica sigue proporcionando más inputs empíricos en todo momento.

Entonces, podemos hablar de tres inputs:

i- el empírico original al que también hace referencia Kitcher y cuya presencia está siempre presente,

ii- la práctica matemática con su conjunto de acciones y operaciones mentales (que incluye la lógica, derivada de la experiencia), y

iii- los elementos proporcionados por las otras ciencias, las técnicas y las demás dimensiones sociales.

En términos históricos, las otras ciencias y las matemáticas en efecto están bajo el mismo marco, pero, epistemológicamente, él establece una diferencia: los objetos de las ciencias naturales y los de las matemáticas son de diferente tipo, cualitativamente distintos.

Ernest y el constructivismo social

En el mismo terreno, debemos hablar de las posiciones de Paul Ernest, quien afirma un "constructivismo social" en la filosofía de las matemáticas que, en especial, fundamenta su visión de la educación matemática.

Para Ernest las matemáticas son una construcción social, un producto cultural, igual de falible que otras partes del conocimiento. El origen de las matemáticas es social y cultural, y la justificación del conocimiento matemático descansa en su base cuasiempírica. Esto último en la onda de autores como Lakatos (1976, 1978), Davis y Hersh (1980), Kitcher (1983), Tymoczko (1986) y Wittgenstein (1956).

Su visión asume cosas que son bastante obvias para nosotros: la existencia de un mundo físico (realismo) y la existencia de la especie humana y el lenguaje. ¿Cuáles son los principios del constructivismo social que propone Ernest? El conocimiento no se recibe pasivamente sino activamente por el sujeto, y la función de la cognición se adapta y sirve a la organización del mundo de la experiencia. Ahora bien estas teorías personales, producto de la organización del mundo, se acomodan a restricciones impuestas por la realidad física y social. ¿Cómo? A través de ciclos de teoría-predicción-prueba-fracaso-acomodación y nueva teoría. Esto da origen a teorías del mundo aceptadas socialmente y a patrones sociales y a reglas del uso del lenguaje. Las matemáticas son la teoría de la forma y la estructura que surge con el lenguaje.



El beso, Rodin.

Ernest acepta las dos ideas centrales de Kitcher (origen empírico y evolución social del conocimiento matemático, de generación en generación), pero se separa un poco de Kitcher -según él mismo lo señala- en la medida que no subraya las conexiones históricas entre las comunidades

matemáticas como criterio importante para la aceptación o justificación de los resultados matemáticos. [Ernest, Paul: The Philosophy of Mathematics Education , p. 82]

Desde el punto de vista del gran filósofo del siglo XX Karl Popper, existen 3 mundos: el mundo 1 es el de los objetos físicos de la ciencia, los objetos matemáticos estarían subjetivamente en el mundo 2 y objetivamente en el mundo 3.

Según Ernest la posición constructivista social afirma que no tenemos acceso directo al mundo 1 y que éstos son accesibles solo a través de los mundos 1 y 2; el conocimiento de los objetos matemáticos y físicos estarían en el mismo plano según esta posición. [Ernest, P.: The Philosophy of Mathematics Education ... p. 81]

Para Ernest, al igual que para todos los constructivistas, el sujeto edifica sus teorías con base en su experiencia y luego éstas se ajustan al ser sometidas a nuevas experiencias con el mundo y la sociedad. El conocimiento subjetivo es entonces objetivizado cuando es sometido a las reglas y condiciones que establece la comunidad matemática: lo que da objetividad a los conceptos de las matemáticas es el acuerdo con estas reglas; la sociedad da la objetividad. La práctica matemática descansa en ese ir y venir entre el conocimiento subjetivo y el objetivo, definido por ese sostén sociogremial; no obstante, en las matemáticas, el otro criterio adicional -por su naturaleza, inteligimos nosotros- es la consistencia lógica de los resultados.

Si bien esta posición define restricciones empíricas y sociales (incluyendo las lógicas) a los resultados teóricos matemáticos (de la misma forma que a las otras ciencias), el énfasis lo pone en la parte social. Los objetos de las matemáticas son, entonces, los que la comunidad acepte y legitime como tales, y no lo que la contrastación con la experiencia empírica demande.

A pesar de que lo niegan, tanto esta posición como la de Kitcher caen en cierto relativismo ya sea éste social o histórico.



Eterno ídolo, Rodin.

Con estas visiones estamos de acuerdo en muchas cosas. ¿Hay alguna diferencia con nuestro enfoque? La principal diferencia frente a nuestro construccionismo socioempírico estriba en que estas visiones no asumen consideraciones ontológicas de fondo y exhiben una fuerte tendencia a una forma de subjetivismo que podríamos llamarlo, aunque con poca precisión, social. Este tipo de posiciones tiene repercusiones obvias sobre las acciones educativas que fundamenten.

Ahora bien, este énfasis en lo social hace que propongan una aproximación que escapa plenamente de los términos del paradigma racionalista de las matemáticas, y abre el curso a investigaciones multidisciplinarias: historia, sociología, psicología y filosofía de las matemáticas. En este cuadro teórico, sin duda, la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas encuentra un sentido mucho más dinámico y completo.

28.7 Un balance final

En este trabajo hemos hecho una incursión en consideraciones filosóficas. Al asumir un carácter socioempírico de las matemáticas se apuntala la necesidad de introducir la historia de manera "completa" para su enseñanza. La opinión que afirma la diversidad de las matemáticas empuja, también, hacia una aproximación más concreta sobre estos cuerpos teóricos. Al mismo tiempo, al señalar un papel activo del sujeto en una relación dialéctica que no elimina ni al objeto ni a lo social, se vuelve más importante recurrir a los momentos históricos de construcción individuales para desarrollar adecuadamente la enseñanza-aprendizaje.

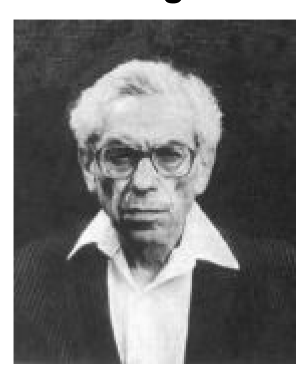
Con las consideraciones metodológico-filosóficas que hicimos, hemos planteado una pintura que hace del uso de la historia en la enseñanza de las matemáticas un importante fundamento, y nos hemos introducido, también, en el debate actual acerca de la naturaleza más profunda de las matemáticas.

En este último, por lo menos desde los años treinta, se ha manifestado la necesidad de una auténtica transformación conceptual. Repetimos: las viejas categorías de lo a priori, a posteriori, analítico-sintético,... o las que dominaron la época de "los fundamentos" deben abrir paso a nuevas ideas y métodos, y a nuevas actitudes filosóficas. Se trata del reclamo de una revolución teórica.

Muchas posiciones se han exteriorizado hasta ahora pero, como siempre sucede cuando un nuevo paradigma está naciendo, un debate intenso tiene que plantear todas las esquinas y todos los sentidos intelectuales. Si se acepta algunas de las premisas del marco teórico que hemos planteado, en la configuración de ese paradigma será necesario un amplio concurso multidisciplinario, pero está claro que se trata de una tarea en la que tanto los matemáticos como especialmente los que enseñamos matemáticas tenemos una importancia primordial.

Finalmente, en torno a este tipo de consideraciones filosóficas y metodológicas como las que hemos abordado en nuestro libro, debemos ser enfáticos: en los países del Tercer Mundo no poseen una naturaleza especulativa sino, por el contrario, revisten una importancia vital y práctica, esencial en nuestros destinos. Esto es así porque la mejor comprensión de las ciencias, las matemáticas, la tecnología y la educación constituye un axioma para su desarrollo y sus posibilidades de fecundar el progreso nacional.

28.8 Biografías



Paul Erdös

Paul Erdös nació el 26 de marzo de 1 913 en Budapest, Hungría. Procedía de una familia judía. Su padre Lajos y su madre Anna tuvieron dos hijas más que murieron de fiebre escarlata días antes de que él naciera.

Sus padres lo introdujeron a las matemáticas, por ser ellos maestros de esta especialización. Su padre fue capturado por el ejército ruso durante la Primera Guerra Mundial y llevado en cautiverio a Siberia por seis años; durante este tiempo su madre lo instruyó en casa con la ayuda de un tutor alemán.

En 1 920 su padre regresó y le enseñó inglés con una mala pronunciación; el acento extraño que adquirió Paul es uno de los aspectos más curiosos que lo caracterizó durante su vida.

Después de ganar un examen nacional, a pesar de las leyes antisemitas en Hungría, inició sus estudios en la universidad en 1 930. Estudió por su doctorado en la Universidad Pázmány Péter en Budapest, el cual lo obtuvo en 1 934. Con eso consiguió un importante puesto en Manchester, Inglaterra y a causa de las represiones en Hungría decidió emigrar a ese país.

En 1 938 se mudó a Princeton, en los Estados Unidos y cuatro años más tarde su padre muere de un ataque cardíaco mientras su madre había sobrevivido de la campaña de muerte de los Nazis contra los judíos.

En 1 951 recibió un importante premio de la Sociedad Matemática de Estados Unidos.

Murió el 20 de septiembre de 1 996 en Varsovia, Polonia.

28.9 Síntesis, análisis, investigación

1. Describa las dimensiones subjetiva y objetiva en la construcción científica que se consignan en este capítulo.
2. ¿Cuál piensa usted que sería el papel de la trans e interdisciplina en el estudio de las matemáticas?
3. Comente la dicotomía diversidad y unidad de las matemáticas y sus implicaciones en la educación matemática.
4. ¿Son las matemáticas conocimiento a priori? Comente.
5. ¿Qué quiere decir que las propiedades generales del mundo como la diversidad o la extensión son fundamento de partes de las matemáticas?
6. ¿Cuál es el papel de las acciones del sujeto en la construcción epistemológica de las matemáticas?
7. Explique la naturaleza de los métodos de validación de los resultados de las matemáticas.
8. Explique los actores epistemológicos que propone el autor de este libro. Explique.
9. Explique qué son las matemáticas para Philip Kitcher.
10. Describa la posición de Paul Ernest sobre la naturaleza de las matemáticas.
11. En el siguiente texto un asunto central es la correspondencia de las matemáticas con la realidad. ¿Analice las diferencias entre las ciencias físicas y las matemáticas en torno a esta correspondencia? ¿Cómo es que las matemáticas podrían corresponder con la realidad?

    "En otro orden de cosas: en la práctica matemática sólo podemos aspirar a evidenciar una "correspondencia" de sus teorías con el mundo, pero no demostrar su 'no correspondencia'. Esto es otra característica específica. Al igual que no se podían rechazar, en un primer momento, las geometrías no euclidianas por no obedecer a una 'intuición' tradicional del espacio, todas las estructuras y teorías matemáticas pueden eventualmente `corresponder' al devenir real. Esta situación subraya el sentido de los factores históricos y sociales. El criterio de la "correspondencia" de las teorías matemáticas con la realidad es lo que hemos estudiado en las páginas anteriores. Hemos obtenido algunas conclusiones de partida que, globalmente, apuntan a pedir la sanción empírica para las matemáticas. También hemos señalado la existencia de una diferencia cualitativa en cuanto al objeto de estudio, y a sus métodos. Ahora bien, nadie desconoce que el criterio de la correspondencia de una teoría científica con la realidad empírica si bien apropiado es extraordinariamente general; y en lo que se refiere a las matemáticas más bien resulta difícil de aplicar o, lo que es simétrico y complementario, su aplicación no revela mucho de la riqueza de sus teorías ni tampoco de la pertinencia de sus métodos de validación (por ejemplo, el peso de la validez lógica). El asunto de encontrar criterios de demarcación de lo que es o no ciencia debería resolverse de una forma que permita incluir a las matemáticas; es decir, afirmar su estatus de ciencia. No se trata, sin embargo, de una discusión sancionada definitivamente en la comunidad intelectual." [Ruiz, A.: El desafío de las matemáticas, p. 59]

12.Estudie el siguiente texto.

"Resumiendo, hasta momentos bastante tardíos se observa el hecho de que el sujeto, antes de poder deducir un resultado, se ve obligado a comprobarlo empíricamente para admitir su verdad. En los niveles preoperatorios ocurre así con todas las verdades lógico-matemáticas descubiertas por el sujeto, comprendidas incluso las más evidentes, como la transitividad de la igualdad; al nivel de las operaciones concretas (de los siete a los doce años), se reconoce por deducción inmediata que cierto número de aserciones son verdaderas, e incluso necesarias, pero por poco que la cuestión planteada exceda el poder de este tipo de deducción, el sujeto empieza asimismo por comprobar empíricamente antes de deducir, incluso cuando trata en seguida de deducir para comprender. Por lo demás, es bien sabido que tal conducta se vuelve a encontrar a niveles muy superiores, por lo menos en el caso del 'experimento mental".

Pero si bien no hay razón alguna para poner en tela de juicio la existencia de un nivel inicial de matemática empírica, es menester, por el contrario, insistir vigorosamente en el hecho de que esta experiencia lógico-matemática difiere desde el comienzo de la experiencia física. Pues cuando se analiza la naturaleza de aquella experiencia no sólo se comprende por qué deja paso tan rápidamente a la deducción propiamente dicha (lo cual es mucho más tardío en el campo de la experiencia física), sino también cómo garantiza desde sus estadios iniciales la posibilidad de una matemática pura; y vamos a tratar de mostrar ahora mismo que así sucede.

1) El hecho esencial es que si la experiencia física se refiere a objetos, y en ella se adquieren conocimientos por abstracción a partir de éstos, la experiencia lógico-matemática se refiere a las acciones que el sujeto ejerce sobre los objetos, de suerte que la adquisición de conocimientos proviene en este caso de una abstracción a la que se debe considerar procedente de tales acciones, ya que las propiedades descubiertas en los objetos son precisamente las mismas introducidas previamente por las acciones." [Piaget, J. en Piaget, Jean y Beth, E. W.: Epistemología matemática y psicología, pp. 256-257]

¿Qué son las matemáticas según Piaget? Explique las diferencias entre ciencias físicas y matemáticas según este autor.

13.Considere el siguiente texto.

"... la existencia de una experiencia lógico-matemática inicial no justifica, en absoluto, una interpretación empirista de las matemáticas, y, por el contrario, contribuye a explicar desde el comienzo la posibilidad de la matemática pura. Esto es así porque, como tal experiencia no versa sobre los objetos físicos, sino sobre las acciones ejercidas sobre ellos, es comprensible inmediatamente que en los niveles posteriores la actividad matematizante pueda prescindir de tales objetos, dado que la abstracción reflectora que saca las primeras nociones del sujeto tiene por resultado el de transformar estas últimas en operaciones, y que éstas, a su vez, podrán ejecutarse más tarde o más temprano simbólicamente, sin preocuparse ya de los objetos (que, por lo demás, eran `cualesquiera' desde el comienzo). Gonseth ha dicho que la lógica es (entre otras cosas) la física de los objetos cualesquiera; y nosotros aceptamos la fórmula si se la traspone en `coordinación de las acciones ejercidas sobre objetos cualesquiera'. Mas la abstracción reflectora a partir de las acciones tampoco

entraña una interpretación empirista (en el sentido de psicologista), ya que las acciones en cuestión no son acciones particulares de sujetos individuales (o psicológicos), sino que son las coordinaciones más generales de todo sistema de acciones; coordinaciones que traducen, por ello, lo que hay de común en todos los sujetos y se refieren, por consiguiente, al sujeto universal o epistémico, y no al individual; de este modo, la actividad matematizante aparece como algo regulado desde el comienzo por leyes internas y que escapa a la arbitrariedad de las voluntades individuales. Y puesto que no todo está preformado desde el origen y sigue siendo necesaria una larga construcción para llegar hasta la matemática pura, el constructivismo no consiste en una serie de creaciones libres o de convenciones caprichosas: la construcción, que no empieza ex nihilo, sino a partir de un sistema de esquemas de acción cuyas raíces han de buscarse, sin duda alguna, en la organización nerviosa y biológica del sujeto, solamente llega a pasar al campo del pensamiento consciente al verse obligada a integrar los enlaces previos comprendidos en los esquemas; y en cada nuevo peldaño, la necesidad de integrar, superándolos, los resultados de las construcciones anteriores explica que las construcciones sucesivas obedezcan a unas leyes de dirección: no -repitámoslo una vez más- porque estuviese todo dado de antemano, sino porque esta necesidad de integrar lleva en sí misma una continuidad de la cual no se da uno cuenta más que retrospectivamente, pero que no por ello deja de imponerse. Así pues, la experiencia lógico-matemática no tiene nada de comienzo absoluto: es una etapa de transición entre la organización interna de las acciones y los comienzos de la construcción operatoria, etapa que está ya llena de enseñanzas; pero éstas no habrán de adquirir toda su significación más que cuando se sigan paso a paso las etapas siguientes, que se escalonan entre este aparente empirismo y la matemática pura" [Piaget J. en Piaget, Jean y Beth, E. W.: Epistemología matemática y psicología, pp. 261-263]

Explique qué es la abstracción reflectora. ¿Qué son las operaciones de las matemáticas según Piaget? Utilice bibliografía adicional si lo requiere.

14. Estudie los siguientes dos textos.

"1. Primero somos inducidos a distinguir dos categorías de fenómenos:

Los unos, involuntarios, no acompañados de sensaciones, los atribuimos a los objetos exteriores; son los cambios externos.

Los otros, cuyos caracteres son opuestos, y que atribuimos a los movimientos de nuestro propio cuerpo, son los cambios internos.

2. Observamos que ciertos cambios de cada una de estas categorías pueden ser corregidos por un cambio correlativo de la otra categoría.

3. Distinguimos entre los cambios externos aquellos que tienen de este modo un cambio correlativo en la otra categoría: es lo que llamamos desplazamientos; y también distinguimos, entre los cambios internos, aquellos que tienen un correlativo en la primera categoría.

Gracias a esta reciprocidad se halla definida una clase particular de fenómenos que llamamos desplazamientos. Las leyes de estos fenómenos constituyen el objeto de la geometría." [Poincaré, Henri: Filosofía de la ciencia, p. 163]

"Se ve que la experiencia desempeña una función indispensable en la génesis de la geometría, pero sería un error concluir de ello que la geometría es una ciencia experimental, ni siquiera en parte.

Si fuera experimental, sólo sería aproximada y provisoria. ¡Y qué grosera aproximación!

La geometría es el estudio del movimiento de los sólidos; pero no se ocupa en realidad de los sólidos naturales, sino que tiene por objeto ciertos sólidos ideales, absolutamente invariables, que no son más que una imagen simplificada y bastante lejana de aquellos.

La noción de esos cuerpos ideales está formada totalmente por nuestro espíritu, y la experiencia sólo es una ocasión que nos ayuda a hacerla surgir.

El objeto de la geometría es el estudio de un grupo particular; pero el concepto general de grupo preexiste en nuestra mente, al menos en potencia. Se nos impone, no como forma de nuestra sensibilidad, sino como forma de nuestro entendimiento.

Solamente es preciso elegir, entre todos los grupos posibles, aquel que sea, por decirlo así, el patrón con el cual relacionaremos los fenómenos naturales.

La experiencia nos guía en esta elección que no nos impone y tampoco nos permite reconocer cuál es la geometría más verdadera, sino cuál es la más cómoda.

Se observará que he podido describir los universos más fantásticos, como los imaginados antes, sin dejar de emplear el lenguaje de la geometría ordinaria." [Poincaré, Henri: Filosofía de la ciencia, p. 169]

¿Qué es la geometría según Poincaré? Explique y argumente su posición personal con relación a estas opiniones.

15. Estudie el siguiente texto.

"La conclusión general que puede extraerse de este análisis aparece ante nuestros ojos con bastante claridad. Si conocimiento útil es, de acuerdo con la definición provisional expuesta anteriormente, aquel que ahora o en un futuro relativamente próximo contribuye al bienestar material del género humano, de modo que la mera satisfacción intelectual sea irrelevante al respecto, la mayor parte de las matemáticas superiores son inútiles. El álgebra y la geometría modernas, la teoría de números, la teoría de conjuntos, la teoría de funciones, la relatividad y la mecánica cuántica no pasarían con éxito la prueba de la utilidad -con un resultado negativo muy similar para todas ellas- y no hay ningún auténtico matemático cuya vida pueda ser justificada sobre tal base. En el caso de que el patrón de medida escogido sea la definición previamente aceptada de utilidad, Abel, Riemann y Poincaré arruinaron sus vidas; su contribución al bienestar humano ha sido absolutamente despreciable y el mundo sería tan feliz como lo es en la actualidad aunque nunca hubieran existido." [Hardy, G. H.: Autojustificación de un matemático, pág. 131]

Explique las nociones de utilidad de las matemáticas de acuerdo con esta cita. Comente la opinión del autor.

16.Estudie esta otra cita de Hardy.

"Existe una conclusión tranquilizadora a la que fácilmente llega todo auténtico matemático. Las auténticas matemáticas no repercuten de ningún modo sobre la guerra. Nadie ha podido descubrir ninguna finalidad bélica ni ninguna aplicación a la guerra que pueda derivarse de temas tales como la teoría de números o la relatividad y parece bastante improbable que nadie pueda hacerlo en un futuro próximo. Ciertamente hay ramas de la matemática aplicada, como la balística y la aerodinámica, que han sido específicamente desarrolladas por su interés bélico y que requieren una técnica sumamente elaborada. En tales casos se hace difícil hablar de matemáticas 'triviales', pero nadie ha reclamado para ellas el rango de 'auténticas'. De hecho son partes de la matemática francamente repulsivas e intolerablemente aburridas. Ni siquiera Littlewood ha conseguido convenir la balística en una rama respetable de las matemáticas, y si él no ha podido, ¿quién entonces? Así pues, un autentico matemático tiene la conciencia limpia; nada hay que objetar al valor, sea cual fuere del trabajo que ha llevado a cabo; las matemáticas son, tal como dije en Oxford, una ocupación 'inocua e inocente'." [Hardy, G. H.: Autojustificación de un matemático, págs. 135-136]

Comente las ideas que vierte el autor. Dé su propia opinión sobre el tema que trata.

17.Lea este otro texto.

" ¿Qué partes de las matemáticas son útiles?

Ante todo, el grueso de las matemáticas que se estudian en la escuela secundaria: aritmética, álgebra elemental, geometría euclídea elemental y las nociones básicas de cálculo integral y diferencial. Podemos exceptuar ciertas partes que se incluyen en los programas secundarios pero que parecen ir dirigidas a "especialistas", por ejemplo, la geometría proyectiva. En matemáticas aplicadas, los fundamentos de mecánica (la electricidad, tal como se enseña a nivel secundario, debe clasificarse como parte de la física). Una buena parte de las matemáticas a nivel universitario también tiene su utilidad. De un lado encontramos las asignaturas en las que se desarrollan las matemáticas de la escuela secundaria con una técnica más perfeccionada y por otro una cierta porción del instrumental matemático empleado en temas eminentemente físicos, tales como la electricidad y la hidrodinámica. No deja de ser interesante recordar que una provisión suplementaria de conocimientos siempre es una ventaja y que el más práctico de los matemáticos se enfrentará con serias desventajas si su bagaje de conocimientos es el mínimo estricto que precisa para desempeñar su trabajo. Creo acertado concluir que tales ramas de la matemática son útiles desde el punto de vista de un ingeniero superior o de un físico de mediana categoría, lo que equivale a decir que no poseen ningún mérito estético especial Por ejemplo, las partes más útiles de la geometría euclídea son las más escasamente brillantes. La axiomática de las paralelas, la teoría de las proporciones o la construcción de un pentágono regular no tienen utilidad práctica inmediata. Llegamos, pues, a una conclusión bastante curiosa: la matemática pura es, tomada en conjunto bastante más útil que la aplicada. El matemático puro parece gozar de una posición ventajosa tanto en el aspecto practico como en el estético. Lo primordialmente útil es la técnica y la mayor parte de la técnica matemática se aprende a través de la matemática." [Hardy, G. H.: Autojustíficación de un matemático, págs. 129-130]

Comente. Argumente sus opiniones.

18. Lea con cuidado la siguiente cita de Henri Poincaré:

"Desde hacía quince días me esforzaba en demostrar que no podía existir ninguna función análoga a lo que más tarde llamé funciones fuchsianas; en aquella época era muy ignorante; todos los días me sentaba en mi mesa de trabajo, pasaba una hora o dos, ensayando un gran número de combinaciones y no llegaba a ningún resultado. Una noche tomé café, contrariando mis costumbres, y no me pude dormir; las ideas surgían en tropel, las sentía cómo chocaban, hasta que dos de ellas se engarzaron, por así decir, por formar una combinación estable. A la mañana siguiente ya había establecido la existencia de una clase de funciones fuchsianas, las que se derivan de la serie hipergeométrica; no tuve ya que hacer sino redactar los resultados, en lo cual no tardé más que algunas horas.

Quise a continuación representar estas funciones por el cociente de dos series; esta idea fue perfectamente consciente y reflexionada: me guiaba la analogía con las funciones elípticas. Me pregunté cuáles deberían ser las propiedades de estas series, si ellas existiesen, y llegué sin dificultad a formar las series que he llamado thetafuchsianas.

En ese entonces me fui de Caen, donde vivía, para tomar parte en un concurso geológico convocado por la Escuela de Minas. Las peripecias del viaje me hicieron olvidar mis trabajos matemáticos; al llegar a Coutances, subimos en un ómnibus para no sé qué paseo. En el momento en que ponía el pie en el estribo me vino la idea, sin que nada en mis pensamientos anteriores me hubiera podido preparar para ella, de que las transformaciones que había utilizado para definir las funciones fuchsianas eran idénticas a las de la geometría no-euclídiana. No hice la verificación; no hubiera tenido tiempo, puesto que apenas sentado en el ómnibus proseguí la conversación comenzada, pero tuve en seguida la absoluta certidumbre. De regreso a Caen, verifiqué el resultado más reposadamente, para tranquilidad de mi espíritu.

Me puse entonces a estudiar los problemas aritméticos, sin gran resultado aparente y sin sospechar que ello pudiera tener la más mínima relación con mis anteriores descubrimientos. Disgustado por mi fracaso me fui a pasar algunos días al borde del mar y pensé en cualquier otra cosa. Un día, paseándome sobre el tajamar, me asaltó la idea, siempre con los mismos caracteres de brevedad, instantaneidad y certeza inmediata, de que las transformaciones aritméticas de formas cuadráticas ternarias indefinidas, eran idénticas a las de la geometría no-euclidiana.

Ya de vuelta, en Caen, reflexioné sobre este resultado y saqué las consecuencias; el ejemplo de las formas cuadráticas me enseñaba que existían más grupos fuchsianos de los que correspondían a la serie hipergeométrica, vi que podía aplicarlos a la teoría de la serie thetafuchsiana y que, por consiguiente, existían otras funciones fuchsianas además de las derivadas de la serie hipergeométrica, que eran las únicas que conocía hasta entonces. Me propuse, naturalmente, formar todas estas funciones; hice un asedio sistemático y fui sacando una tras otra todas las obras avanzadas; sin embargo, había entre ellas algunas que se me resistían y cuya caída debía acarrear la de la plaza entera. Pero todos mis esfuerzos sólo sirvieron primero para hacertne conocer mejor la dificultad, lo cual ya era algo. Todo este trabajo fue perfectamente consciente.

Después de eso partí para Mont-Valerien, en donde tenía que hacer mi servicio militar; tuve por lo tanto preocupaciones muy diferentes. Un día, atravesando el bulevar, la solución de la dificultad que me había tenido se me presentó de repente. No traté de profundizarla inmediatamente y fue solamente después de mi servicio que proseguí la cuestión. Tenía todos los elementos, únicamente tenía que reunirlos y ordenarlos. Redacté entonces mi memoria definitiva de una sola vez y sin ninguna dificultad." [Poincaré, Henri: Filosofía de la ciencia, p. 258 y 259]

¿De qué trata este texto? ¿Cómo expresa el autor el proceso de creación matemática? Comente con base en sus opiniones.

19. Estudie la siguiente cita de un gran intelectual del siglo XX, que según la revista Time es "Una de las 25 personalidades más influyentes de Estados Unidos y uno de los mejores cerebros del mundo".

    "Las matemáticas puras son la ciencia de todos los mundos concebibles, un sistema lógicamente cerrado pero infinito en todas las direcciones que permiten las premisas de partida. Con él podríamos, si se nos diera un tiempo y una capacidad de computación ilimitados, describir cualquier universo imaginable. Pero las matemáticas por sí solas no pueden informarnos del mundo tan especial en el que vivimos. Sólo la observación puede revelar la tabla periódica, la constante de Hubble y todas las demás certidumbres de nuestra existencia, que pueden ser distintas o inexistentes en otros universos. Puesto que la física, la química y la biología están limitadas por los parámetros de este universo, el que vemos desde el interior de la Vía Láctea, ellas componen la ciencia de todos los fenómenos posibles que nos son tangibles.

    Aún así, debido a su efectividad en las ciencias naturales, las matemáticas parecen señalar como una flecha hacia el fin último de la verdad objetiva. Los positivistas lógicos estaban especialmente impresionados por el encaje estrecho de la observación con la teoría matemática abstracta en física cuántica y relativista. Este triunfo, el mayor de entre los del siglo xx, inspiró nueva confianza en el poder innato de la mente humana. Piénsese en ello. Aquí está el Homo sapiens, una especie de primate apenas salida de sus aldeas de la Edad de Piedra, que adivina correctamente fenómenos que se encuentran, de forma casi inimaginable, más allá de la experiencia ordinaria. A buen seguro, razonaban los teóricos, nos hallamos cerca de una fórmula general para la verdad objetiva. [Wilson, Edward O.: Consilience. La unidad del conocimiento, pgs. 94-95]

    Describa con sus propias palabras las ideas que expresa el autor en este texto. Compárelas con las ideas vertidas en el último capítulo de este libro.

20. Retome el ensayo que usted escribió con base en el primer capítulo de este libro sobre lo que son las matemáticas. Escriba un nuevo ensayo sobre este tema. Establezca una comparación entre lo que usted escribió al principio y lo que escribe ahora al final de este libro: convergencias y diferencias. Comente el asunto con algunos de sus colegas o compañeros.

SOBRE EL AUTOR

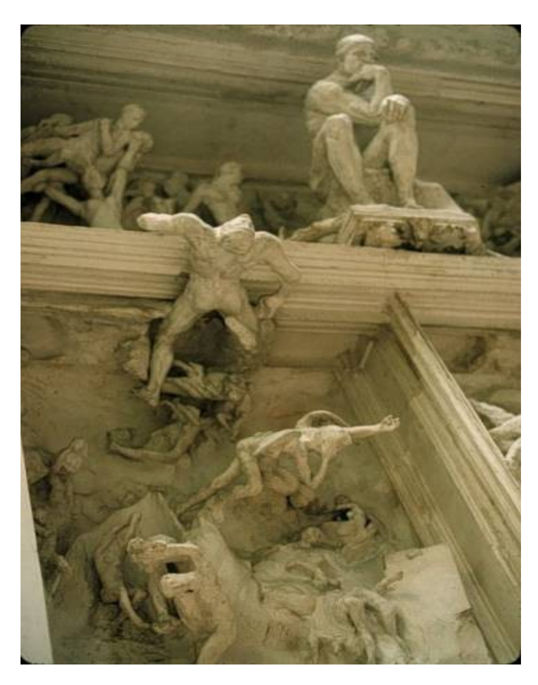
Angel Ruiz Zúñiga nació en San José, Costa Rica. Su vida profesional ha estado asociada a varios temas: historia y filosofía de las matemáticas, educación matemática, filosofía política y desarrollo social, sociología e historia de las ciencias y la tecnología, problemas de la educación superior, y asuntos de la paz mundial y el progreso humano. Autor de más de 25 libros y 150 artículos académicos, expositor y conferencista en más de 80 congresos internacionales y 20 países, y organizador de más de 40 eventos científicos, ha sido, también, consultor y asesor nacional e internacionalmente en asuntos científicos, académicos y políticos.

- **Catedrático** de Matemáticas de la Universidad de Costa Rica (1973--). **Director** (fundador) del Centro de Investigaciones Matemáticas y Meta-Matemáticas, CIMM, Universidad de Costa Rica (1997-2002); **Director** (fundador) del Programa de Investigaciones Meta-Matemáticas, Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica (1990-1997, 2002-2003) y del Programa de Acción Social Matemáticas, Ciencia y Sociedad (1990-2003).
- **Profesor Visitante** en el Departamento de Historia de la Ciencia de la Universidad de Harvard, 1989, 1990 (ulbright Scholar).
- **Presidente** (fundador) de la Asociación Costarricense de Historia y Filosofía de la Ciencia (desde 1983); **Secretario** del Comité Interamericano de Educación Matemática (1987-1995) y **vocal** (1999-2003). **Miembro** del **Consejo Latinoamericano** de la Sociedad Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología (desde 1988).

- **Algunos de sus libros:**
- Matemáticas y Filosofía (1990, Editorial UCR, Costa Rica, **Mención honorífica** Premio Jorge Volio 1995; prólogos Luis Camacho Naranjo y Fernando Leal),
- La Tercera República: ensayo sobre la Costa Rica del futuro (1991, Inst. Centroamericano Cultura y Desarrollo; prólogo Fernando Volio Jiménez).
- Ciencia y tecnología en la construcción del futuro (editor, 1991, Asoc. Cost. de Historia y Filosofía de la Ciencia).
- Ocaso de una utopía. (1993, Edit. UCR, Costa Rica, **Primer lugar** Premio Jorge Volio de Filosofía 1995; Prólogo Oscar Arias Sánchez).
- Universidad y Sociedad en América Latina (1995, FLACSO; **Ganador certamen** UNA-FLACSO 1995).
- Historia de las matemáticas en Costa Rica (editor científico,1995, E. UCR y UNA; Prólogo José Joaquín Trejos Fernández).
- Disquisitiones Arithmeticae de Carl Gauss (con H. Barrantes y M. Josephy, versión castellana de esta obra famosa, 1995, Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Colombia).
- Elementos de Cálculo Diferencial (complejo didáctico con 4 libros de texto, con H. Barrantes, San José, Costa Rica: Ed. UCR, 1997).

- The History of the Inter American Committee of Mathematics Education . [Con H. Barrantes, Colombia: Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 1998, con Barry University (USA) y el International Committee on Mathematics Instruction (ICMI), Prólogo por Ubiratan D'Ambrosio].
- Geometrías no euclidianas. (San José, Costa Rica: EUCR, 1999). **Primer lugar** Premio Jorge Volio , Ciencias, 2001.
- El desafío de las matemáticas. **Ganador concurso** UNA Palabra, rama de ensayo, Universidad Nacional, Heredia, Costa Rica, 1998). Heredia, Costa Rica: EUNA, 2000.
- El siglo XXI y el papel de la universidad, San José, Costa Rica: EUCR-CONARE, 2001.
- El destino de Costa Rica y la educación superior, San José, Costa Rica: EUCR-CONARE, 2001.
- La educación superior en Costa Rica, San José, Costa Rica: EUCR- CONARE, 2001.

BIBLIOGRAFIA Y REFERENCIAS



[1] Agassi, I.: Towards an Historiography of Science, History and Theory: studies in the Philosophy of History. The Hague: North Holland, 1963.

[2] Aristóteles: Obras . Trad. Francisco de P. Samaranch. Madrid: Aguilar, 1964.

[3] Aristóteles: Tratados de lógica . Trad. Francisco Larroyo. México: Editorial Porrúa, 1979.

[4] Arquímedes: El Método , Madrid, España: Alianza Editorial, 1986.

[5] Aspray, William y Kitcher, Philip: History and Philosophy of Modern Mathematics , Minneapolis: Univ. of Minnesota Press, 1988.

[6] Ayer, A. J.: Language, Truth and Logic . London: Gollancz, 1936. Dover (New York) lo reimprimió en 1946.

[7] Ayer, A.J.: Lenguaje, Verdad y Lógica . Trad. Marcial Suárez. Barcelona: Editorial Martínez Roca, S.A., 1977.

[8] Ayer, A.J.: Russell . London Fontana / Collins, 1972.

[9] Babini, José: Historia sucinta de la matemática . Madrid: Espasa-Calpe, 1969.

[10] Barabashev: "Empiricism as a historical phenomenon of Philosophy of Mathematics", en Revue Int. de Philosophie , Vol. 42, No. 167, 4-1988, p. 509-517.

[11] Barker, Stephen F.: Filosofía de las matemáticas . Trad. Carlos Moreno Canadas. México: UTEHA, 1965.

[12] Bell, E.T.: Historia de las matemáticas . Trad. R. Ortiz. México: Fondo de Cultura Económica, 1949.

[13] Benacerraf, Paul / Putnam, Hilary: Philosophy of Mathematics: Selected Readings . N. J.: Prentice Hall, 1964. La segunda edición es de Cambridge University Press en 1983.

[14] Bernal, John D.: La Ciencia en la Historia . México: Editorial Nueva Imagen, 1981.

[15] Beth, E. W. / Pos, H. J. / Hollak, J. H. A. (editores): Proceedings of the Tenth International Congress of Philosophy (Amsterdam, 1948), Vol. I, pt. 2, Amsterdam, 1948.

[16] Beth, E.W.: Les fondements logiques des mathématiques . Paris: Louvain. 1964.

[17] Beth, Evert W.: Mathematical thought . Dordresht-Holland: D. Reidel, 1965.

[18] Beth. E. W./ Piaget, Jean: Epistemología, Matemáticas y Psicología . Trad. Víctor Sánchez de Zavala. Barcelona: Editorial Crítica, 1980.

[19] Birchall, B.C.: "Frege's objects and concepts: revolutionary or reactionary", Philosophy and phenomenological research , June 1982, Vol. XLII, Nº 4.

[20] Black, Max: The nature of mathematics . London: Routledge & Kegan Paul. Ltd., 1950.

[21] Bochner, Salomon: The role of mathematics in the rise of science . Princeton: Princeton University Press, 1981.

[22] Bolzano, Bernard: Las paradojas del infinito , México: UNAM, 1991.

[23] Boole, George: An investigation of the lows of thought on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities . New York: Dover Publications Inc. 1958.

[24] Boole, George: Análisis matemático de la lógica . Trad. Armando Asti-Vera. Buenos Aires: Universidad Nacional de la Plata, 1960.

[25] Borges, Jorge Luis: El Aleph , Madrid: Alianza Editorial, 1971.

[26] Bourbaki, Nicolás: Elementos de historia de las matemáticas . Trad. Jesús Hernández. Madrid: Alianza Editorial, 1976.

[27] Boyer, Carl B.: A history of mathematics . New York: John Wiley & Sons Inc., 1968.

[28] Brody, Boruch A. CAPALDI, Nicholas (Edit.): Science: Men, method, goals. A reader. New York: W.A. Benjamin, Inc. 1968.

[29] Brouwer, L. E. J.: "Intuitionism and Formalism", en el Bulletin of the American Mathematical Society , 20, 1913.

[30] Brouwer, L. E. J.: "Consciousness, Philosophy and Mathematics", en Proceedings of the Tenth International Congress of Philosophy (Amsterdam, 1948), Ed. E. W. Beth, H. J. Pos y J. H. A Hollak. Vol. I, pt. 2, Amsterdam, 1948.

[31] Brown, J. S. / Collins, A. / Duguid, P.: "Situation cognition and the culture of learning" en Educational Researcher , 18 (1), 1989.

[32] Brunschvicg, Léon: Les étapes de la philosophie mathématique . Paris: Librairie scientifique et technique A. Blanchard, 1981.

[33] Buchdahl, Gerd: Metaphysics and the philosophy of science . Cambridge-Massachusetts: The Mit Press, 1969.

[34] Cajori, Florian: A history of mathematics . New York: The Mac Hillan Co. 1961.

[35] Camacho, Luis: Introducción a la lógica . Cartago: Editorial Tecnológica de Costa Rica, 1983.

[36] Carey, S / Gelman, R.: The epigenesis of mind: Essays on biology and cognition . Hillsdale, N. J.: Erlbaum, 1991.

[37] Carnap, R.: Foundations of Logic and Mathematics . Chicago: University of Chicago Press, 1939.

[38] Cassirer, Ernest: El problema del conocimiento . (Tomo I). México: Fondo de Cultura Económica, 1965 (segunda edición en español).

[39] Clifford, William Kingdon: “Postulados de la ciencia del espacio”, en Newman, James R. (edit.): El mundo de las matem áticas. Volumen 4, Barcelona, España: Grijalbo, 1974.

[40] Clifford, William Kingdon: “Teoría de la materia en el espacio”, en Newman, James R. (edit.): El mundo de las matemáticas . Volumen 4, Barcelona, España: Grijalbo, 1974.

[41] Cobb, P. / Bauersfeld, H.: The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures . Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates, 1994.

[42] Cobb, Paul: “Where is the mind? Constructivist and Sociocultural Perspectives on Mathematical Development” en la revista Educational Researcher volumen 23, número 7, octubre de 1994.

[43] Copleston, Frederids: A history of philosophy . (Vol.1) New York: Image Books, 1962.

[44] Courant, R. y Robbins, H.: “Topología”, en Newman, James R. (edit.): El mundo de las matemáticas . Volumen 4, Barcelona, España: Grijalbo, 1974.

[45] Crombie, A.C.: Historia de la ciencia . De San Agustín a Galileo siglos V-XIII. Madrid: Alianza Editorial, S.A., 1983.

[46] Currie, Gregory: “Frege on thoughts”, Mind , April 1980, Vol. LXXXIX, Nº. 354.

[47] Currie, Gregory: “Frege's realism”, Inquiry , Summer 1978, Vol. 21, Nº. 2.

[48] Currie, Gregory: “The origin of Frege's realism”, Inquiry , December 1981, Vol. 24, Nº. 4.

[49] Curry, Haskell B.: Outlines of a formalist philosophy of mathematics . Amsterdam: North-Holland, 1970.

[50] Davis, Philip / Hersh, Reuben: The Mathematical Experience , Boston: Birkhäuser, 1981.

[51] Davydov, V. V.: “Problems of developmental teaching” (Parte 1) en Soviet Education , 30 (8), 1988.

[52] De Laplace, Pierre Simón: “Sobre la probabilidad”, en Newman, James R. (edit.): El mundo de las matemáticas , Barcelona, España: Grijalbo, 1974.

[53] De Lorenzo, Javier: Filosofías de la matemática . Fin de siglo XX. Valladolid, España: Secretariado de publicaciones e intercambio Editorial Universidad de Valladolid. 2000.

[54] De Lorenzo, Javier: Kant y la matemática el uso constructivo de la razón pura, Madrid: TECNOS, S.A., 1992.

[55] De Lorenzo, Javier: La matemática y el problema de su historia . Madrid, España: TECNOS 1977.

[56] Dedekind, Richard: ¿Qué son y para qué sirven los números? Madrid: Alianza Editorial SA, 1998.

[57] Desanti, Jean Toussaint: La philosophie silencieuse . Paris: Editions du Seuil, 1975.

[58] Descartes, Renato: Discurso del método. Meditaciones Metafísicas . Trad. Manuel García Morente. Madrid: Espasa-Calpe, 1968.

[59] Descartes, René: Discurso del método . Trad. Constantino Láscaris. San José: EDUCA, 1983 (octava edición).

[60] Díaz-Estévez, Emilio: El teorema de Gödel . Pamplona: Ediciones Universidad de Navarra, S.A., 1975.

[61] Dummett, Michael: "Frege as a realist", Inquiry , Winter 1976, Vol. 19, Nº. 4.

[62] Eddington, Sir A. S.: "La teoría de grupos", en Newman, James R. (edit.): El mundo de las matemáticas . Volumen 4, Barcelona, España: Grijalbo, 1974.

[63] Eldridge, Richard: "Frege's realist theory of knowledge. The construction of an ideal language and the transformation of the subject", Review of metaphysics , March 1982, Vol. XXXV Nº. 139.

[64] Ernest, Paul: "In response to professor Zheng". Philosophy of Mathematics Education Newsletter 7 (February 1994).

[65] Ernest, Paul: The Philosophy of Mathematics Education . Hampshire, G.B.: The Falmer Press, 1991.

[66] Euler, Leonhard: "Los siete puentes de Königsberg", en Newman, James R. (edit.): El mundo de las matemáticas . Volumen 4, Barcelona, España: Grijalbo, 1974.

[67] Ferreirós, José: Presentación de Dedekind, Richard: ¿Qué son y para qué sirven los números? Madrid: Alianza Editorial SA, 1998.

[68] Feyerabend, Paul K.: Contra el método . Trad. Francisco Hernán. Barcelona: Editorial Ariel, 1974.

[69] Frege, Gottlob: Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formel-sprache des reinen , Denkens. Halle, Nebert, 1879.

[70] Frege, Gottlob: Conceptografía. Los fundamentos de la aritmética. Otros estudios filosóficos . Trad. Hugo Padilla. México: UNAM, 1972.

[71] Frege, Gottlob: Estudios sobre semántica . Trad. Ulises Moulines. Barcelona: Editorial Ariel.

[72] Frege, Gottlob: Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet . 2 vols. Jena: Pohle, 1893, 1903. Reimpreso por Hildescheim: Olms, 1966.

[73] Geach, Peter y Black, Max (Editors and translators): Translations from the philosophical writings of Gottlob Frege . Oxford: Blackwell, 1952.

[74] Gellner, Ernest: Relativism and the Social Sciences , Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985.

[75] Geymonat, Ludovico : Limites actuales de la filosofía de la ciencia. Barcelona, España, Ed. Gedisa, 1987.

[76] Glaserfeld, E. von: "Constructivism in Education" en la obra editada por Huse, T. y Postlethwaite, T. N. The International Encyclopedia of Education Suplementary Volume , Oxford: Pergamon Press, 1989.

[77] Gödel, Kurt: Obras completas . Trad. Jesús Mosterín. Madrid: Alianza Editorial, 1981.

[78] Goldstein, R.L.: Essays in the philosophy of mathematics . Leicester: Leicester University Press, 1965.

[79] Grattan-Guiness, I.: "Not from Nowhere History and Philosophy behind Mathematical Education", en Int. J. Math. Educ. Sci. Technol . Vol 4, 421-453 (1973).

[80] Greeno, J.G: "Number sense as situated knowing in a conceptual domain" en el Journal for research in Mathematics Education , 22, 1991.

[81] Hahn, Hans: "El infinito", en Newman, James R. (edit.): El mundo de las matemáticas . Volumen 4, Barcelona, España: Grijalbo, 1974.

[82] Hahn, R.: "Nuevas tendencias en historia social de la ciencia" en La fuente y Saldaña.

[83] Hardy, G. H.: Autojustificación de un matemático , Barcelona: Ariel, 1981.

[84] Hempel, C. G.: "On the Nature of Mathematical Truth". American Mathematical Monthly 52: 543-56. Incluido en el libro editado por Benacerraf y Putnam en 1964.

[85] Herra, Rafael Angel (editor): ¿Sobrevivirá el marxismo? Editorial UCR, 1991, San José, Costa Rica.

[86] Heyting, A . Intuitionism. An introduction . Amsterdam: North-Holland, 1956.

[87] Hilbert, David: "Uber das Unendliche", en. Mathematische Annalen 95 (Berlin). Hay una traducción de E. Putnam y G. J. Massey que se llamó "On the infinite" en el libro editado por Paul Benacerraf y Hilary Putnam: Philosophy of Mathematics : Selected Readings . N. J.: Prentice Hall, 1964; y por S. Bauer-Mengelberg en el libro de Jean Van Heijenoort: From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic , 1879-1931. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1967.

[88] Hilbert, D.: "Mathematical problems'", en Bulletin of the American Mathematical Society , vol. 8, 1901- 902.

[89] Huse, T. / Postlethwaite, T. N. (Eds.): The International Encyclopedia of Education Supplementary Volume , Oxford: Pergamon Press, 1989.

[90] Janvier, C. (Ed.): Problems of representation in the teaching and learning of mathematics . Hillsdale, N. J.: Erlbaum, 1987.

[91] Joseph, George Gheverghese: La cresta del pavo real. Las matemáticas y sus raíces no europeas . Madrid: Ediciones Pirámide, 1996.

[92] Kant, Manuel: Crítica de la Razón Pura . Trad. José del Perojo. Buenos Aires: Losada, 1973.

[93] Kant, Manuel: Prolegómenos . Trad. Julián Besteiro. Buenos Aires: Aguilar Argentina, S.A., 1971.

[94] Keyser, Cassius J.: “El concepto de grupo”, en Newman, James R. (edit.): El mundo de las matemáticas . Volumen 4, Barcelona, España: Grijalbo, 1974.

[95] Kitcher, Philip: "Mathematical Naturalism" en el libro editado por William Aspray y Philip Kitcher: History and Philosophy of Modern Mathematics , Minneapolis: Univ. of Minnesota Press, 1988.

[96] Kitcher, Philip: “Frege's epistemology”, Philosophical review , April 1979, Vol LXXXVIII, Nº. 2.

[97] Kitcher, Philip: The nature of Mathematical Knowledge , New York Oxford: Oxford University Press, 1983.

[98] Klemke, E.D. (Edit.): Essay on Frege. Illinois: University of Illinois Press, 1968.

[99] Kline, M.: Mathematics: the loss of certainty . New York: Oxford University Press, 1980.

[100] Kline, M.: Why Johnny Can't Add: The Failure of New Math . London: St. James Press, 1973. Existe una versión en español: El fracaso de la matemática moderna , por Alianza Editorial, en Madrid, España.

[101] Kline, Morris. Mathematics. The loss of certainty . New York: Oxford University Press, 1980.

[102] Kline, Morris: “Geometría proyectiva”, en Newman, James R. (edit.): El mundo de las matemáticas . Volumen 4, Barcelona, España: Grijalbo, 1974.

[103] Kline, Morris: Mathematics in Western Culture. New York: Oxford University Press, 1966.

[104] Kline, Morris: Mathematics. The loss of certainty . New York: Oxford University Press, 1980.

[105] Kneale, William y Martha: El desarrollo de la lógica . Trad. Javier Muguerza. Madrid: Editorial Tecnos, 1972.

[106] Körner, Stephan: Introducción a la filosofía de la matemática . Trad. Carlos Gerhard. México Siglo XXI, 1969.

[107] Körner, Stephan: La matemática Gödeliana y sus implicaciones filosóficas . México: Publicaciones de la UNAM, 1972.

[108] Kuhn, Thomas S.: "The relations between History and the History of Science", en The essential tension: selected studies in scientific tradition and change, Chicago: The University of Chicago Press, 1979.

[109] Kuhn, Thomas S.: La Estructura De Las Revoluciones Científicas , México: Fondo de Cultura Económica, 1971.

[110] Kuhn, Thomas S.: Segundos pensamientos sobre paradigmas , Madrid: Ed. Tecnos, 1978.

[111] Kuntzmann, Jean: ¿Adónde va la matemática? Problemas de la enseñanza y la investigación . México: Edit. Siglo XXI, 1978.

[112] Ladrière, Jean: Limitaciones internas de los formalismos . Trad. José Blasco. Madrid: Alianza Editorial, 1969.

[113] Lafuente, A. y Saldaña, J.J. (editores), Historia de las ciencias. Nuevas tendencias . Madrid: CSIC, 1987 .

[114] Lákatos, Imre: Matemáticas ciencia y epistemología . Trad. Diego Ribes Nicolás. Madrid: Alianza Editorial, 1981. Versión original: Mathematics, Science and Epistemology - Philosophical Papers. Volume 2, Cambridge University Press, 1978.

[115] Lákatos, Imre: Proofs and Refutations . Cambridge: Cambridge University Press, 1976.

[116] Lákatos, Imre: Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático . Madrid, España: Alianza Editorial, S.A. 1978.

[117] Lákatos, Imre: The methodology of scientific research programs . Cambridge: Howard Ferting, 1978.

[118] Largeault, Jean: Logique et philosophie chez Frege . Paris: Editions Nauwelaerts, 1970.

[119] Le Lionnais, F. (Comp.): Las grandes corrientes del pensamiento matemático . Trad. Néstor Míguez. Buenos Aires: Editorial Universitaria de Buenos Aires, 1965.

[120] Leal, Fernando: Ensayo sobre la ontología de la mente . Costa Rica: Editorial de Costa Rica, 1985.

[121] Leibniz, G.W.: Monadología. Discurso de metafísica. Profesión de fe de filosofo . Trad. Manuel Fuentes Benot/ Alfonso Castaño/ Francisco de Samaranch. Barcelona: Aguilar Argentina, 1983.

[122] Leibniz, G.W.: Sistema nuevo de la naturaleza . Trad. Enrique Pareja. Buenos Aires: Aguilar, 1963.

[123] Leibniz, G.W: Discurso de metafísica . Trad. Alfonso Castaño Piñán. Buenos Aires: Aguilar, 1967.

[124] Leontev, A. N.: "The problem of activity in Psychology", en el libro editado por J. V. Wersch (Ed.): The concept of activity en Soviet Psychology . Armonk, N. Y.: Sharpe, 1981.

[125] Malherbe, J.E.: Épistémologies anglo-saxonnes . Namur: Presses Universitaires de Namur, 1981.

[126] Marcos, Alfredo: El Testamento de Aristóteles, memorias desde el exilio , León, España: EDILESA, 2000.

[127] Martinón, Antonio: La matemática del siglo XX, Madrid: NIVOLA libros y ediciones, S. L., 2000.

[128] Mason, Stephen F.: Historia de las ciencias. La Revolución Científica de los siglos XVI y XVII . Madrid: Alianza Editorial, S.A., 1985.

[129] Mehler, J. / Walker, E. C. T. / Garret, M. (Eds.): Perceptives in mental representation: Experimental and theoretical studies of cognitive processes and capacities . Hillsdale, N. J.: Erlbaum, 1982.

[130] Miró Quesada, Francisco: "La naturaleza del conocimiento matemático: Crítica a un libro de Philip Kitcher", en Crítica, Rev. Hispanoamericana de Filosofía , Vol XIX, No. 57 (diciembre de 1987), 109-136.

[131] Moreno, Luis y Waldegg, Guillermina: "Constructivismo y educación matemática", Educación matemática , Vol. 4, N. 2, p. 14, agosto 1992, México.

[132] Mouloud, Nöel: Les structures, la recherche et les savoir . Paris: Payot, 1968.

[133] Needham, Joseph: “Las matemáticas y las ciencias en China y en Occidente”, en el libro editado por Barnes, Barry: Estudios sobre la sociología de la ciencia , Madrid: Alianza Editorial, 1980.

[134] Needham, Joseph: Ciencia y sociedad en Oriente y Occidente , Madrid: Alianza Editorial, 1977.

[135] Newman, James R.: Sigma. EL mundo de las matemáticas . Trad. Varios. Barcelona: Grijalbo, 1969.

[136] Novac, George: Empiricism and its evolution . New York: Pathfinder Press Inc., 1973.

[137] Panofsky, Erwin: “Durero como matemático”, en Newman, James R. (edit): El mundo de las matemáticas . Volumen 4, Barcelona, España: Grijalbo, 1974.

[138] Pap, Arthur: Teoría analítica del conocimiento . Trad. F. Gracia Guillén. Madrid: Editorial Tecnos, 1964.

[139] Passmore, John: A hundred years of philosophy . Great Britain: Penguin, 1972.

[140] Peirce, Charles Sanders: “Las rojas y las negras”, en Newman, James R. (edit.): El mundo de las matemáticas , Barcelona, España: Grijalbo, 1974.

[141] Piaget, Jean / Choquet, G. / Dieudonné, J. / Thom, R. y otros: La enseñanza de las matemáticas modernas . Madrid: Alianza Editorial, 1980. Selección y prólogo de Jesús Hernández.

[142] Piaget, Jean, Beth, E. W.: Epistemología matemática y psicología , Barcelona: Grupo Editorial Grijalbo, 1980.

[143] Piaget, Jean: Biología y Conocimiento . Trad. Francisco Gonzáles Aramburu. México: Siglo XXI, 1980.

[144] Piaget, Jean: Biología y conocimiento . Trad. Francisco González Aramburu. México: Siglo XXI, 1980.

[145] Piaget, Jean: Introducción a la epistemología genética . Trad. María Teresa Carrasco-Víctor Fischman. Buenos Aires: Editorial Paidós, 1979.

[146] Piaget, Jean: Introducción a la Epistemología Genética . Trad. María Teresa Carrasco y Víctor Fischman. Buenos Aires: Editorial Paidós, 1974.

[147] Platón: Obras completas . Trad. Varios. Madrid: Aguilar, 1966.

[148] Poincaré, Henri: Filosofía de la ciencia . México D.F., México: CONACYT 1984.

[149] Popper, Karl: EL mundo de Parménides. Ensayos sobre la ilustración presocrática . Barcelona, España. Editorial Paidós Ibérica, S. A. 1999.

[150] Popper, Karl: La lógica de la investigación científica . Trad. Víctor Sánchez de Zavala. Madrid: Tecnos, 1982.

[151] Popper, Karl: La sociedad abierta y sus enemigos , Barcelona, España: Ediciones Paidos Ibérica, S. A.

[152] Putnam, Hilary: Philosophical Papers . Vol. I: Mathematics, Matter and Method . Vol. 2: Mind, Language and reality . Cambridge: Cambridge University Press, 1975.

[153] Quine, Willard van Orman. Desde un punto de vista lógico . Trad. Manuel Sacristán. Barcelona: Ediciones Ariel, 1962.

[154] Quine, Willard van Orman. Filosofía de la lógica . Trad, Manuel Sacristán. Madrid: Alianza, 1977.

[155] Quine, Willard van Orman: La relatividad ontológica y otros ensayos . Trad. Manuel Garrido y Joseph Blasco. Madrid: Editorial Tecnos, 1974.

[156] Quine, Willard van Orman: Los métodos de la lógica . Trad. Manuel Sacristán. Barcelona: Ediciones Ariel, 1969.

[157] Redondi, P.: "A. Koyré, De la mystique à la science. Cours, conférence et documents,1922 ? 1962". Paris: Editions de L'EHESS, 1986.

[158] Resnik, M. D.: "Mathematical Knowledge and Pattern Recognition." Canadian Journal of Philosophy 5: 25-39, 1975.

[159] Resnik, M. D.: "Mathematics as a Science of Patterns": Ontology. Nous 15: 529-50, 1981.

[160] Resnik, M. D.:" Mathematics as a Science of Patterns: Epistemology". Nous 16:95-105, 1982.

[161] Riemann, Bernhard: "Sobre la hipótesis en que se funda la geometría" (1854), en Consejo superior de investigaciones científicas: Bernhard Riemann, Riemanniana selecta , Madrid: CSIC, 2000.

[162] Rioja, Ana y Ordóñez, Javier: Teorías del universo. Volumen I. De los pitagóricos a Galileo . España: Editorial Síntesis, 1999.

[163] Rioja, Ana, y Ordóñez, Javier: Teorías del Universo, Volumen II de Galileo a Newton , Madrid, España: Editorial Síntesis, 1999.

[164] Rossi, Paolo: El nacimiento de la ciencia moderna en Europa, Barcelona: Crítica, 1998.

[165] Rouse Ball, W.W.: A short account of the history of mathematics . Bew York: Dover Publications, 1956.

[166] Ruiz, A. (Editor): Ciencia y tecnología. Cuadernos del pasado y el futuro , San José: Asoc. Cost. de Historia y Filosofía de la Ciencia, diciembre de 1991.

[167] Ruiz, A. (Editor científico): Historia de las Matemáticas en Costa Rica. Una introducción . Heredia: EUNA, EUCR, 1995.

[168] Ruiz, A. / Barrantes, Hugo: Elementos de Cálculo Diferencial. Historia y ejercicios resueltos , San José, Costa Rica: Ed. UCR, 1997.

[169] Ruiz, A. / Camacho, Luis (edit.): La historia de la ciencia y la tecnología, el avance de una nueva disciplina . Cartago, Costa Rica: Editorial Tecnológica de Costa Rica, 1989.

[170] Ruiz, A.: "Epistemological constituents of Mathematics construction. Implications in its teaching". Proceedings of the "XI International Conference on the Psychology of Mathematics Education", Julio 1987, Montreal, Canada.

[171] Ruiz, A.: "Ética y Epistemología en las ciencias sociales; a propósito de Gramsci", en el libro: Ruiz-Zúñiga, Angel (editor), Ciencia y tecnología en la construcción del futuro. San José: Asoc. Cost. de Historia y Filosofía de la Ciencia, diciembre de 1991.

[172] Ruiz, A.: "La lógica intelectual del marxismo y el comunismo de nuestro tiempo", en Herra, R. A. (editor): ¿Sobrevivirá el marxismo? Editorial UCR, 1991, San José, Costa Rica.

[173] Ruiz, A.: "Lo fáustico y lo apolíneo en la Filosofía de la Matemática de Spengler". Ciencias matemáticas (Univ. de Costa Rica), Vol. II, N. 2, diciembre 1991, San José, Costa Rica.

[174] Ruiz, A.: "Logicismo, Matemáticas y la noción de analiticidad" en el libro editado por Angel Ruiz y Luis Camacho La historia de la ciencia y la tecnología, el avance de una nueva disciplina . Cartago, Costa Rica: Editorial Tecnológica de Costa Rica, 1989.

[175] Ruiz, A.: "Matemáticas y cultura en La decadencia de occidente de Spengler". En Ruiz Zúñiga, Angel (editor): Ciencia y tecnología. Cuadernos del pasado y el futuro , San José: Asoc. Cost. de Historia y Filosofía de la Ciencia, diciembre de 1991.

[176] Ruiz, A.: "Sobre la llamada armonía preestablecida entre matemáticas y realidad", incluidos en el libro editado por Angel Ruiz y Luis Camacho La historia de la ciencia y la tecnología, el avance de una nueva disciplina . Cartago, Costa Rica: Editorial Tecnológica de Costa Rica, 1989.

[177] Ruiz, A.: "Tres comentarios sobre la Fenomenología Husserliana". Praxis . N.25, Julio 1983, Heredia, Costa Rica.

[178] Ruiz, A.: "Una prospectiva posible de las matemáticas en un país periférico" (en colaboración con Hugo Barrantes), Memorias "Tercer Congreso Latinoamericano de Políticas Científicas y Tecnológicas", Marzo de 1988, San José, Costa Rica.

[179] Ruiz, A.: El desafío de las matemáticas (ensayo ganador de la rama de ensayo en el Concurso UNA Palabra de la Universidad Nacional, Heredia, Costa Rica, 1998). Heredia, Costa Rica: EUNA, 2000.

[180] Ruiz, A.: Geometrías no euclidianas , (libro ganador del Primer lugar Premio de Ciencias Jorge Volio 2000. Colegio de Licenciados y Profesores en Filosofía, Artes, Letras, Ciencias y Artes, Costa Rica). Editorial de la UCR, San José, Costa Rica, 1999.

[181] Ruiz, A.; Barrantes, H.; Josephy. M., Disquisitiones Arithmeticae de C. Gauss (traducción al español), Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Bogotá, Colombia, 1995.

[182] Ruiz, Angel: Ocaso de una utopía, en las entrañas del Marxismo . San José: Edit. UCR, 1993.

[183] Russell, Bertrand: “Los metafísicos y las matemáticas”, en Newman, James R. (edit.): El mundo de las matemáticas . Volumen 4, Barcelona, España: Grijalbo, 1974.

[184] Russell, Bertrand: An essay on the foundations of geometry . New York: Dover Publications, 1956.

[185] Russell, Bertrand: Escritos básicos 1903-1959 . (Comp. Robert Egner y Lester Denonn). Trad. Varios. México: Aguilar, 1969.

[186] Russell, Bertrand: Historia de la filosofía occidental . Trad. Julio Gómez de la Serna y Antonio Dorta. Madrid: Espasa-Calpe, 1971 (segunda edición).

[187] Russell, Bertrand: Introducción a la filosofía matemática . Trad. Juan B. Molinari. Buenos Aires: Losada, 1945.

[188] Russell, Bertrand: La evolución de mi pensamiento filosófico . Trad. Juan Novella Domingo. Madrid: Aguilar, 1964.

[189] Russell, Bertrand: Lógica y conocimiento . Trad. Javier Muguerza. Madrid: Taurus Ediciones, 1966.

[190] Russell, Bertrand: Los Principios de la matemática . Trad. Juan Carlos Grimberg. Madrid: Espasa-Calpe, 1967.

[191] Russell, Bertrand: Los problemas de la filosofía . Trad. Joaquín Xirau. Barcelona: Editorial Labor, 1928.

[192] Russell, Bertrand: Mysticism and logic . New York: W.W. Norton & Co. Inc., 1929.

[193] Sarton, George: Ciencia antigua y civilización moderna . México: Fondo de Cultura Económica, 1980.

[194] Schilpp, Paul Arthur (Edit.): The philosophy of Bertrand Russell . Evanston and Chicago: Northwestern University, 1944.

[195] Schoenfeld, A.H: Cognitive science and mathematics education . Hillsdate, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates,1987.

[196] Sebestik, Jean: Presentación del libro de Bernard Bolzano: Paradojas del infinito , México: UNAM, 1991.

[197] Shapiro, S.: “Conservativeness and Incompleteness”. Journal of Philosophy 80: 521-31, 1983.

[198] Shapiro, S.: “Mathematics and Reality”. Philosophy of Science 50: 523-48, 1983.

[199] Sluga, Hans D.: “Frege's alleged realism”, Inquiry , Summer 1977, Vol. 20, Nº 2-3.

[200] Spelke, E. S.: “Perceptual knowledge of objects in infancy”, en el libro editado por J. Mehler, E. C. T. Walker y M. Garret (Eds.): Perceptives in mental representation: Experimental and theoretical studies of cognitive processes and capacities . Hillsdale, N. J.: Erlbaum. 1982.

[201] Spengler, Osvaldo: La decadencia de occidente . Trad. Manuel García Morente. Madrid: Espasa-Calpe, 1958.

[202] Spinoza, B.: Ética . Buenos Aires: Aguilar, 1963 (tercera edición). El título original de la obra fue Ethica ordine geometrico demonstrata , publicada como obra póstuma en 1677.

[203] Spinoza, B.: Tratado sobre la reforma del entendimiento . Bogotá: Ed. Univ. Nac. de Colombia, 1984.

[204] Stegmuller, Wolfgang: Teoría y experiencia . Trad. C. Ulises Moulines. Barcelona: Editorial Ariel, 1979.

[205] Steiner, H.G. / Vermandel, A.: Foundations and methodology of the discipline of mathematics education . Antwerp, Bélgica: (Proceedings of the TME Conference), 1988.

[206] Steiner, M.: Mathematical Knowledge . Ithaca, N.Y.: Cornell University Press, 1975.

[207] Strawson, P.F. (Edit): Philosophical logic . Oxford: Oxford University Press, 1967.

[208] Thom, René: "Son las matemáticas modernas un error pedagógico y filosófico?, en el libro: Piaget, Jean / Choquet, G. / Dieudonné, J. / Thom, R. y otros: La enseñanza de las matemáticas modernas . Madrid: Alianza Editorial, 1980. Selección y prólogo de Jesús Hernández.

[209] Threlfall, John: Absolutism or fallibilism What difference does it make to the classroom? Philosophy of Mathematics Newsletter 7 (Febrero 1994).

[210] Van Heijenoort, Jean: From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic. 1879-1931. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1967.

[211] Varios. (Comp.): Epistemología y marxismo . Trad. M. Bofill y E. Petit. Barcelona: Ediciones Martínez Roca, 1974.

[212] Vessuri, Hebe (y otros): La ciencia periférica . Caracas: Monte Ávila Editores, 1983.

[213] Volpi, Jorge: En busca de Klingsor . Barcelona: Editorial Seix Barral SA, 1999.

[214] Von Glaserfeld, E. (Ed.): "An introduction to radical constructivism", en el libro editado por P. Walzlawick: The invented reality. New York: Norton, 1984.

[215] Von Glaserfeld, E.: "Constructivism in Education" en la obra editada por Huse, T. y Postlethwaite, T. N. The International Encyclopedia of Education Suplementary Volume, Oxford: Pergamon Press, 1989.

[216] Von Glaserfeld, E.: "Learning as a constructive activity". En el libro editado por C. Janvier (Ed.): Problems of representation in the teaching and learning of mathematics . Hillsdale, N. J.: Erlbaum, 1987.

[217] Von Glaserfeld, E: "Cognition, construction of knowledge, and teaching" en Synthese , 80, 121-140, 1989.

[218] Von Helmholtz, Hermann: "Axiomas geométricos", en Newman, James R. (edit): El mundo de las matemáticas Volumen 4, Barcelona, España: Grijalbo, 1974.

[219] Vygotsky, L. S.: "Consciousness as a problem in the psychology of behavior" en Soviet Psychology , 17, 1979.

[220] Vygotsky, L. S.: Razvitie vysshikh psikhicheskikh funktsii , Moscú: Akad. Ped. Nauk, 1960.

[221] Vygotsky, L.S: Mind and society: the development of higher mental processes . Cambridge, Boston: Harvard University Press, 1978.

[222] Wahl, J.: Du rôle de l´idée de l´instant dans la philosophie de Descartes . Paris, 1920.

[223] Walzlawick, P. (Ed.): The invented reality .New York: Norton, 1984.

[224] Wersch, J. V. (Ed.): "The concept of activity" in Soviet Psychology . Armonk, N. Y.: Sharpe, 1981.

[225] Weyl, Hermann: Philosophy of mathematics and natural science . Princeton: Princeton University Press, 1949.

[226] Wilder, Raymond L.: Introduction to the foundations of mathematics . New York: John Wiley & Sons, 1956.

[227] Wilder, Raymond: Evolution of Mathematical Concepts . New York: Wiley, 1975.

[228] Wilder, Raymond: Introduction to the Foundations of Mathematics . New York: John Wiley and sons, 1956.

[229] Williams, Donald Cary: Principles of empirical realism . Springfield-Illinois: Charles C. Thomas Publisher, 1966.

[230] Wilson, Edward O.: Consilience . La unidad del conocimiento , Barcelona: Galaxia Gutenberg, 1999.